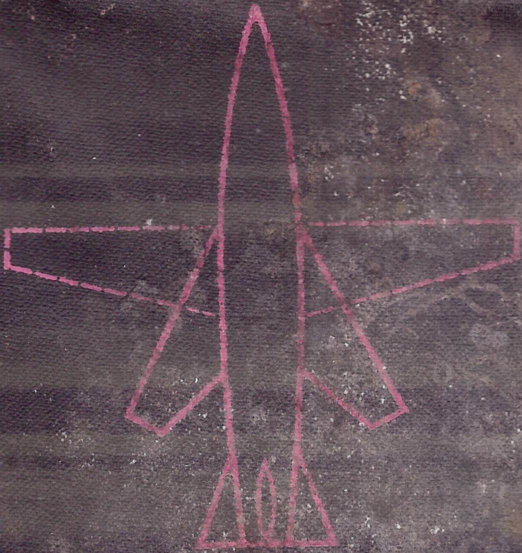
Н. Ф. КРАСНОВ   АЭРОДИНАМИКА   2



Н. Ф. КРАСНОВ

АЭРОДИНАМИКА

Н. Ф. КРАСНОВ

АЭРОДИНАМИКА

2

МЕТОДЫ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством
высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника
для студентов
технических вузов

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1976

533
К78

УДК 533.6 (0.758)

Рецензент — проф. А. М. Мхитарян
(Киевский институт инженеров
гражданской авиации)

Краснов Н. Ф.
К78 Аэродинамика. Ч. II — Методы аэродинамического расчета. Учебник для втузов. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., «Высш. школа», 1976.

368 с. с ил.

Во второй части учебника излагаются основные методы определения аэродинамических характеристик летательных аппаратов и их отдельных элементов, приводится расчет сверхзвукового обтекания заостренных и притупленных конических поверхностей, тонких тел вращения, расположенных под небольшими углами атаки (линеаризованные задачи), а также методы расчета сил трения, теплопередачи и уноса теплозащитных покрытий, рассматриваются задачи, связанные с нахождением аэродинамических параметров летательных аппаратов в виде комбинаций «корпус — крыло», «корпус — крыло — оперение (рули)» с учетом интерференции, даются сведения из аэродинамики разреженных газов.

$$К \frac{20303-418}{001(01)-76} БЗ-23-13-76$$ 533

© Издательство «Высшая школа», 1976.

Учебник «Аэродинамика» состоит [illegible] двух частей: ч. I — «Основы теории. Аэродинамика профиля и крыла» [illegible]. II—«Методы аэродинамического расчета». Использование материала второй части учебника предполагает обязательное знакомство с теоретическими основами аэродинамики, излагаемыми в его первой части. Изучение материала, позволяющего получить представление о прикладном характере аэродинамики, т. е. об определении аэродинамических характеристик, служит одновременно и цели глубокого овладения аэродинамической теорией, что вытекает из важнейшего принципа дидактики, в соответствии с которым научная информация усваивается глубоко и прочно, если она в качестве активного средства используется для решения каких-либо прикладных задач. Этот принцип опирается на неоднократное обращение к хранящейся в памяти научной информации и всестороннее осмысливание тех логических связей, которые существуют между отдельными элементами.

Усвоение методов аэродинамического расчета имеет большое значение, так как вводит в круг проблем установления взаимозависимости между теорией и практикой решения конкретных задач и знакомит с новыми явлениями, свойственными процессам обтекания тел.

Для наиболее полного и последовательного изложения прикладных задач аэродинамики естественным является такое построение учебного курса, в соответствии с которым вначале рассматривается аэродинамика профилей и изолированных крыльев (несущих, управляющих и стабилизирующих поверхностей, гл. VI—VIII, ч. I), затем тел вращения (корпусов) и, наконец, летательных аппаратов в виде различных комбинаций крыльев, оперения, органов управления и тел вращения с учетом интерференции между ними (гл. IX—XI, ч. II).

При подготовке второго издания особое внимание уделено разработке методов расчета аэродинамических характеристик летательных аппаратов. В частности, большее освещение получили вопросы, связанные с определением понятий о коэффициентах интерференции, лежащих в основе указанных методов расчета. Включен важный раздел о нахождении аэродинамического сопротивления с учетом интерференции.

Важное место в учебнике занимает освещение прикладных проблем современной аэродинамики больших скоростей. В частности, сверхзвуковое обтекание конуса рассматривается с учетом влияния физико-химических превращений в воздухе (диссоциации). К числу таких проблем, нашедших отражение во второй части книги (гл. XII—XV), относятся движение газа в пограничном слое (трение и теплопередача), унос массы с обтекаемой поверхности при большом разогреве (абляция), а также силовое и тепловое воздействие в условиях движения тел в разреженной среде.

Для современной аэродинамики характерен подход к решению прикладных инженерных проблем с двух позиций. Можно составить общие уравнения обтекания и найти их решение с помощью электронных вычислительных машин. Такое решение приемлемо для какой-либо заранее выбранной модели исследуемого процесса, обусловливающей многовариантность начальных условий и большой объем вычислительных операций. Вместе с тем исследовать обтекание тел можно аналитически — путем постановки теоретических проблем, их корректных физической и математической формулировок, создания новых методов решения задач. Для инженера имеют исключительно большое значение такие аналитические решения, если область их применения известна. Именно этим решениям уделено большое внимание в книге.

Важнейшим правилом, которым необходимо руководствоваться при осуществлении аэродинамических расчетов, является нахождение соответствующих решений в безразмерной форме. При соблюдении аэродинамического подобия такие решения могут быть распространены с модельных на натурные явления, связанные с обтеканием летательных аппаратов и движением газа вообще. Однако безразмерные решения важны и вне связи с аэродинамическим подобием. Решая в безразмерной форме определенную задачу, которая может и не иметь аналога, находят искомые параметры, определяющие процесс, отнесенные к характерным газодинамическим величинам, известным для такого процесса. Например, вычисляют не абсолютные давления, плотности или температуры, а их значения, отнесенные к соответствующим параметрам торможения. Это способствует нахождению правильных решений и более надежной оценке величин отыскиваемых газодинамических параметров.

Приводимая во второй части учебника научная информация, относящаяся к прикладным проблемам аэродинамики, естественно, не претендует на полное освещение всех методов и приемов аэродинамического расчета. В книге не предусматривалось, например, изложение методов такого расчета в условиях нестационарности, проблем обтекания пористых поверхностей («проницаемая» аэродинамика), аэродинамической теории наивыгоднейших форм обтекаемых поверхностей (в частности, корпусов летательных аппаратов). Изложенный материал второй части книги дает возможность ознакомиться с принципами исследования инженерных аэродинамических проблем и выработать умение ориентироваться при отыскании решения возникающих новых аэродинамических задач. Этому будет способствовать также использование других учебников и учебных пособий, а также монографий и научных статей, перечень которых приведен в конце книги.

Автор признателен рецензенту проф. А. М. Мхитаряну за полезные замечания и ценные предложения по улучшению содержания и структуры книги, которые были учтены при доработке учебника.

Автор с благодарностью примет замечания и советы читателей, которые позволят в большей степени усовершенствовать учебник. Свои замечания просим направлять по адресу: *Москва, К-51, Неглинная, 29/14, Издательство «Высшая школа».*

Автор

ГЛАВА IX

КОНУС В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

§ 9.1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ОБТЕКАНИЯ ЗАОСТРЕННОГО КОНУСА

Задача об обтекании заостренного конуса — одна из наиболее важных в аэродинамике. Ее решение имеет большое практическое значение, так как позволяет рассчитывать аэродинамические характеристики летательных аппаратов или их элементов, имеющих коническую форму, и наряду с этим результаты такого решения используют для расчета сверхзвукового потока около заостренных тел вращения. Например, это решение дает начальную точку на кривой распределения параметров обтекания заостренного криволинейного тела. Кроме того, результаты симметричного обтекания конусов применяются для приближенного расчета распределения параметров газа по периферийной поверхности тел вращения (метод «местных конусов»). Этими же результатами пользуются как сравнительными при исследовании аэродинамики затупленных конусов.

В теоретической аэродинамике наряду с точными разработан ряд приближенных решений, позволяющих упрощенно рассчитывать обтекание конуса. Некоторые из таких решений относятся к тонким конусам, обтекаемым линеаризованным потоком или потоком с очень большими числами **M**. Точное решение может быть, вообще говоря, применено к конусам произвольной толщины, причем обтекающие их потоки могут иметь любые скорости. Основное условие, которое должно при этом выполняться, связано с сохранением около обтекаемого тела конического потока — потока, параметры которого остаются постоянными вдоль прямых, проведенных из вершины обтекаемого невязким потоком конуса. Однако получающиеся результаты применяются также при исследовании вязкого обтекания. «Невязкие» параметры, такие, как давление, скорость, плотность, рассматриваются в качестве параметров на внешней границе пограничного слоя, образующегося на конусе, и являются факторами, определяющими напряжение трения и тепловые потоки, идущие от газа к стенке.

Представим себе конус с половинным углом $\beta_к$ при вершине, обтекаемый осесимметричным сверхзвуковым потоком. Задача заключается в том, чтобы рассчитать течение газа между этим конусом и возникающим перед ним скачком уплотнения, имеющим вид конической поверхности. При этом необходимо определить также угол наклона θ_c прямолинейной образующей конического скачка (рис. 9.1.1). С этой целью рассмотрим систему уравнений в сферических координатах θ и r применительно к такому случаю обтекания, когда газ за скачком под влиянием высоких температур пре-

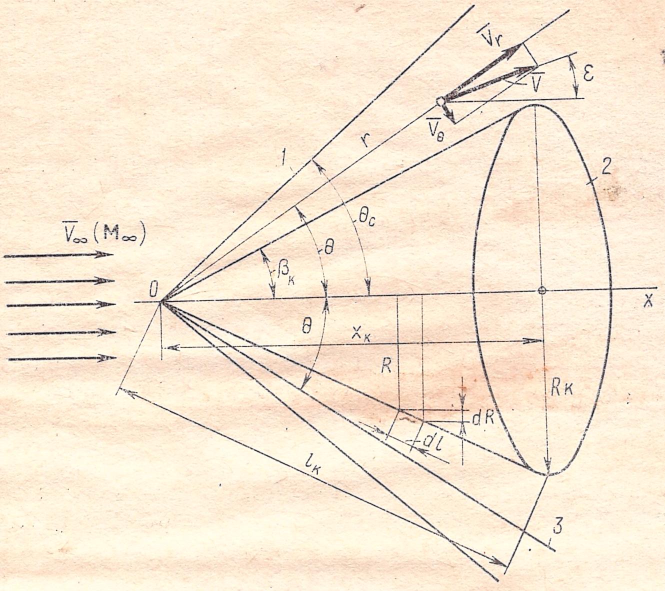


Рис. 9.1.1. Составляющие скорости на промежуточной конической поверхности:

1 — скачок уплотнения; *2* — обтекаемый конус; *3* — промежуточная коническая поверхность

терпевает физико-химические превращения. При этом будем считать, что в возмущенной области устанавливается термодинамическое равновесие.

Отыскиваемое решение для конуса должно соответствовать осесимметричному коническому полю возмущенного потока, в котором параметры газа сохраняются постоянными вдоль прямых, проведенных из вершины и являющихся образующими промежуточных конических поверхностей (в том числе конических поверхностей с углами $\theta = \theta_c$ и $\theta = \beta_к$).

На основании указанного свойства отыскиваемого решения любая частная производная от параметров газа по сферической координате r (рис. 9.1.1) равна нулю. В соответствии с этим уравнение неразрывности (2.4.37)*, в котором следует принять равными нулю частные производные по r, а также по ψ (двухмерное течение), будет иметь вид

---

* Ссылки на формулы, таблицы и рисунки гл. I—VIII даны по книге «Аэродинамика», ч. I, 1976.

$$2\varrho V_r + V_\theta \frac{d\varrho}{d\theta} + \varrho \frac{dV_\theta}{d\theta} + \varrho V_\theta \operatorname{ctg} \theta = 0. \tag{9.1.1}$$

Уравнения двухмерного движения около конуса, получаемые из системы (3.1.45), в которой принимаются равными нулю члены, характеризующие вязкость, а также частные производные по t и r, записываются в форме:

$$dV_r/d\theta = V_\theta; \tag{9.1.2}$$

$$\varrho V_\theta \frac{dV_\theta}{d\theta} + \varrho V_r V_\theta + \frac{dp}{d\theta} = 0. \tag{9.1.3}$$

В соответствии с числом определяемых параметров надо добавить к этим уравнениям уравнение

$$\frac{p}{p_c} = \frac{(\mu_{cp})_c}{\mu_{cp}} \cdot \frac{\varrho}{\varrho_c} \cdot \frac{T}{T_c}, \tag{9.1.4}$$

получаемое из уравнения состояния (1.5.8) для газа в произвольной точке потока и уравнения состояния $p_c = \varrho_c T_c R_0/(\mu_{cp})_0$, отнесенного к условиям непосредственно за скачком уплотнения (индекс «с»). В рассматриваемую систему должны войти также уравнения энергии (3.4.14)

$$i + V^2/2 = i_c + V_c^2/2 \tag{9.1.5}$$

и общие зависимости вида (4.2.8)—(4.2.11) для расчета энтальпии, энтропии, среднего молекулярного веса и скорости звука:

$$i = f_1(p, T); \tag{9.1.6}$$

$$S = f_2(p, T); \tag{9.1.7}$$

$$\mu_{cp} = f_3(p, T); \tag{9.1.8}$$

$$a = f_4(p, T). \tag{9.1.9}$$

В таком виде система может быть использована для исследования обтекания конуса диссоциирующим газом. В частном случае отсутствия диссоциации эта система упрощается. Если принять, что в возмущенной области между скачком уплотнения и поверхностью конуса удельные теплоемкости и средний молекулярный вес газа остаются такими же, как в невозмущенной части потока, а скорость звука и энтальпия зависят только от температуры, то вместо уравнений (9.1.6)—(9.1.9) следует воспользоваться зависимостями (4.3.1)—(4.3.4), которые представим в виде:

$$i = c_p T = \frac{c_p p}{R\varrho} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\varrho}; \tag{9.1.10}$$

$$S = c_v \ln \frac{T}{\varrho^{k-1}} + C_1 = c_v \ln \frac{p}{\varrho^k} + C_2; \tag{9.1.11}$$

$$\mu_{cp} = \text{const}; \tag{9.1.12}$$

$$a^2 = kRT = kp/\varrho. \tag{9.1.13}$$

Уравнения (9.1.1)—(9.1.3) остаются без изменения.

§ 9.2. ОБТЕКАНИЕ КОНУСА ПРИ ПОСТОЯННЫХ ТЕПЛОЕМКОСТЯХ

Для случая обтекания конуса при постоянных теплоемкостях получены результаты, имеющие важное практическое значение. Для приближенной оценки некоторых параметров обтекания (например давления) они могут использоваться и тогда, когда обтекание сопровождается значительным разогревом, вызывающим физико-химические превращения и, как следствие, изменение удельных теплоемкостей.

Для решения задачи воспользуемся уравнениями (9.1.1)—(9.1.3) и (9.1.10)—(9.1.13). При этом уравнение (9.1.3) будет удобнее применять, если произвести в нем некоторые преобразования. Для этой цели воспользуемся выражением для скорости звука $a^2 = dp/d\rho$, записанным в виде

$$\frac{dp}{d\theta} = a^2 \frac{d\rho}{d\theta}. \qquad (9.2.1)$$

После подстановки значения $dp/d\theta$ из (9.2.1) в (9.1.3) получим

$$\rho V_\theta \frac{dV_\theta}{d\theta} + \rho V_r V_\theta + a^2 \frac{d\rho}{d\theta} = 0.$$

Внося сюда значение производной $d\rho/d\theta$, вычисленное по (9.1.1), находим преобразованное уравнение

$$dV_\theta/d\theta = [-V_\theta \operatorname{ctg}\theta + V_r (V_\theta^2/a^2 - 2)](1 - V_\theta^2/a^2)^{-1}. \qquad (9.2.2)$$

Квадрат скорости звука в этом уравнении в соответствии с (3.6.21)

$$a^2 = \frac{k+1}{2} a^{*2} - \frac{k-1}{2} (V_r^2 + V_\theta^2). \qquad (9.2.3)$$

Рассматривая систему уравнений (9.1.2), (9.2.2), (9.2.3) видим, что задача об обтекании конуса сведена к кинематической задаче, связанной с определением поля скоростей в возмущенном потоке около конуса, т. е. с отысканием функций $V_r(\theta)$, $V_\theta(\theta)$ для составляющих скорости или функции $V(\theta) = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2}$ для полной скорости. По вычисленной полной скорости при помощи формул (9.1.4), (9.1.5), (9.1.10), (9.1.11) можно определить давление, плотность, температуру, энтальпию и энтропию газа. Вместо указанных формул для определения давления, плотности и температуры можно использовать соответственно соотношения (3.6.26), (3.6.31), (3.6.33).

Граничные условия, при которых ведется численное интегрирование дифференциальных уравнений (9.1.2), (9.2.2), определяются условиями течения газа на конусе, а также условиями, характеризующими параметры газа непосредственно за скачком уплотнения.

Граничное условие обтекания конуса заключается в том, что на его поверхности нормальная составляющая скорости равна нулю, т. е.

$$V_\theta = 0 \text{ при } \theta = \beta_к. \qquad (9.2.4)$$

Для скачка уплотнения имеем два условия. Первое из этих условий получается из равенства касательных составляющих скорости до и после скачка, т. е. $V_{cr\infty}=V_{cr}$ (рис. 9.2.1). В соответствии с этим

$$V_{cr}=V_{\infty}\cos\theta_{c}. \qquad (9.2.5)$$

Используя это выражение, можно получить второе условие. С этой целью напишем выражение для горизонтальной составляющей скорости U_c газа на скачке уплотнения (рис. 9.2.1.):

$$U_{c}=V_{cr}\cos\theta_{c}-V_{c\theta}\sin\theta_{c}.$$

Умножив обе части этого выражения на V_{cr} и учитывая (9.2.5), получим

$$U_{c}V_{\infty}=V_{cr}(V_{cr}-V_{c\theta}\operatorname{tg}\theta_{c}), \qquad (9.2.6)$$

где V_{cr} и $V_{c\theta}$ — соответственно касательная и нормальная составляющие скорости на скачке уплотнения.

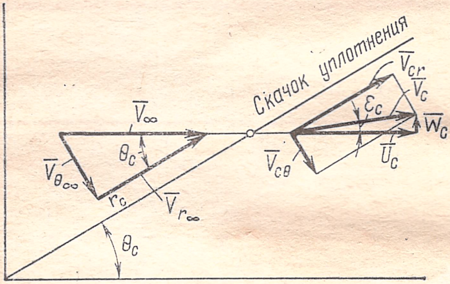


Рис. 9.2.1. Схема треугольников скоростей перед скачком уплотнения и непосредственно за ним в случае сверхзвукового обтекания конуса

Теперь воспользуемся уравнением (4.4.4) ударной поляры и напишем его в виде

$$\frac{W_{c}^{2}}{(V_{\infty}-U_{c})^{2}}=\frac{(V_{\infty}U_{c}-a^{*2})(k+1)}{2V_{\infty}^{2}+(k+1)(a^{*2}-V_{\infty}U_{c})},$$

где W_c — вертикальная составляющая скорости на скачке уплотнения.

Принимая во внимание (4.4.3), можно также написать

$$-\operatorname{tg}^{2}\theta_{c}=\frac{2}{k+1}\cdot\frac{V_{\infty}^{2}}{a^{*2}-V_{\infty}U_{c}}+1.$$

Учитывая, что $\operatorname{tg}^{2}\theta_{c}=\cos^{-2}\theta_{c}-1$, а значение $V_{\infty}U_{c}$ определяется из (9. 2. 6), находим

$$-\frac{1}{\cos^{2}\theta_{c}}=\frac{2}{k+1}\cdot\frac{V_{\infty}^{2}}{a^{*2}-V_{cr}^{2}+V_{c\theta}V_{cr}\operatorname{tg}\theta}.$$

Имея в виду (9.2.5), получим окончательно граничное условие на скачке уплотнения:

$$\operatorname{tg}\theta_{c}=\frac{1}{V_{cr}V_{c\theta}}\left(\frac{k-1}{k+1}V_{cr}^{2}-a^{*2}\right). \qquad (9.2.7)$$

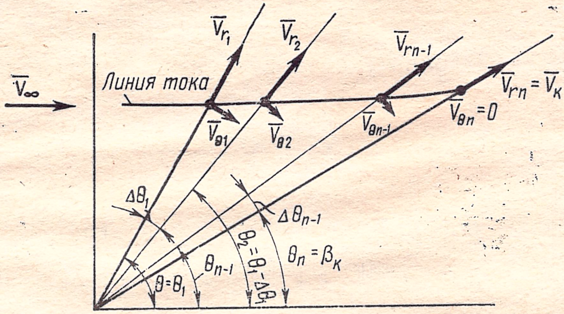
Систему уравнений (9.1.2), (9.2.2) и (9.2.3) интегрируют каким-либо численным методом. При этом обычно заданными считают величину угла скачка θ_c и скорость набегающего потока V_∞. В процессе решения уравнений определяют поле скоростей и находят соответствующий угол $\beta_к$ конуса и скорость на нем $V_r = V_к$.

Рассмотрим метод решения задачи. По заданным значениям θ_c и V_∞ находим из (9.2.5) радиальную составляющую скорости:

$$V_{cr\infty} = V_{cr} = V_\infty \cos\theta_c. \tag{9.2.8}$$

Эту скорость, одинаковую как для условий перед скачком, так и непосредственно за ним, обозначим через $V_{r1} = V_\infty \cos\theta_1$, где $\theta_1 = \theta_c$. По этому значению $V_{cr} = V_{r1}$ из (9.2.7) вычисляем нормальную составляющую скорости $V_{c\theta} = V_{\theta 1}$ за скачком:

$$V_{\theta 1} = \frac{1}{V_\infty \sin\theta_1}\left(\frac{k-1}{k+1} V_{r1}^2 - a^{*2}\right). \tag{9.2.9}$$



$\overline{V}_{r_1}$
$\overline{V}_{r_2}$
$\overline{V}_{rn-1}$
$\overline{V}_\infty$
Линия тока
$\overline{V}_{rn} = \overline{V}_К$
$\overline{V}_{\theta 1}$
$\overline{V}_{\theta 2}$
$\overline{V}_{\theta n-1}$
$\overline{V}_{\theta n} = 0$
$\Delta\theta_1$
$\Delta\theta_{n-1}$
$\theta_2 = \theta_1 - \Delta\theta_1$
$\theta_n = \beta_К$
θ_{n-1}
$\theta = \theta_1$

Рис. 9.2.2. Схема расчета обтекания конуса

Рассмотрим вблизи скачка промежуточную коническую поверхность с наклоном образующей $\theta_1 - \Delta\theta_1$, где $\Delta\theta_1$ — малое приращение угла θ (рис. 9.2.2).

Радиальную составляющую скорости V_{r2} на этой поверхности можно вычислить по уравнению (9.1.2), записанному в конечных разностях:

$$V_r - V_{r1} = V_{\theta 1}\Delta\theta. \tag{9.2.10}$$

Полагая здесь $V_r = V_{r2}$ и $\Delta\theta = \Delta\theta_1 = \theta_1 - \theta_2$, получим

$$V_{r2} = V_{r1} + V_{\theta_1}\Delta\theta_1. \tag{9.2.10$'$}$$

Нормальную составляющую $V_{\theta 2}$ определим из уравнения (9.2.2), записанного в конечных разностях:

$$V_\theta - V_{\theta 1} = (dV_\theta/d\theta)_1 \Delta\theta. \tag{9.2.11}$$

Полагая $V_\theta = V_{\theta 2}$ и $\Delta\theta = \Delta\theta_1$, найдем

$$V_{\theta 2} = V_{\theta 1} + (dV_\theta/d\theta)_1 \Delta\theta_1, \tag{9.2.11$'$}$$

где производная $(dV_\theta/d\theta)_1$ вычисляется из (9.2.2) по параметрам на скачке:

$$\left(\frac{dV_\theta}{d\theta}\right)_1 = \left[-V_{\theta 1}\operatorname{ctg}\theta_1 + V_{r1}\left(\frac{V_{\theta 1}^2}{a_1^2} - 2\right)\right]\left(1 - \frac{V_{\theta 1}^2}{a_1^2}\right)^{-1}, \tag{9.2.12}$$

причем согласно (9.2.3)

$$a_1^2 = a_c^2 = \frac{k+1}{2} a^{*2} - \frac{k-1}{2} (V_{r1}^2 + V_{\theta 1}^2). \qquad (9.2.13)$$

Принимая за исходные полученные значения V_{r2}, $V_{\theta 2}$, а также значение $a^2{}_2$, определенное по (9.2.3) в виде

$$a_2^2 = \frac{k+1}{2} a^{*2} - \frac{k-1}{2} (V_{r2}^2 + V_{\theta 2}^2),$$

можно аналогичным способом найти параметры V_{r3}, $V_{\theta 3}$, a_3 на следующей промежуточной поверхности с углом наклона образующей

$$\theta_3 = \theta_2 - \Delta\theta_2 = \theta_1 - \sum_{1}^{i=2} \Delta\theta_i.$$

Для произвольной конической поверхности с углом наклона образующей

$$\theta_m = \theta_1 - \sum_{1}^{i=m-1} \Delta\theta_i \qquad (9.2.14)$$

составляющие скорости вычисляют по формулам:

$$V_{rm} = V_{rm-1} + V_{\theta m-1} \Delta\theta_{m-1}; \qquad (9.2.15)$$

$$V_{\theta m} = V_{\theta m-1} + (dV_\theta/d\theta)_{m-1} \Delta\theta_{m-1}, \qquad (9.2.16)$$

где производную $(dV_\theta/d\theta)_{m-1}$ находят из (9.2.2) по параметрам $V_{\theta m-1}$, V_{rm-1}, a_{m-1} и $\theta_{m-1} = \theta_{m-2} - \Delta\theta_{m-2}$. Вычисления заканчивают, когда для некоторого значения угла промежуточного конуса (рис. 9.2.2)

$$\theta_n = \theta_{n-1} - \Delta\theta_{n-1} = \theta_1 - \sum_{1}^{i=n-1} \Delta\theta_i \qquad (9.2.17)$$

нормальная составляющая скорости обратится в нуль, т. е.

$$V_{\theta n} = V_{\theta n-1} + (dV_\theta/d\theta)_{n-1} \Delta\theta_{n-1} = 0. \qquad (9.2.18)$$

Здесь производную $(dV_\theta/d\theta)_{n-1}$ находят из (9.2.2) по значениям $V_{\theta n-1}$, V_{rn-1}, a_{n-1} на соседней промежуточной конической поверхности с углом наклона образующей

$$\theta_{n-1} = \theta_1 - \sum_{1}^{i=n-2} \Delta\theta_i. \qquad (9.2.19)$$

В процессе вычислений, как правило, не удается в первом же приближении выбрать такой малый угол $\Delta\theta_{n-1}$, чтобы удовлетворялось равенство $V_{\theta n} = 0$. Обычно выбранному значению $\Delta\theta_{n-1}$ соответствует вычисленная величина $V_{\theta n}$, меняющая свой знак на противоположный по сравнению со знаком $V_{\theta n}$ на соседней поверхности с углом наклона образующей θ_{n-1}. Это указывает на то, что значению $V_{\theta n}=0$ соответствует приращение угла $\Delta\theta_{n-1}$, меньшее выбранного. Для определения этого приращения надо провести интерполирование, воспользовавшись равенством

$$\Delta\theta_{n-1}=-V_{\theta n-1}\left(\frac{dV_\theta}{d\theta}\right)^{-1}_{n-1}. \qquad (9.2.18')$$

По значению $\Delta\theta_{n-1}$ вычисляют скорость на конусе

$$V_{r\text{к}}=V_{\text{к}}=V_{rn-1}+V_{\theta n-1}\Delta\theta_{n-1} \qquad (9.2.20)$$

и угол

$$\theta_n=\beta_{\text{к}}=\theta_1-\sum_{1}^{i=n-1}\Delta\theta_i. \qquad (9.2.21)$$

Аналогичные расчеты можно производить в обратном порядке, задавшись условиями на конусе, причем надо знать угол $\beta_{\text{к}}$ и скорость на конусе $V_{\text{к}}$. Когда будут удовлетворены граничные условия (9.2.5) и (9.2.7), численное интегрирование заканчивают. В результате находят параметры газа в возмущенной области, а также угол наклона скачка, возникающего перед заданным конусом, и скорость (число Маха) набегающего потока.

Каждая операция численного интегрирования при заданных величинах θ_c, V_∞ (или $\beta_{\text{к}}$, $V_{\text{к}}$) дает возможность определить поле скоростей, т. е. найти вид функции $V=V(\theta)$, где $V=\sqrt{V_r^2+V_\theta^2}$, и установить соответствие между данным углом конуса $\beta_{\text{к}}$ и скоростью на нем $V_{\text{к}}$, с одной стороны, и углом скачка θ_c и скоростью V_∞ — с другой.

Повторяя расчеты при различных заданных углах θ_c и фиксированной величине скорости V_∞, можно найти зависимости вида $\beta_{\text{к}}=\beta_{\text{к}}(\theta_c)$, $V_{\text{к}}=V_{\text{к}}(\beta_{\text{к}})$ или $V_{\text{к}}=V_{\text{к}}(\theta_c)$. Полученные результаты могут быть представлены графически в плоскости годографа W, U в виде так называемой «яблоковидной» кривой (рис. 9.2.3, *а*). Эта кривая — геометрическое место концов векторов скорости $\overline{V}_{\text{к}}$ возмущенного потока непосредственно на обтекаемом конусе. Точка A, расположенная на «яблоковидной» кривой и принадлежащая концу вектора скорости, соответствует конусу с заданным углом полураствора $\beta_{\text{к}}$; точка B, находящаяся на ударной поляре, совпадает с концом вектора скорости $\overline{V}_{cr}$ на соответствующем скачке уплотнения с углом θ_c.

Кривая $\overline{AB}$ — годограф скорости, т. е. геометрическое место концов векторов скорости в возмущенной области течения между конусом и скачком уплотнения. При построении годографа следует поступить следующим образом. Из рис. 9.1.1 по треугольнику скоростей определим для промежуточной конической поверхности составляющие скорости:

$$V_r=V\cos(\theta-\varepsilon);\quad V_\theta=-V\sin(\theta-\varepsilon). \qquad (9.2.22)$$

В процессе численного интегрирования по найденным значениям V_r и V_θ для заданных углов θ определяют отношение

$$V_r/V_\theta = -\mathrm{ctg}\,(\theta - \varepsilon), \tag{9.2.23}$$

по которому подсчитывают угол ε наклона вектора скорости $\overline{V}$ к оси конуса. Полярные координаты V и ε определяют положение точек годографа скорости (см. точку C на рис. 9.2.3, *а*).

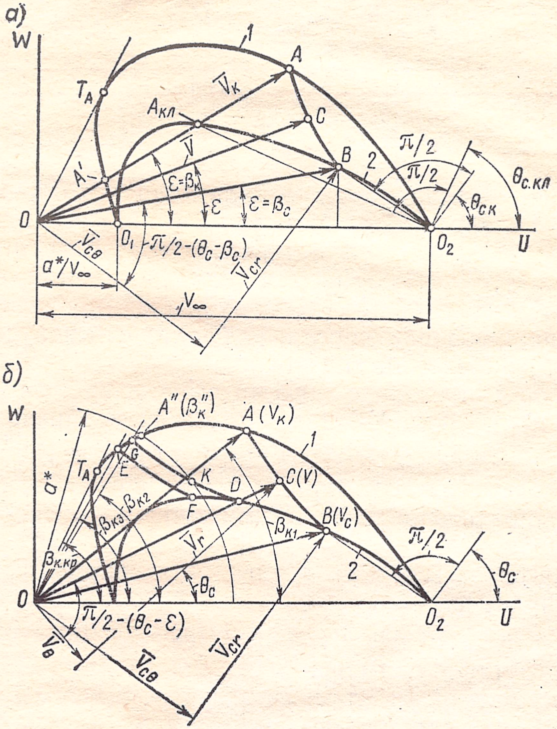

а)
W
1
A
T_A
$\overline{V}_K$
$A_{кл}$
C
$\overline{V}$
A'
B
2
π/2
π/2
$\theta_{с.кл}$
$\varepsilon=\beta_K$
ε
$\varepsilon=\beta_c$
$\theta_{ск}$
0
O_1
π/2-(θc-βc)
O_2
U
$\overline{V}_{c\theta}$
a^*/V_∞
$\overline{V}_{cr}$
V_∞
б)
W
A''(β''к)
A(Vк)
1
G
T_A
E
K
D
C(V)
a*
F
β_{K3}
β_{K2}
$\overline{V}_r$
β_{K1}
B(Vc)
$\beta_{к.кр}$
π/2
2
θ_c
θ_c
0
π/2-(θc-ε)
O_2
U
$\overline{V}_\theta$
$\overline{V}_{c\theta}$
$\overline{V}_{cr}$

Рис. 9.2.3. «Яблоковидная» кривая (*1*) и ударная поляра (*2*)

Изложенный графический метод решения задачи о сверхзвуковом обтекании круглого конуса принадлежит проф. А. Буземану.

При помощи «яблоковидной» кривой и семейства годографов скорости можно наглядно объяснить физическую картину обтекания конуса сверхзвуковым газовым потоком. В области между скачком и конусом вдоль линий тока происходит постепенное изэнтропическое сжатие газа. На рис. 9.2.3, *а* этому соответствует перемещение из точки *B* на ударной поляре вдоль годографа скорости в точку *A* на «яблоковидной» кривой. Линии тока, как видно из рис. 9.2.2, постепенно искривляются и приближаются к поверхности конуса, принимая направление образующей.

Проведем из точки O, как из центра, дугу радиуса a^* (рис. 9.2.3, *б*). Если годограф скорости AB для заданного угла $\beta_{к1}$ конуса расположен справа от дуги, то изэнтропическое сжатие за ударной волной происходит при сверхзвуковых скоростях. Для некоторого угла конуса $\beta_{к2} > \beta_{к1}$ часть годографа GK может оказаться левее дуги, а часть KD — правее. Таким образом, возмущенное течение будет смешанным. В области, примыкающей к скачку уплотнения, течение будет сверхзвуковым, а вблизи поверхности конуса — дозвуковым. Для еще большего угла конуса $\beta_{к3} > \beta_{к2}$ годограф скорости EF располагается левее дуги a^*, и, следовательно, возмущенный поток будет полностью дозвуковым.

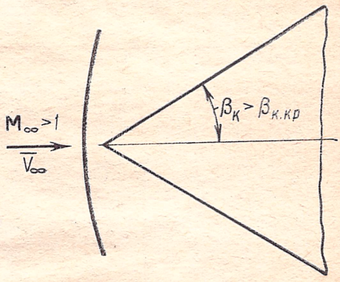


Рис. 9.2.4. Сверхкритическое обтекание конуса

Анализ «яблоковидной» кривой показывает, что каждому углу конуса $\beta_к$ соответствуют теоретически два решения (см. на рис. 9.2.3, *а* точки A и A' пересечения прямой AO с «яблоковидной» кривой). Одно решение дает меньшую скорость и бо́льший угол наклона скачка, а другое — бо́льшую скорость и меньший угол наклона скачка. Как показывают экспериментальные исследования, реально второе решение, соответствующее устойчивому потоку за скачком уплотнения.

Можно указать точку T_A, в которой луч, проведенный из начала координат, касается «яблоковидной» кривой. Эта точка соответствует теоретически единственному решению и определяет критический угол конуса $\beta_{к.кр}$. Если действительный угол конуса больше критического, то при помощи этой кривой формально нельзя исследовать обтекание конуса. В реальных условиях это обтекание характеризуется тем, что скачок отходит от острия и искривляется (рис. 9.2.4). Такое обтекание называют сверхкритическим. Нетрудно заметить, что критический угол является функцией только скорости набегающего потока (соответственно числа $\mathbf{M}_\infty = V_\infty / a_\infty$ или относительной скорости $\lambda_\infty = V_\infty / a^*$).

Согласно экспериментальным данным, скачок уплотнения отходит от вершины при углах $\beta_к$, несколько бо́льших тех, которые определяются точной теорией обтекания конуса. Так, для числа $\mathbf{M}_\infty = 2{,}45$ экспериментально найдено, что отход скачка уплотнения происходит при угле $\beta_к = 46°$, в то время как вычисленное по теории значение $\beta_к = 45°46'$.

Экспериментальные исследования показывают, что коническое течение, соответствующее постоянной скорости на конусе, сохраняется до тех пор, пока на его поверхности не достигается скорость звука. Соответствующий угол конуса $\beta''_к$ может определяться по точке A'' пересечения дуги радиуса a^* и «яблоковидной» кривой (см. рис. 9.2.3, *б*). Таким образом, в практических случаях пользоваться «яблоковидной» кривой при расчете обтекания всей конической поверхности можно для углов $\beta_\text{к} \leqslant \beta''_\text{к}$. Что касается непосредственно конической вершины, то скорость на ней, найденная конической теорией (при помощи «яблоковидной» кривой), хорошо согласуется с экспериментальными данными для всех значений углов $\beta_\text{к} \leqslant \beta_\text{к.кр}$, т. е. для тех условий обтекания, при которых скачок остается еще присоединенным.

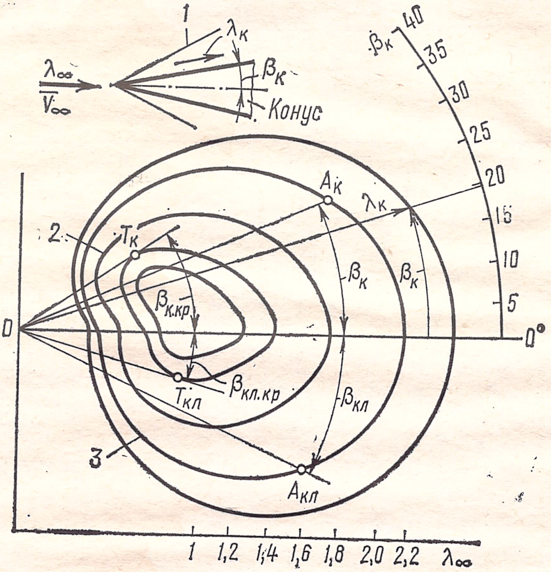


Рис. 9.2.5. Семейство «яблоковидных» кривых и ударных поляр:

1 — скачок уплотнения; *2* — семейство «яблоковидных» кривых; *3* — семейство ударных поляр

«Яблоковидная» кривая показывает зависимость скорости $V_\text{к}$ на конусе и угла скачка θ_c от угла конуса $\beta_\text{к}$ при данной скорости набегающего потока V_∞ (при заданных числах $\mathbf{M}_\infty$ или λ_∞). Чтобы получить подобную зависимость для другой скорости V_∞ ($\mathbf{M}_\infty$ или λ_∞), надо произвести численные расчеты обтекания конуса и построить соответствующую «яблоковидную» кривую для новых условий обтекания. Семейство таких кривых представляет зависимость для скорости на конусе и угла скачка от угла конуса $\beta_\text{к}$ и скорости V_∞ ($\mathbf{M}_\infty$ или λ_∞). На рис. 9.2.5 показано семейство «яблоковидных» кривых, построенных для различных значений относительной скорости $\lambda_\infty = V_\infty / a^*$. На этом же рисунке построены соответствующие ударные поляры, что позволяет сравнить обтекание клина с таким же углом полураствора $\beta_\text{к}$, как и у конуса.

Из рис. 9.2.5 видно, что скорость на конусе больше, чем на клине ($\overline{OA}_\text{к} > \overline{OA}_\text{кл}$). Для клина на косом скачке происходит поворот потока на угол клина $\beta_c=\beta_{\text{кл}}$. В то же время для конуса поворот на скачке происходит под меньшим углом: $\beta_c<\beta_{\text{к}}$. Следовательно, угол $\theta_{\text{с.кл}}$ наклона головной ударной волны перед клином больше, чем угол $\theta_{\text{с.к}}$ перед конусом.

Этот же результат можно непосредствоенно получить из рис. 9.2.3, *а*. Соединим точки $A_{\text{кл}}$ и B с точкой O_2 и восстановим из этой точки перпендикуляры к полученным прямым. Тогда углы между перепендикулярами и горизонтальной осью U определят наклон образующих скачков перед клином $\theta_{\text{с.кл}}$ и конусом $\theta_{\text{с.к}}$. Непосредственно из рисунка видно, что $\theta_{\text{с.кл}}>\theta_{\text{с.к}}$. В соответствии с этим результатом угол наклона скачка перед конусом (такой же, как перед клином), за которым происходит поворот потока на критический угол, достигается при бóльшем, чем у клина, угле полураствора. Таким образом, критический угол конуса больше, чем клина с тем же углом полураствора (см. также рис. 9.2.5). Это объясняется тем, что в отличие от «плоского» движения газа около клина течение в окрестности конуса имеет пространственный характер, обеспечивающий газу более плавное изменение направления движения.

При расчете обтекания конуса важным является определение давления, плотности и температуры по найденным значениям $V_{\text{к}}$ и θ_c. Принимая во внимание изэнтропический характер за скачком уплотнения, воспользуемся соответствующими зависимостями (3.6.26)—(3.6.33). Учитывая, что в формуле (3.6.33) температура T_0 не изменяется за скачком уплотнения и определяется из (3.6.35), найдем следующую формулу для температуры на конусе:

$$\frac{T_{\text{к}}}{T_\infty}=(1-\overline{V}_{\text{к}}^2)\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\right), \qquad (9.2.24)$$

где $\overline{V}_{\text{к}}=V_{\text{к}}/V_{\max}$.

В формуле (3.6.26) давление торможения необходимо вычислить с учетом потерь в скачке уплотнения. Обозначая величину этого давления через p_0' и вводя параметр $\nu_0=p_0'/p_0$, вычисляемый по давлению торможения p_0 перед скачком по (3.6.29), получим для давления на конусе

$$\frac{p_{\text{к}}}{p_\infty}=\nu_0\left[(1-\overline{V}_{\text{к}}^2)\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\right)\right]^{k/(k-1)}. \qquad (9.2.25)$$

Параметр $\nu_0=p_0'/p_0$ определяется в зависимости от числа $\mathbf{M}_\infty$ и угла θ_c скачка перед конусом при помощи (4.3.21) и (4.3.22) следующим образом:

$$\nu_0=[(1+\delta)\mathbf{M}_\infty^2\sin^2\theta_c-\delta]^{\frac{\delta-1}{2\delta}}\left[\frac{\mathbf{M}_\infty^2\sin^2\theta_c}{(1-\delta)\left(1+\frac{\delta}{1-\delta}\mathbf{M}_\infty^2\sin^2\theta_c\right)}\right]^{\frac{1+\delta}{2\delta}}. \qquad (9.2.26)$$

По уравнению состояния вычисляем отношение плотностей:

$$\varrho_{\text{к}}/\varrho_\infty=(p_{\text{к}}/p_\infty)(T_\infty/T_{\text{к}}). \qquad (9.2.27)$$

По абсолютной величине $p_к$ определяют коэффициент давления на конусе:

$$\overline{p}_к=(p_к-p_\infty)/q_\infty=2(p_к-p_\infty)/(k\mathbf{M}^2_\infty p_\infty). \qquad (9.2.28)$$

Силу сопротивления, обусловленную действием давления (волновое сопротивление), определяют при помощи зависимости (1.3.2). Приняв в ней $\overline{p}=\overline{p}_к$, $c_{fx}=0$, $S_п=S_{мид}=\pi R^2_к$, $dS=2\pi R dl$, $\cos(\widehat{nx})=\sin\beta_к$ (см. рис. 9.1.1), получим

$$X_в=q_\infty S_{мид}\int\limits_0^{l_к}\overline{p}_к\sin\beta_к\frac{2\pi R dl}{\pi R^2_к}.$$

Учитывая, что $dl\sin\beta_к=dR$, найдем следующее выражение для коэффициента сопротивления:

$$c_{x\,в}=\frac{X_в}{q_\infty S_{мид}}=2\int\limits_0^1\overline{p}_к\overline{R}d\overline{R}, \qquad (9.2.29)$$

где $\overline{R}=R/R_к$.

Так как на конусе коэффициент давления $\overline{p}_к$ при сверхзвуковом обтекании — величина постоянная, найдем для коэффициентов волнового сопротивления

$$c_{x\,в}=\overline{p}_к. \qquad (9.2.30)$$

Таким образом, коэффициент волнового сопротивления конуса при осесимметричном сверхзвуковом обтекании равен коэффициенту давления на его поверхности. В результате обработки данных точной теории может быть рекомендована следующая приближенная формула для расчета коэффициента волнового сопротивления (или коэффициента давления) при таком обтекании [9]:

$$c_{x\,в}=\overline{p}_к=2\cdot10^{-3}(0{,}8+\mathbf{M}^{-2}_\infty)\beta^{1,7}_к, \qquad (9.2.31)$$

где $\beta_к$ — угол конуса, *град*. Расчет по этой формуле можно вести до значений $\beta_к\leqslant50°$ и $\mathbf{M}_\infty=7\div8$. Нижний предел числа $\mathbf{M}_\infty$ соответствует критическому значению угла конуса $\beta_{к.кр}$, при котором скачок остается еще присоединенным. Для расчета угла наклона скачка перед острым конусом можно использовать приближенную зависимость [8]

$$\mathbf{M}_\infty\sin\theta_c=1-\cos\beta_к+\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}^2_\infty\sin^2\beta_к\right)^{1/2}. \qquad (9.2.32)$$

Удовлетворительные результаты по этой зависимости получают при таких значениях $\beta_к$ и $\mathbf{M}_\infty$, которые допустимы в случае расчета по формуле (9.2.31). Погрешность возрастает при больших значениях $\beta_к$ и $\mathbf{M}_\infty$, когда значительным становится влияние диссоциации ($\mathbf{M}_\infty>10$, $\beta_к>30\div40°$).

§ 9.3. ВЛИЯНИЕ РАВНОВЕСНОЙ ДИССОЦИАЦИИ И ИОНИЗАЦИИ ГАЗА НА ОБТЕКАНИЕ КОНУСА

Для решения задачи об обтекании конуса с учетом влияния равновесной диссоциации и ионизации используют систему, включающую дифференциальные уравнения (9.1.2), (9.2.2), уравнения состояния (9.1.4) и энергии (9.1.5), а также общие зависимости (9.1.6)—(9.1.9) для определения энтальпии, энтропии, среднего молекулярного веса и скорости звука в диссоциирующем и ионизирующем газе. При этом общая схема численного интегрирования дифференциальных уравнений такая же, как и в случае постоянных теплоемкостей.

Расчет начинают с определения за косым скачком уплотнения параметров газа по заданному углу θ_c. Радиальную составляющую скорости V_{cr} определяют по (9.2.8), нормальную составляющую скорости $V_{c\theta}$ — по теории скачка уплотнения, учитывающей влияние диссоциации и ионизации (см. § 4.2). Примем в первом приближении значение (4.2.12)

$$\Delta\overline{V}_n^{(1)}=(V_{n1}-V_{n2})/V_{n1}=(V_{\theta\infty}-V_{c\theta})/V_{\theta\infty} \qquad (9.3.1)$$

равным единице, т. е. рассмотрим условие полного торможения за скачком, при котором $V_{c\theta}\approx 0$. Соответствующее этим условиям давление находим из формулы (4.2.15). Полагая в ней $\Delta\overline{V}_n=1$ и учитывая, что $\mathbf{M}_{n1}=\mathbf{M}_\infty \sin\theta_c$, получим

$$p_c^{(1)}=(1+k_1\mathbf{M}_\infty^2\sin^2\theta_c)\,p_\infty. \qquad (9.3.2)$$

По выражению (4.2.16), в котором полагаем $\Delta\overline{V}_n=1$ и $V_{n1}=V_\infty\sin\theta_c$, вычисляем энтальпию:

$$i_c^{(1)}=i_\infty+V_\infty^2\sin^2\theta_c/2. \qquad (9.3.3)$$

По значениям $p_c^{(1)}$ и $i_c^{(1)}$ можно найти плотность $\varrho_c^{(1)}$, используя графики термодинамических функций воздуха [7, 20], а затем во втором приближении определить по (4.2.21) изменение относительной скорости:

$$\Delta\overline{V}_n^{(2)}=1-\varrho_\infty/\varrho_c^{(1)}. \qquad (9.3.4)$$

По этому приращению скорости уточняем давление

$$p_c^{(2)}=p_\infty(1+k_1\mathbf{M}_\infty^2\sin^2\theta_c\Delta\overline{V}_n^{(2)}) \qquad (9.3.5)$$

и энтальпию

$$i_c^{(2)}=i_\infty\left[1+\frac{V_\infty^2\sin^2\theta_c}{2}\cdot\frac{\Delta\overline{V}_n^2}{i_1}(2-\Delta\overline{V}_n^{(2)})\right]. \qquad (9.3.6)$$

Используя графики термодинамических функций, находим плотность $\varrho_c^{(2)}$ и уточняем величину $\Delta\overline{V}_n^{(3)}$:

$$\Delta\overline{V}_n^{(3)}=1-\varrho_\infty/\varrho_c^{(2)}. \qquad (9.3.7)$$

Если величина $\Delta\overline{V}_n^{(3)}$ мало отличается от значения $\Delta\overline{V}_n^{(2)}$, то приближения заканчивают и определяют нормальную составляющую скорости после скачка:

$$V_{c\theta}=V_{\theta 1}=V_{\theta\infty}\left(1-\Delta\overline{V}_n^{(3)}\right)=V_\infty\sin\theta_c\left(1-\Delta\overline{V}_n^{(3)}\right). \qquad (9.3.8)$$

Для расчета можно использовать также таблицы, приведенные в [21]. Из этих таблиц по значениям $p_c^{(1)}$ и $i_c^{(1)}$ (в таблицах энтальпия обозначена через h, $м^2/с^2$) можно определить температуру $T_c^{(1)}$ и средний молекулярный вес воздуха $(\mu_{ср})_c^{(1)}$ и далее из (4.2.17) вычислить соответствующую плотность:

$$\varrho_c^{(1)}=\frac{p_c^{(1)}}{p_\infty}\cdot\frac{(\mu_{ср})_c^{(1)}}{(\mu_{ср})_\infty}\cdot\frac{T_\infty}{T_c^{(1)}}\varrho_\infty, \qquad (9.3.9)$$

где для недиссоциированного воздуха можно принять $(\mu_{ср})_\infty=29$ *г/(г·моль)*.

Далее по формулам (9.3.4)—(9.3.6) вычисляют $p_c^{(2)}$, $i_c^{(2)}$, из таблиц находят $T_c^{(2)}$, $(\mu_{ср})_c^{(2)}$, а по выражению (9.3.9) определяют величину

$$\rho_c^{(2)}=\frac{p_c^{(2)}}{p_\infty}\cdot\frac{(\mu_{ср})_c^{(2)}}{(\mu_{ср})_\infty}\cdot\frac{T_\infty}{T_c^{(2)}}\varrho_\infty. \qquad (9.3.9')$$

По значению $\varrho_c^{(2)}$ в формуле (9.3.7) находят $\Delta\overline{V}_n^{(3)}$, а из выражения (9.3.8) определяют $V_{c\theta}=V_{\theta 1}$.

Для заданного шага интегрирования $\Delta\theta_1$ вычисляют на соседней конической поверхности V_{r2} по (9.2.10′), а $V_{\theta 2}$ — по (9.2.11′). Причем в формуле (9.2.11′) производную $(dV_\theta/d\theta)_1$ определяют по выражению (9.2.12), в котором скорость звука a_1 находят из таблиц или графиков термодинамических функций по известным значениям $p_c^{(2)}$ и $i_c^{(2)}$ (или по $p_c^{(2)}$ и $T_c^{(2)}$).

На выбранной конической поверхности по уравнению (9.1.5) определяют энтальпию:

$$i_2=i_c^{(3)}+\left[V_{r1}^2+V_{\theta 1}^2-\left(V_{r2}^2+V_{\theta 2}^2\right)\right]/2. \qquad (9.3.10)$$

Для дальнейших расчетов следует воспользоваться значением энтропии газа, полагая, что возмущенный поток за скачком уплотнения во всей области изэнтропический и, следовательно, энтропия всюду будет такой, как в потоке газа непосредственно за скачком. Эту энтропию $S=S_c=\mathrm{const}$ определяют из таблиц термодинамических функций по значениям $p_c^{(2)}$, $i_c^{(2)}$ (или $p_c^{(2)}$, $T_c^{(2)}$).

По энтальпии i_2 и энтропии S из таблиц или графиков можно найти скорость звука a_2, а по формулам (9.2.10′), (9.2.11′) вычислить соответственно составляющие скорости V_{r3} и $V_{\theta 3}$ на конической поверхности с углом $\theta = \theta_c - \sum_{i=1}^{2} \Delta\theta_i$. Аналогично рассчитывают параметры потока для соседних промежуточных конических поверхностей. Вычисления заканчивают, когда на одной из таких поверхностей нормальная составляющая скорости $V_{\theta n}$ окажется равной нулю. Соответствующий угол (9.2.21) будет углом обтекаемого конуса, а скорость — скоростью $V_к$ (9.2.20) на этом конусе. Соответствующая энтальпия

$$i_к = i_c + (V_c^2 - V_к^2)/2,$$

где

$$V_c^2 = V_{\theta 1}^2 + V_{r1}^2;\ i_c = i_c^{(2)}.$$

По энтальпии $i_к$ и энтропии $S = S_c$ можно из таблиц, графиков или по соответствующим формулам определить на конусе температуру $T_к$, давление $p_к$ и плотность $\rho_к$.

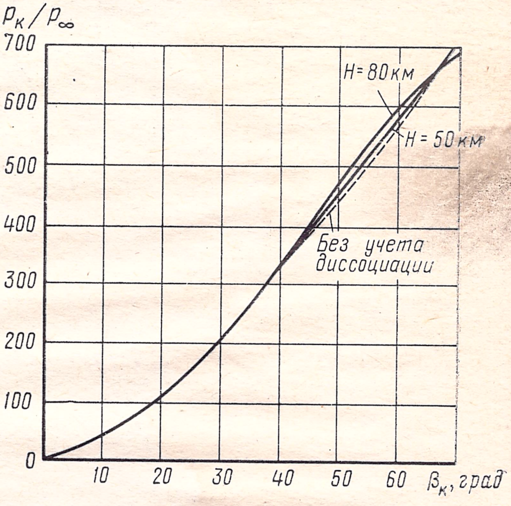


Рис. 9.3.1. Давление на конусе с учетом диссоциации обтекающего газа ($T_\infty = 220$ К, $\mathbf{M}_\infty = 23{,}5$)

Все параметры на конусе, обтекаемом потоком с заданным числом $\mathbf{M}_\infty$, зависят не только от температуры T_∞, что было характерно для случая переменных теплоемкостей, но и от давления p_∞ набегающего потока, от которого зависят степени диссоциации и ионизации. Вместо p_∞ в качестве функции, определяющей изменение параметров газа на конической поверхности, можно выбрать при заданных параметрах $\beta_к$, $\mathbf{M}_\infty$ и T_∞ высоту полета H. При значениях T_∞ и $\mathbf{M}_\infty$ параметры обтекания на конусе — функции угла $\beta_к$ и высоты полета H.

Обработка результатов расчета параметров обтекания конуса указанным методом, а также экспериментальных данных позволила получить приближенные соотношения для коэффициента давления $\bar{p}_к$, относительной плотности $\bar{\rho} = \rho_\infty/\rho_к$ и угла наклона скачка θ_c [10]:

$$\bar{p}_к = 2\sin^2\beta_к\left[(1 - 0{,}25\bar{\rho})\cos^2(\theta_c - \beta_к)\right]^{-1}; \qquad (9.3.11)$$

$$\bar{\rho} = 2\left\{1 - (2\operatorname{tg}\beta_к/\operatorname{tg}\theta_c)\left[1 + \sqrt{1 - 2\bar{\rho}\operatorname{tg}^2\beta_к/(1 - 0{,}5\bar{\rho})^2}\right]^{-1}\right\}; \qquad (9.3.12)$$

$$10^2\,\mathbf{M}_\infty\sin\theta_c = 39 - \lg p_\infty + 0{,}5\,(206 + \lg p_\infty)\,\mathbf{M}_\infty\sin\beta_к, \qquad (9.3.13)$$

где p_∞ — атмосферное давление, *кГ/см²*.

Приведенные соотношения дают удовлетворительные результаты для значений $\bar{\rho} \approx 0{,}1$ и меньше. Расчеты при помощи этих соотношений не требуют применения таблиц термодинамических функций. По известным значениям $\mathbf{M}_\infty$, $\beta_к$, ϑ_∞, используя (9.3.13), определяют вначале θ_c, затем при помощи (9.3.12) подсчитывают величину $\bar{\rho}$, а по (9.3.11) — коэффициент давления.

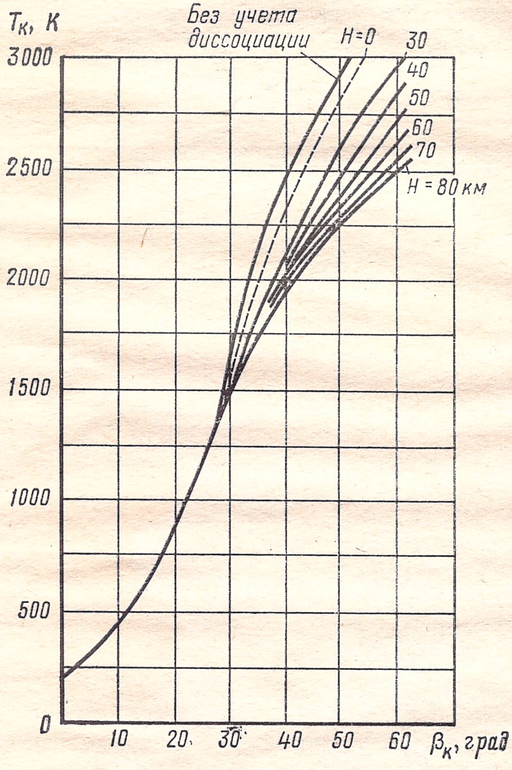


Рис. 9.3.2. Температура на конусе с учетом диссоциации обтекающего газа
($T_\infty = 220$ K, $\mathbf{M}_\infty = 10$)

Для определения температуры $T_к$ необходимо воспользоваться уравнением состояния (1.5.8). Относя одно из них к течению газа на конусе, а другое — к условиям в набегающем потоке, найдем

$$T_к = \underbrace{\left(\frac{k\mathbf{M}_\infty^2}{2}\,\bar{p}_к + 1\right)\frac{\bar{\rho}T_\infty}{(\mu_{ср})_\infty}}_{a}(\mu_{ср})_к = a\,(\mu_{ср})_к. \qquad (9.3.14)$$

По (9.3.14) и найденным значениям $\bar{p}_к$, $\bar{\rho}$ вычисляют $T_к = a(\mu_{ср})_к$, а при помощи графика функции $(\mu_{ср})_к = f_3(p_к, T_к)$ (см. рис. 1.5.7) подбором находят соответствующую величину $T_к$.

Некоторые результаты расчета параметров на конусе приведены на рис. 9.3.1—9.3.3. Характер изменения давления $p_к$, температуры $T_к$ и плотности $\rho_к$ на конусе при наличии диссоциации и ионизации тот же, что и непосредственно за скачком уплотнения. При этом давление, как и за скачком, мало зависит от диссоциации и ионизации. Его величина зависит в основном от условий набегающего потока, причем максимальное избыточное давление на конусе не может превысить некоторой предельной величины этого давления p_2-p_1, получаемой из (4.2.14) при условии $V_{n2}=0$, $V_{n1}=V_1=V_\infty$ (прямой скачок уплотнения) и равной $p_2-p_1=\rho_\infty V_\infty^2$. В то же время температура и плотность меняются существенно, при этом изменение тем больше, чем толще конус.

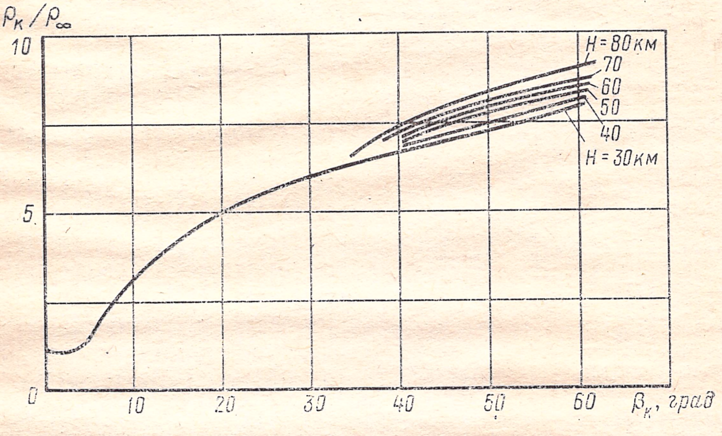


Рис. 9.3.3. Плотность на конусе, обтекаемом диссоциирующим потоком
($T_\infty=220$ К, $M_\infty=10$)

Если углы конуса невелики, то даже при значительных скоростях обтекания эти параметры на конусе испытывают небольшое влияние физико-химических превращений. Расчеты показывают, что при $M_\infty=24$ плотность почти не меняется с высотой вплоть до углов $\beta_к=15°$, а при $M_\infty=10$ (рис. 9.3.3) — до углов $\beta_к=35°$. Таким образом, интервал углов $\beta_к$, которому соответствуют сравнительно невысокие температуры и пречебрежимо малая степень диссоциации, расширяется с уменьшением скорости. Такое же явление наблюдается с уменьшением высоты полета.

Утолщение конуса вызывает более интенсивный нагрев и, как следствие, диссоциацию и ионизацию, которые могут существенно влиять на параметры обтекания. На рис. 9.3.4 показано это влияние на изменение угла наклона θ_c скачка перед конусом с углом $\beta_к=40°$. Угол θ_c уменьшается по сравнению с тем, что наблюдалось при постоянных теплоемкостях ($k=1{,}4$). Это вызывает снижение интенсивности скачка уплотнения и увеличение скорости за ним, что влечет за собой рост скорости на обтекаемом конусе.

Рост скорости потока и уменьшение скорости звука приводят к увеличению числа $\mathbf{M}_к$ на конической поверхности, расположенной в диссоциированном газе.

Увеличение местного числа Маха должно вызвать снижение давления. Вместе с тем оно становится больше в результате увеличения числа частиц газа при диссоциации и, следовательно, большего количества их соударений. Суммарный эффект проявляется в возрастании давления, хотя и незначительном (см. рис. 9.3.1).

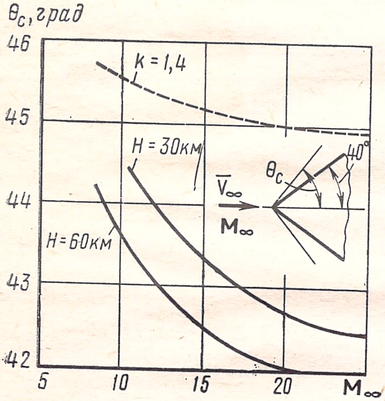


Рис. 9.3.4. Изменение угла наклона скачка уплотнения перед конусом, расположенным в сверхзвуковом потоке

(сплошная кривая — реальный газ, пунктирная — совершенный)

§ 9.4. ЗАТУПЛЕННЫЙ КОНУС

Форма затупленных носков

Во многих конструкциях летательных аппаратов головные части имеют затупленные формы. Затупленные формы применяют прежде всего при очень больших скоростях полета, когда основным требованием, предъявляемым к головным частям, является способность противостоять действию высоких температур обтекающего газа. Однако часто затупленной формой обладают летательные аппараты (или их отдельные элементы), имеющие небольшие скорости, что может быть обусловлено конструктивными особенностями, назначением аппарата и др. Практически всегда приходится иметь дело с затупленным телом, так как технологически невозможно добиться абсолютно острой головки.

В этом параграфе будут рассмотрены конические тела с различными кромками затупленных носков, как наиболее распространенные. На рис. 9.4.1 показано коническое тело с затупленным носком сферической формы. Уравнение прямолинейного участка образующей такого тела, касательной к сфере, будет

$$r - r_т = (x - x_т)\operatorname{tg}\beta_к, \qquad (9.4.1)$$

где $r_т$, $x_т$ — координаты точки сопряжения сферы и образующей, определяемые через радиус сферы $R_т$ и угол конуса $\beta_к$:

$$r_т = R_т\cos\beta_к;\;\; x_т = R_т\operatorname{ctg}\beta_к\cos\beta_к. \qquad (9.4.2)$$

Уравнение образующей сферического носка в системе координат, начало которой совпадает с его вершиной, имеет в безразмерной форме вид

$$\bar{r}^2 = 1 - (\bar{x} - 1)^2, \tag{9.4.3}$$

где $\bar{r} = r/R_т$, $\bar{x} = x/R_т$.

Тангенс угла наклона касательной в данной точке образующей к оси

$$\operatorname{tg}\beta = dr/dx = (1 - \bar{x})/\bar{r}. \tag{9.4.4}$$

Носок конуса может быть выполнен таким образом, что образующая будет не касательной, а секущей по отношению к сферической поверхности (рис. 9.4.2). Радиус такой поверхности, построенной для точки с координатами $r_т$, $x_т$, будет $R_{т.с} > R_т$, где $R_т$ — радиус касательного носка, связанный с координатами $r_т$ и $x_т$ зависимостями (9.4.2).

На рис. 9.4.2 показан конус с затуплением в виде плоской поверхности (плоского торца), которую можно рассматривать как сферу с бесконечно большим радиусом. В свою очередь, сферический носок и плоский торец можно рассматривать как «предельные» формы эллиптической поверхности. На рис. 9.4.3 изображен конус с затупленным носком в виде такой поверхности.

Сферический касательный носок и плоский торец — наиболее характерные формы затуплений, которые можно рассматривать как границы своеобразного интервала, содержащего другие возможные формы. Обе эти характерные формы представляют интерес при исследовании аэродинамики затупленных тел с ка-

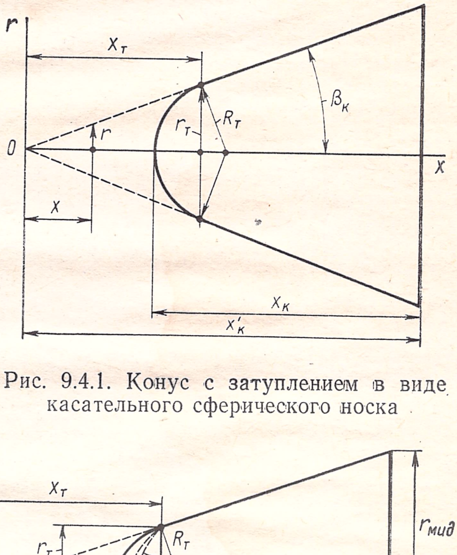


Рис. 9.4.1. Конус с затуплением в виде касательного сферического носка

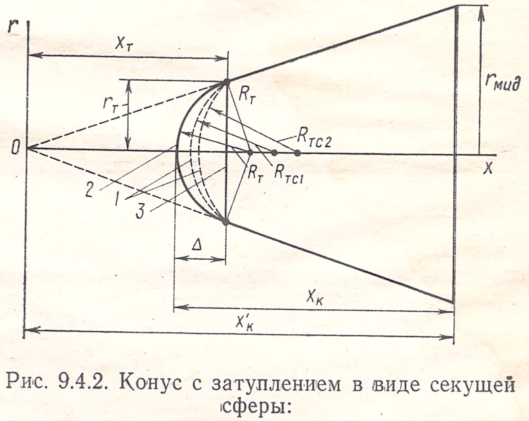


Рис. 9.4.2. Конус с затуплением в виде секущей сферы:

1 — секущий сферический носок; *2* — касательный сферический носок; *3* — затупление в виде плоского торца кой-либо промежуточной формой носка, так как дают возможность оценить крайние значения тех или иных аэродинамических параметров, которыми они обладают.

Аэродинамические характеристики затупленных тел существенно зависят при заданном типе носка от степени затупления, под которой понимают отношение радиуса основания носка $r_т$ к радиусу миделевого сечения тела $r_{мид}$.

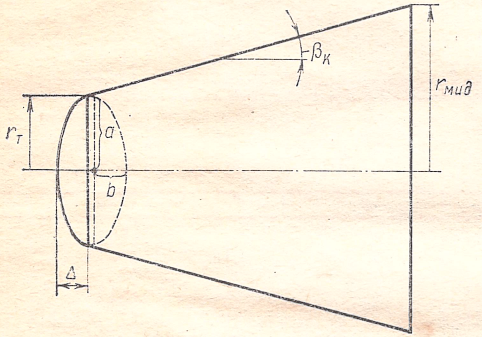


Рис. 9.4.3. Конус с эллиптическим затуплением

Особенности сверхзвукового обтекания

Важное для практики аэродинамическое свойство затупленных тел заключается в том, что они при движении в атмосфере с очень большими скоростями нагреваются и разрушаются меньше, чем заостренные тела.

Рассмотрим, какими газодинамическими явлениями обусловлено это свойство затупленных тел. На рис. 9.4.4 изображена схема потока около затупленного конического тела. Перед телом образуется отошедшая ударная волна с переменной интенсивностью в

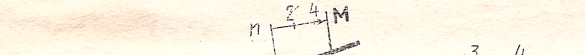


Рис. 9.4.4. Схема обтекания затупленного конуса сверхзвуковым потоком:

1 — «звуковые» точки, *2* — ударная волна; *3* — «звуковая» линия тока; *4* — высокоэнтропийный слой различных точках ее поверхности. Вдали от носка ударная волна вырождается в обычную волну возмущения с бесконечно малой интенсивностью и углом наклона $\theta_c = \mu_\infty = \arcsin(1/\mathbf{M}_\infty)$. Максимальная интенсивность будет в вершине волны (точка B на рис. 9.4.4), где $\theta_c = \pi/2$. Так как в окрестности носка угол θ_c мало отличается от $\pi/2$, то, следовательно, соответствующий участок волны будет обладать достаточно большой интенсивностью, близкой к интенсивности прямого скачка.

Переход частиц газа через такой сильный скачок уплотнения сопровождается значительными потерями полного напора и повышением энтропии. В результате у поверхности тела образуется слой некоторой толщины, в котором газ обладает высокой энтропией. Принято, что такой высокоэнтропийный слой ограничен частью ударной волны и поверхностью, полученной от вращения «звуковой» линии тока, т. е. линии тока, проходящей через «звуковую» точку на волне (точка S с координатой r_{ST} на рис. 9.4.4).

В высокоэнтропийном слое вследствие неодинаковой степени торможения в различных точках ударной волны течение будет характеризоваться (рис. 9.4.4) некоторым градиентом скорости в направлении нормали n и, следовательно, переменным значением местного числа $\mathbf{M}$ по толщине Δ. Если при этом пограничный слой имеет значительно меньшую толщину, чем высокоэнтропийный, то градиентом скорости в нем по сравнению с градиентом скорости в высокоэнтропийном слое можно пренебречь, что упрощает исследование. Принимается, что в высокоэнтропийном слое скорость в различных точках сечения одинакова. Приближенно ее можно считать равной средней скорости между значениями на «звуковой», а также «нулевой» линии тока, проходящей через вершину волны. Эта скорость, очевидно, меньше, чем скорость на заостренном конусе. Вблизи поверхности область течения, занятая высокоэнтропийным слоем и характеризующаяся малыми скоростями (и, следовательно, малыми числами Маха и Рейнольдса), оказывает решающее влияние на формирование процессов в пограничном слое.

Существенная особенность обтекания заключается в том, что под влиянием затупления изменяется режим течения в пограничном слое. Вследствие уменьшения местных чисел Рейнольдса, подсчитываемых по скорости в высокоэнтропийном слое, ламинарный пограничный слой переходит в турбулентный гораздо ниже по течению и, таким образом, протяженность ламинарного пограничного слоя возрастает. Это способствует снижению трения и уменьшению тепловых потоков к стенке.

Снижение тепловых потоков, обусловленное повышением энтропии газа при переходе через скачок уплотнения, называется энтропийным эффектом. При этом следует иметь в виду, что энтропийный эффект сводится не только к уменьшению скорости на внешней границе пограничного слоя, но и к уменьшению плотности газа, т. е. к снижению чисел Рейнольдса. Вместе с тем увеличение энтропии приводит и к увеличению (по сравнению с заостренным телом) температуры на внешней границе пограничного слоя. В этом проявляется противоположный эффект высокоэнтропийного слоя, приводящий к некоторому повышению теплового потока от пограничного слоя к стенке. Однако суммарный энтропийный эффект при соответствующем подборе стенки и формы затупления, как показывают расчеты и экспериментальные исследования, связан с уменьшением тепловых потоков.

Волновое сопротивление затупленного тела по сравнению с заостренным, как правило, возрастает. Хотя для тонких конических тел с малым затуплением имеет место снижение сопротивления, которое объясняется тем, что, несмотря на повышение давления у носка, на значительной части обтекаемой поверхности возникает пониженное давление по сравнению с заостренным конусом. Это явление понижения давления за носком показано на рис. 9.4.5, где приведены экспериментальные результаты, полученные в аэродинамической трубе для тонкого конуса с затуплением в виде торца, обтекаемого сверхзвуковым потоком при $M_\infty = 6{,}85$. Минимальное давление достигается на расстоянии около 10 диаметров затупления. На удалении от носка, примерно в 10 раз большем, происходит восстановление давления до значения на заостренном конусе. Если такой конус будет иметь небольшую длину и, следовательно, малую поверхность с пониженным давлением, то уменьшение сопротивления для этого участка будет недостаточным, чтобы компенсировать его рост за счет повышения сопротивления торца. Для достаточно длинного конуса уменьшение сопротивления периферийного участка может быть более существенным и приведет к снижению полного сопротивления затупленной конической поверхности по сравнению с заостренной.

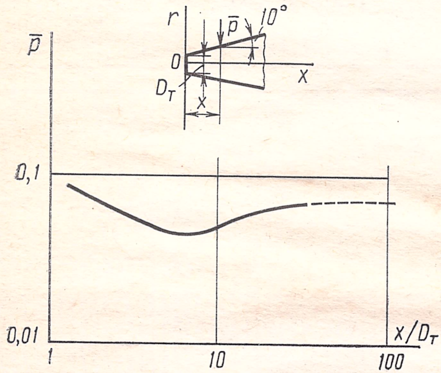


Рис. 9.4.5. Коэффициент давления на поверхности конуса с плоским затуплением при $M_\infty = 6{,}85$:

——— — эксперимент; — — — — — — расчет по конической теории для заостренного тела

Главный эффект от применения затупления заключается не в изменении сопротивления, которое при малой степени затупления оказывается сравнительно небольшим, а в существенном уменьшении теплопередачи. Как показывают исследования, такое преимущество затупления проявляется в основном в области гиперзвуковых скоростей.

Можно указать и другие случаи применения затупленных поверхностей, связанные не столько с необходимостью уменьшения теплопередачи, сколько с увеличением лобового сопротивления. Именно такой формой поверхностей обладают спускаемые космические аппараты, для которых важно иметь большие c_x, обеспечивающие более интенсивное их торможение в атмосфере.

Обтекание конуса, затупленного по сфере

Изучение аэродинамики всего затупленного тела связано с исследованием обтекания его передней части, выполненной в виде затупленного носка какой-либо формы. Результаты этих исследований — основа для расчета параметров потока на остальном участке тела. Кроме того, эти результаты имеют самостоятельное значение, так как позволяют определить аэродинамические характеристики затупленного носка. Суммарные аэродинамические характеристики тела могут быть определены сложением составляющих для носка и остального участка. При этом необходимо указать, что если обтекание периферийной части тела зависит от затупления, то условия течения около самого носка определяются лишь формой части носка до «звуковой» точки на его поверхности. Если такая «звуковая» точка находится на периферийной поверхности (вниз по потоку за линией сопряжения носка и тела), то возмущения, возникающие на участке периферийной поверхности тела, распространяются вверх по потоку в направлении носка и обтекание его нельзя рассматривать вне связи с обтеканием этого участка.

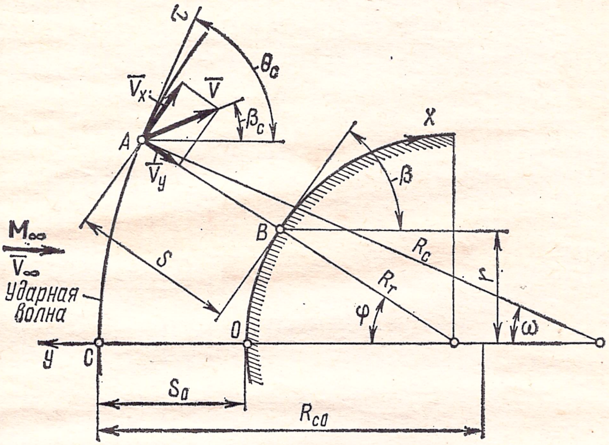


Рис. 9.4.6. Схема сверхзвукового обтекания сферической поверхности

Рассмотрим задачу об обтекании сферического носка, принадлежащего затупленной конической поверхности, предполагая, что на обтекание носка не влияет периферийная поверхность тела. Будем исследовать невязкое обтекание, имея в виду, что, несмотря на такое ограничение, отыскиваемое при этом решение имеет большое практическое значение: оно позволяет определить основные условия течения вне пограничного слоя, необходимые для изучения процессов трения и теплопередачи, формируемых в самом пограничном слое.

Вначале рассмотрим течение в окрестности точки полного торможения, являющейся одной из наиболее характерных точек сферической поверхности. Изучение этого течения представляет интерес прежде всего потому, что оно связано с такой практической задачей, как определение тепловых потоков, которые могут достигать здесь наибольшей величины. Наряду с этим решение задачи о течении вблизи точки полного торможения позволяет определить расстояние от ударной волны до носка, а также распределение газодинамических параметров в этой небольшой области, причем решение может быть получено в общем случае с учетом физико-химических превращений газа.

Для решения сформулированной задачи воспользуемся уравнением движения, которое согласно (3.1.21) для «невязкого» ($\nu=0$) и «невесомого» газа ($\overline{G}=0$) имеет в векторной форме вид

$$d\overline{V}/dt = -(1/\varrho)\,\mathrm{grad}\,p. \tag{9.4.5}$$

Напишем уравнение (9.4.5) в системе криволинейных ортогональных координат. Начало координат этой системы совместим с точкой O полного торможения на сферической поверхности, координату x будем отсчитывать вдоль поверхности, а y — по нормали к ней (рис. 9.4.6). Принимая во внимание (3.1.22) и учитывая, что исследуется установившийся поток ($\partial\overline{V}/\partial t=0$), уравнение (9.4.5) преобразуем к виду

$$\mathrm{grad}\,(V^2/2) + \mathrm{rot}\,\overline{V}\times\overline{V} = -(1/\varrho)\,\mathrm{grad}\,p. \tag{9.4.6}$$

Рассматривая проекции векторов на направления координатных линий q_1 и q_2 криволинейной системы [см. (2.4.11)], получим уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned}&[\mathrm{grad}\,(V^2/2)]_1 + (\mathrm{rot}\,\overline{V}\times\overline{V})_1 = -(1/\varrho)\,(\mathrm{grad}\,p)_1;\\&[\mathrm{grad}\,(V^2/2)]_2 + (\mathrm{rot}\,\overline{V}\times\overline{V})_2 = -(1/\varrho)\,(\mathrm{grad}\,p)_2.\end{aligned}\right\} \tag{9.4.7}$$

Значения $[\mathrm{grad}(V^2/2)]_1$ и $[\mathrm{grad}(V^2/2)]_2$ можно определить, используя зависимость (3.1.24). Заменив в ней p на $V^2/2$, напишем

$$\mathrm{grad}\,\frac{V^2}{2} = \frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial(V^2/2)}{\partial q_1}\,i_1 + \frac{1}{h_2}\cdot\frac{\partial(V^2/2)}{\partial q_2}\,i_2 + \frac{1}{h_3}\cdot\frac{\partial(V^2/2)}{\partial q_3}\,i_3, \tag{9.4.8}$$

где q_1, q_2 и q_3 определяются значениями (2.4.40).

Так как рассматривается случай осесимметричного обтекания, то

$$\partial(V^2/2)/\partial q_3 = \partial(V^2/2)\,\partial\gamma = 0.$$

Принимая во внимание значение (2.4.42) для параметров Ламе h_1 и h_2, напишем (9.4.8) в виде

$$\left(\mathrm{grad}\,\frac{V^2}{2}\right)_1 i_1 + \left(\mathrm{grad}\,\frac{V^2}{2}\right)_2 i_2 = \left(1+\frac{y}{R_\text{т}}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial(V^2/2)}{\partial x}\,i_1 + \frac{\partial(V^2/2)}{\partial y}\,i_2,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}&\left(\mathrm{grad}\,\frac{V^2}{2}\right)_1 = \left(1+\frac{y}{R_\text{т}}\right)^{-1}\frac{\partial(V^2/2)}{\partial x};\\&\left(\mathrm{grad}\,\frac{V^2}{2}\right)_2 = \frac{\partial(V^2/2)}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{9.4.9}$$

Рассмотрим векторное произведение:

$$\mathrm{rot}\,\overline{V}\times\overline{V} = [(\mathrm{rot}\,\overline{V})_1\,i_1 + (\mathrm{rot}\,\overline{V})_2\,i_2 + (\mathrm{rot}\,\overline{V})_3\,i_3]\times(V_1 i_1 + V_2 i_2 + V_3 i_3).$$

Отсюда находим проекции:

$$\begin{aligned}&(\mathrm{rot}\,\overline{V}\times\overline{V})_1 = (\mathrm{rot}\,\overline{V})_2\,V_3 - (\mathrm{rot}\,\overline{V})_3\,V_2;\\&(\mathrm{rot}\,\overline{V}\times\overline{V})_2 = -(\mathrm{rot}\,\overline{V})_1\,V_3 + (\mathrm{rot}\,\overline{V})_3 V_1.\end{aligned}$$

Так как рассматривается осесимметричное течение, то в этих выражениях надо принять $\overline{V}_3=0$. Проекция вектора $(\mathrm{rot}\,\overline{V})_3$ в соответствии с (3.1.28)

$$(\mathrm{rot}\,\overline{V})_3 = \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial(h_2V_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(h_1V_1)}{\partial q_2}\right],$$

или с учетом (2.4.40) и (2.4.42)

$$(\operatorname{rot}\overline{V})_3=\left(1+\frac{y}{R_{\text{т}}}\right)^{-1}\left\{\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial[(1+y/R_{\text{т}})V_x]}{\partial y}\right\}. \qquad (9.4.10)$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned}(\operatorname{rot}\overline{V}\times\overline{V})_1&=-(\operatorname{rot}\overline{V})_3V_2=-\left(1+\frac{y}{R_{\text{т}}}\right)^{-1}V_y\left\{\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial[(1+y/R_{\text{т}})V_x)]}{\partial y}\right\};\\(\operatorname{rot}\overline{V}\times\overline{V})_2&=(\operatorname{rot}\overline{V})_3V_1=\left(1+\frac{y}{R_{\text{т}}}\right)^{-1}V_x\left\{\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial[(1+y/R_{\text{т}})V_x]}{\partial y}\right\}.\end{aligned}\right\} \qquad (9.4.11)$$

Из (3.1.24) следует, что

$$(\operatorname{grad}p)_1=\frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial p}{\partial q_1},\quad (\operatorname{grad}p)_2=\frac{1}{h_2}\cdot\frac{\partial p}{\partial q_2},$$

или с учетом (2.4.40) и (2.4.42)

$$(\operatorname{grad}p)_1=\left(1+\frac{y}{R_{\text{т}}}\right)^{-1}\frac{\partial p}{\partial x},\ (\operatorname{grad}p)_2=\frac{\partial p}{\partial y}. \qquad (9.4.12)$$

Внося (9.4.9), (9.4.11), (9.4.12) в (9.4.7), получим:

$$\left(1+\frac{y}{R_{\text{т}}}\right)^{-1}\frac{\partial(V^2/2)}{\partial x}-\left(1+\frac{y}{R_{\text{т}}}\right)^{-1}V_y\left\{\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial[(1+y/R_{\text{т}}V_x]}{\partial y}\right\}=$$

$$=-\frac{(1+y/R_{\text{т}})^{-1}}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x};$$

$$\frac{\partial(V^2/2)}{\partial y}+\left(1+\frac{y}{R_{\text{т}}}\right)^{-1}V_x\left\{\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial[(1+y/R_{\text{т}})V_x]}{\partial y}\right\}=-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}.$$

После преобразований получаем следующие уравнения движения:

$$\frac{Vx}{1+y/R_{\text{т}}}\cdot\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{V_xV_y}{y+R_{\text{т}}}=-\frac{1}{\varrho(1+y/R_{\text{т}})}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}; \qquad (9.4.13)$$

$$\frac{V_x}{1+y/R_{\text{т}}}\cdot\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}-\frac{V_x^2}{y+R_{\text{т}}}=-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}. \qquad (9.4.14)$$

К уравнениям движения необходимо присоединить уравнение неразрывности, которое согласно (2.4.46) запишется для установившегося обтекания ($\partial\rho/\partial t=0$) в форме

$$\frac{\partial(\varrho rV_x)}{\partial x}+\frac{\partial[\varrho r(1+y/R_{\text{т}})V_y]}{\partial y}=0. \qquad (9.4.15)$$

Если принять, что исследуется область в окрестности критической точки и набегающий поток имеет очень большую сверхзвуковую скорость, то исходные уравнения (9.4.13)—(9.4.15) могут быть упрощены. В самом деле, при этих условиях поток за ударной волной по своим свойствам практически несжимаем, так как число $\mathbf{M}_2$ мало отличается от его значения $[(k-1)/2k]^{1/2}$, соответствующего случаю предельного течения (при $\mathbf{M}_\infty\to\infty$, $k=\text{const}$) за прямым скачком. Следовательно, в рассматриваемой окрестности плотность можно принять постоянной и равной ρ_{c0} — плотности за ударной волной в точке полного торможения. Таким образом, в уравнениях движения и неразрывности переменную плоткость ρ можно заменить постоянной величиной ρ_{c0}.

Так как рассматриваются большие скорости, то в этом случае ударная волна будет близко подходить к поверхности тела. При этом область возмущенного течения располагается в тонком слое некоторой толщины s, весьма малой по сравнению с радиусом кривизны $R_{\text{т}}$ поверхности.

Таким образом, если принять, что $s/R_{\text{т}} \ll 1$, то, очевидно, и $y/R_{\text{т}} \ll 1$, так как $0 \leqslant y \leqslant s$. Следовательно, в уравнениях движения (9.4.13), (9.4.14) и неразрывности (9.4.15) можно величиной $y/R_{\text{т}}$ по сравнению с единицей пренебречь. Учитывая приведенные упрощения и принимая во внимание, что для условий вблизи точки торможения величину r в (9.4.15) можно принять равной $r \approx x$, уравнения (9.4.13)—(9.4.15) напишем в виде:

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{V_x V_y}{R_{\text{т}}} = -\frac{\bar{\varrho}}{\varrho_\infty} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}; \tag{9.4.16}$$

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{V_x^2}{R_{\text{т}}} = -\frac{\bar{\varrho}}{\varrho_\infty} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}; \tag{9.4.17}$$

$$\frac{\partial (x V_x)}{\partial x} + \frac{\partial (x V_y)}{\partial y} = 0. \tag{9.4.18}$$

В уравнения (9.4.16) и (9.4.17) введена безразмерная плотность $\bar{\rho} = \rho_\infty/\rho \approx \approx \rho_\infty/\rho_{c0} = \text{const}$. Покажем, что уравнения (9.4.16), (9.4.17) можно еще упростить. С этой целью рассмотрим порядок величин членов, входящих в эти уравнения. По физическому смыслу порядок величины V_y будет $V_y \sim V_{c0}$, где V_{c0} — скорость за прямой частью ударной волны. Порядок координат x и y для малой окрестности определяется соответственно значениями $x \sim s_0$, $y \sim s_0$ (s_0 — расстояние от прямой части волны до поверхности носка).

Из уравнения (9.4.18) следует, что порядок величины

$$x V_x \sim \int_0^{s_0} \frac{\partial (x V_y)}{\partial y} dx \quad \text{или} \quad s_0 V_x \sim \int_0^{s_0} \frac{s_0 V_{c0}}{s_0} dx,$$

откуда находим $V_x \sim V_{c0}$. Таким образом, порядок величины составляющей V_x будет такой же, как и V_y. Нетрудно видеть, что порядок третьих членов в правой части уравнений будет $V_{c0}^2/R_{\text{т}}$, а остальных V_{c0}^2/s_0. Вследствие того что $s_0 \ll R_{\text{т}}$, третьи члены имеют меньший порядок и ими можно пренебречь.

Таким образом, вместо (9.4.16), (9.4.17) напишем:

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{\bar{\varrho}}{\varrho_\infty} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}; \tag{9.4.16$'$}$$

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{\bar{\varrho}}{\varrho_\infty} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}. \tag{9.4.17$'$}$$

Решение системы уравнений (9.4.16′), (9.4.17′), (9.4.18) должно удовлетворять граничным условиям на поверхности тела в произвольной точке, где при $y=0$ нормальная составляющая скорости $V_y=0$, а затем в точке полного торможения, в которой при $y=x=0$ составляющие скорости $V_x=V_y=0$. Кроме того, решение должно удовлетворять граничным условиям течения непосредственно за ударной волной. Эти условия, написанные для составляющих скорости в точке A, расположенной на расстоянии S от поверхности носка, имеют вид (см. рис. 9.4.6):

$$V_x = V_c \cos(\beta - \beta_c); \tag{9.4.19}$$

$$V_y = -V_c \sin(\beta - \beta_c), \tag{9.4.20}$$

где β — угол наклона касательной к поверхности в точке B, находящейся вместе с точкой A на одной нормали.

Полная скорость V_c непосредственно за скачком уплотнения определяется при помощи формулы (4.3.18). Приняв в ней $V_2 = V_c$, $V_1 = V_\infty$ и $\varrho_1/\varrho_2 \approx \varrho_\infty/\varrho_{c0} = \bar{\varrho}$, найдем

$$V_c/V_\infty = (\cos^2 \theta_c + \bar{\varrho}^2 \sin^2 \theta_c)^{1/2}. \tag{9.4.21}$$

Решение задачи об обтекании окрестности точки полного торможения можно свести к отысканию поля скоростей. Таким образом, рассматриваемая задача будет чисто кинематической. Для этого необходимо исключить из уравнений движения плотность и давление. С указанной целью продифференцируем (9.4.16′) по y, а (9.4.17′) по x:

$$\frac{\partial V_x}{\partial y}\cdot\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_x\frac{\partial^2 V_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_y\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}=-\frac{\bar{\varrho}}{\varrho_\infty}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y}\,; \qquad (9.4.22)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_x\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_y\frac{\partial^2 V_y}{\partial y\,\partial x}=-\frac{\bar{\varrho}}{\varrho_\infty}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial y\,\partial x}. \qquad (9.4.23)$$

Введем функцию, определяющую удвоенный компонент вихря [составляющую ротора скорости $(\operatorname{rot}\bar{V})_z=2\omega_z$; см. (2.2.3)]:

$$-2\omega_z=\Omega_z=\frac{\partial V_x}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial x}. \qquad (9.4.24)$$

Используя функцию (9.4.24), а также уравнение неразрывности (9.4.18), можно преобразовать уравнения (9.4.22) и (9.4.23). Так как правые части этих уравнений одинаковы, то

$$\frac{\partial V_x}{\partial y}\cdot\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_x\frac{\partial^2 V_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_y\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}-$$
$$-\frac{\partial V_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial V_y}{\partial x}-V_x\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}-\frac{\partial V_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial V_y}{\partial y}-V_y\frac{\partial^2 V_y}{\partial y\partial x}=0,$$

или

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)+V_x\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}\right)+$$
$$+V_y\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 V_x}{\partial y\partial x}\right)=0. \qquad (9.4.25)$$

Из (9.4.24) следует, что

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}=\frac{\partial \Omega_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 V_y}{\partial y\partial x}=\frac{\partial \Omega_z}{\partial y}.$$

Из уравнения неразрывности (9.4.18) находим

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}=-\frac{V_x}{x}.$$

Поэтому уравнение (9.4.25), в котором $\partial V_x/\partial y-\partial V_y/\partial x=\Omega_z$, можно записать в виде

$$\frac{\Omega_z V_x}{x}=V_x\frac{\partial \Omega_z}{\partial x}+V_y\frac{\partial \Omega_z}{\partial y}. \qquad (9.4.25')$$

Таким образом, задача заключается в отыскании решений уравнений (9.4.18) и (9.4.25′), удовлетворяющих указанным граничным условиям.

Будем искать решение для V_x в окрестности точки полного торможения, координаты которой $x=0$, $y=0$, в виде ряда

$$V_x=a_0(y)+a_1(y)\,x+a_2(y)\,x^2+a_3(y)\,x^3+\ldots, \qquad (9.4.26)$$

где x — малый параметр, а коэффициенты a_n — некоторые функции координаты y.

Структуру ряда (9.4.26) можно несколько упростить. Действительно, ввиду симметрии течения функция $V_x(x)$ будет нечетной, т. е. одинаковым по величине, но различным по знаку x будут соответствовать равные по абсолютному значению, но противоположные по знаку составляющие скорости V_x. Поэтому в разложении (9.4.26) сохранятся члены только с нечетными степенями, т. е.

$$V_x = a_1(y)\,x + a_3(y)\,x^3 + \dots . \tag{9.4.27}$$

Учитывая, что рассматривается малая окрестность вблизи точки полного торможения, членами, содержащими x в третьей и более высокой степени, можно пренебречь. Таким образом,

$$V_x = a_1(y)\,x. \tag{9.4.28}$$

Введем функцию

$$F(y) = \int\limits_0^y a_1(y)\,dy, \tag{9.4.29}$$

чтобы

$$dF/dy = F'(y) = a_1(y) \text{ и } F(0) = 0. \tag{9.4.30}$$

Тогда

$$V_x = xF'(y). \tag{9.4.31}$$

Подставим выражение для V_x из (9.4.31) в (9.4.18):

$$xF'(y) + xF''(y) + x\,\frac{\partial V_y}{\partial y} = 0.$$

Отсюда находим выражение для другой составляющей скорости:

$$V_y = -2\int F'(y)\,dy + f(x) = -2F(y) + f(x),$$

где $f(x)$ — некоторая произвольная функция x

По условию безотрывности обтекания $V_y(x,\ 0)=0$, следовательно, $f(x) = -2F(0)$. Но согласно (9.4.30) функция $F(0)=0$, поэтому $f(x)=0$ и

$$V_y = -2F(y). \tag{9.4.32}$$

С целью определения вида функции $F(y)$ внесем (9.4.31) и (9.4.32) в (9.4.25′):

$$[xF''(y)/x]\,V_x = V_x F''(y) - 2F(y)\,F'''(y).$$

Согласно (9.4.32), функция $F(y) \neq 0$, поэтому

$$F'''(y) = 0. \tag{9.4.33}$$

Общее решение этого уравнения:

$$F(y) = -V_y/2 = c_0 + c_1 y + c_2 y^2. \tag{9.4.34}$$

Так как $V_y=0$ при $y=0$, то $c_0=0$. Два других коэффициента можно определить, если воспользоваться условиями на ударной волне вблизи критической точки при $x \to 0$. В частности, из условия (9.4.21) следует, что непосредственно за «прямой» частью ударной волны ($\theta_c=\pi/2$) скорость в точке C (см. рис. 9.4.6) $V_y = V_c = -\bar{\rho} V_\infty$. Так как координата точки $y=s_0$, то $V_y = V_c = -2(c_1 s_0 + c_2 s_0^2)$. Поэтому первым уравнением для определения коэффициентов c_1 и c_2 будет

$$\bar{\rho} V_\infty = 2\left(c_1 s_0 + c_2 s_0^2\right). \tag{9.4.35}$$

Для нахождения второго уравнения продифференцируем (9.4.34) по y:

$$F'(y) = c_1 + 2c_2 y.$$

В соответствии с этим результатом и согласно (9.4.31) составляющая скорости

$$V_x = x(c_1 + 2c_2 y). \tag{9.4.36}$$

Рассмотрим точку A на ударной волне, удаленную от поверхности носка на расстояние $y=s$. Приравнивая скорость V_x, найденную из (9.4.36),

$$V_{xA} = x(c_1 + 2c_2 s)$$

ее значению (9.4.19) на ударной волне

$$V_{xA} = V_c \cos(\beta - \beta_c),$$

получим

$$x(c_1 + 2c_2 s) = V_c \cos(\beta - \beta_c).$$

Переходя к пределу при $x \to 0$ и полагая $s = s_0$, $V_c = \bar{\rho} V_\infty$, найдем зависимость, относящуюся к точке C, расположенной на прямой части ударной волны:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\beta - \beta_c)}{x} = \frac{c_1 + 2c_2 s_0}{\bar{\varrho} V_\infty}. \qquad (9.4.37)$$

Предел в левой части можно вычислить следующим образом. Из рис. 9.4.6 видно, что в точке A на ударной волне угол $\beta - \beta_c = \pi/2 - (\varphi + \beta_c)$. Следовательно, $\cos(\beta - \beta_c) = \sin(\varphi + \beta_c)$. Вблизи точки полного торможения углы φ и β_c малы и можно принять $\cos(\beta - \beta_c) \approx \varphi + \beta_c$. В соответствии с этим

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\beta - \beta_c)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\varphi}{x} + \lim_{x \to 0} \frac{\beta_c}{x}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{x \to 0} (\varphi/x) = 1/R_т$, а второй предел можно представить в виде

$$\lim_{x \to 0} \frac{\beta_c}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\beta_c}{\omega} \cdot \frac{\omega}{x} \right) = \left(\frac{\beta_c}{\omega} \right)_{x=0} \cdot \frac{1}{R_{c0}}, \qquad (9.4.38)$$

где $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\beta_c}{\omega} = \left(\dfrac{\beta_c}{\omega} \right)_{x=0}$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\omega}{x} = \dfrac{1}{R_{c0}}$. Здесь R_{c0} — радиус кривизны ударной волны в ее вершине (если R_c — текущее значение радиуса кривизны волны, то $R_{c0} = \lim\limits_{x \to 0} R_c$). Угол ω (см. рис. 9.4.6) связан с углом наклона волны θ_c формулой

$$\omega = \pi/2 - \theta_c. \qquad (9.4.39)$$

Для определения $(\beta_c/\omega)_{x=0}$ воспользуемся формулой (4.2.19), которую напишем при помощи (4.2.21) и (9.4.39) в виде

$$\varrho_\infty / \varrho_c = [\operatorname{tg}(\theta_c - \beta_c)] / \operatorname{tg} \theta_c = \operatorname{tg} \omega / \operatorname{tg}(\omega + \beta_c).$$

Для малых ω и β_c отношение $\rho_\infty / \rho_c = \omega / (\omega + \beta_c)$. Следовательно,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\beta_c}{\omega} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\varrho_c}{\varrho_\infty} - 1 \right)$$

или

$$\left(\frac{\beta_c}{\omega} \right)_{x=0} = \frac{\varrho_{c0}}{\varrho_\infty} - 1 = \frac{1}{\bar{\varrho}} - 1.$$

Таким образом,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\beta - \beta_c)}{x} = \frac{1}{R_т} + \left(\frac{1}{\bar{\varrho}} - 1 \right) \frac{1}{R_{c0}}.$$

Вносим это выражение в (9.4.37):

$$\frac{1}{R_т} + \left(\frac{1}{\bar{\varrho}} - 1 \right) \frac{1}{R_{c0}} = \frac{c_1 + 2c_2 s_0}{\bar{\varrho} V_\infty}$$

или

$$\frac{R_{c0}}{R_т} + \frac{1}{\bar{\varrho}} - 1 = \frac{R_{c0}(c_1 + 2c_2 s_0)}{\bar{\varrho} V_\infty}.$$

При больших скоростях обтекания можно принять $R_{c0}/R_т \approx 1$, поэтому

$$c_1 + 2c_2 s_0 = V_\infty / R_{c0}. \qquad (9.4.40)$$

В уравнениях (9.4.35) и (9.4.40) появилось помимо c_1, c_2 третье неизвестное — расстояние s_0 от ударной волны до носка. Поэтому к системам (9.4.35) и (9.4.40) необходимо добавить еще одно независимое уравнение, которое вытекает из выражения для вихря:

$$\Omega_z = \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x\left(c_1 + 2c_2 y\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[-2\left(c_1 y + c_2 y^2\right)\right] = 2c_2 x. \quad (9.4.41)$$

Зависимость (9.4.41) пригодна для определения вихря как на поверхности носка, так и непосредственно за ударной волной на участке потока вблизи точки полного торможения. Вихрь в потоке за ударной волной может быть также найден из уравнения (9.4.6), которое в соответствии с зависимостью $i + V^2/2 = \mathrm{const}$ преобразуется к виду

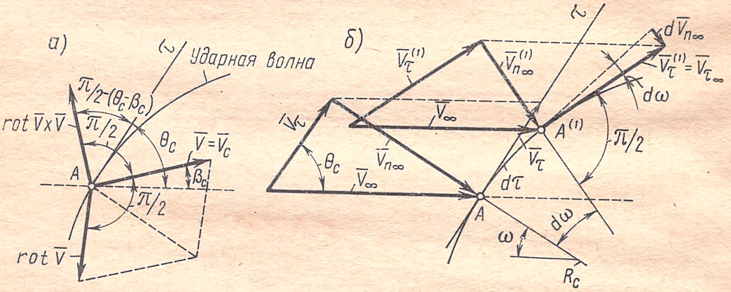


Рис. 9.4.7. К определению интенсивности вихря за ударной волной

$$\mathrm{rot}\,\overline{V} \times \overline{V} = \mathrm{grad}\, i - (1/\varrho)\,\mathrm{grad}\, p. \quad (9.4.42)$$

Воспользуемся известной из термодинамики зависимостью для энтропии

$$TdS = di - dp/\varrho, \quad (9.4.43)$$

согласно которой можно написать векторное соотношение

$$T\,\mathrm{grad}\, S = \mathrm{grad}\, i - (1/\varrho)\,\mathrm{grad}\, p. \quad (9.4.44)$$

Отсюда (9.4.42) напишем в виде

$$\mathrm{rot}\,\overline{V} \times \overline{V} = T\,\mathrm{grad}\, S. \quad (9.4.45)$$

Это уравнение можно отнести к условиям на ударной волне. Рассмотрим произвольную точку A на ней (см. рис. 9.4.6). Проектируя векторы, входящие в (9.4.5), на направление касательной τ, получим соотношение

$$(\mathrm{rot}\,\overline{V} \times \overline{V})_\tau = T_2\,(dS_2/d\tau), \quad (9.4.46)$$

где T_2 — температура в точке A непосредственно за скачком уплотнения.

Компонента $(\mathrm{rot}\,\overline{V} \times \overline{V})_\tau$ векторного произведения определяется следующим образом. В точке A вектор $\mathrm{rot}\,\overline{V}$, модуль которого Ω_z, ориентирован по нормали к вертикальной плоскости симметрии (рис. 9.4.7, *а*). Величина $\overline{V}$ представляет собой вектор скорости за ударной волной $\overline{V} = \overline{V}_c$, расположенный в указанной плоскости симметрии. Ввиду перпендикулярности векторов $\mathrm{rot}\,\overline{V}$ и $\overline{V}$ их векторное произведение по модулю

$$|\mathrm{rot}\,\overline{V} \times \overline{V}| = |\mathrm{rot}\,\overline{V}|\,|\overline{V}|\,\sin(\pi/2) = \Omega_z V_c.$$

Вектор, равный векторному произведению $\mathrm{rot}\,\overline{V} \times \overline{V}$, перпендикулярен плоскости векторов $\mathrm{rot}\,\overline{V}$, $\overline{V}$ и, очевидно, расположен, как и вектор $\overline{V} = \overline{V}_c$, в плоскости симметрии (рис. 9.4.7, *а*). Проекция векторного произведения $\mathrm{rot}\,\overline{V}\times\overline{V}$ на направление касательной, как видно из рис. 9.4.7, равна

$$(\mathrm{rot}\,\overline{V}\times\overline{V})_\tau = \Omega_z V_c \sin(\theta_c - \beta_c). \qquad (9.4.47)$$

Для определения правой части (9.4.46) воспользуемся уравнением (9.4.43), отнеся его к условиям в той же точке A непосредственно за ударной волной:

$$T_2 dS_2 = di_2 - dp_2/\varrho_2. \qquad (9.4.43')$$

Уравнения для энтальпии i_2 и давления p_2 возьмем соответственно в форме (4.2.6) и (4.2.4). Так как рассматриваются большие скорости, при которых $i_1 \ll i_2$ и $p_1 \ll p_2$, то эти уравнения напишем в виде:

$$i_2 = V_{n1}^2/2 - V_{n2}^2/2; \qquad (9.4.48)$$

$$p_2 = \varrho_1 V_{n1}^2 - \varrho_2 V_{n2}^2, \qquad (9.4.49)$$

или с учетом (4.2.3)

$$i_2 = \left[V_{n\infty}^2 (1 - \bar{\varrho}^2)\right]/2; \qquad (9.4.48')$$

$$p_2 = \varrho_1 V_{n\infty}^2 (1 - \bar{\varrho}), \qquad (9.4.49')$$

где $V_{n1} = V_{n\infty}$, $\bar{\varrho} = \varrho_1/\varrho_2 = \varrho_\infty/\varrho$.

Дифференцируя, получим:

$$di_2 = (1 - \bar{\varrho}^2) V_{n\infty} dV_{n\infty} - V_{n\infty}^2 \bar{\varrho} d\bar{\varrho};$$

$$dp_2 = 2(1 - \bar{\varrho}) \varrho_1 V_{n\infty}\, dV_{n\infty} - \varrho_1 V_{n\infty}^2 d\bar{\varrho}.$$

Подставляя эти выражения в (9.4.43′), найдем

$$T_2 dS_2 = (1 - \bar{\varrho})^2 V_{n\infty} dV_{n\infty}. \qquad (9.4.50)$$

Из рис. 9.4.7, *б* следует, что приращение нормальной составляющей $dV_{n\infty} = V_\tau^{(1)} d\omega$. При этом, так как скорость $V_\tau^{(1)}$ в точке $A^{(1)}$, находящейся на малом удалении от заданной точки A, отличается от скорости V_τ в точке A на бесконечно малую величину, дифференциал

$$dV_{n\infty} = V_\tau d\omega = V_\tau (d\tau/R_c), \qquad (9.4.51)$$

где $R_c = d\tau/d\omega$ — радиус кривизны волны в точке A (рис. 9.4.7, *б*).

В соответствии с (9.4.51) уравнение (9.4.50) перепишем в виде

$$T_2 dS_2 = (1 - \bar{\varrho})^2 V_{n\infty} V_\tau (d\tau/R_c). \qquad (9.4.52)$$

Внося (9.4.47) и (9.4.52) в (9.4.46), найдем

$$\Omega_z V_c \sin(\theta_c - \beta_c) = (1 - \bar{\varrho})^2 V_{n\infty} V_\tau / R_c.$$

Используя формулу (9.4.21) для V_c, а также выражения

$$V_{n\infty} = V_\infty \sin\theta_c; \quad V_\tau = V_\infty \cos\theta_c, \qquad (9.4.53)$$

которые получаются из треугольника скоростей на рис. 9.4.7, *б*, найдем для вихря

$$\Omega_z = V_\infty (1 - \bar{\varrho})^2 \sin\theta_c \cos\theta_c / [(\bar{\varrho}^2 \sin^2\theta_c + \cos^2\theta_c)^{1/2} R_c]. \qquad (9.4.54)$$

Заменяя здесь θ_c на $\pi/2 - \omega$, найдем

$$\Omega_z = V_\infty (1 - \bar{\varrho})^2 \cos\omega \sin\omega / [(\bar{\varrho}^2 \cos^2\omega + \sin^2\omega)^{1/2} R_c]. \qquad (9.4.54')$$

В окрестности точки полного торможения, где ω малы и $R_c \to R_{c0}$,

$$\Omega_z = V_\infty (1 - \bar{\varrho})^2 \omega / (\bar{\varrho} R_{c0}). \qquad (9.4.54'')$$

Приравнивая правые части (9.4.41) и (9.4.54″) и учитывая, что $\omega/x=1/R_{c0}$, найдем коэффициент

$$c_2=V_\infty(1-\bar{\varrho})^2/(2\bar{\varrho}R_{c0}^2). \tag{9.4.55}$$

Подставляя это значение c_2 в уравнения (9.4.35), (9.4.40) и решая их совместно, найдем зависимость для коэффициента c_1:

$$c_1=(\pm V_\infty/R_{c0})\sqrt{2\bar{\varrho}-\bar{\varrho}^2}. \tag{9.4.56}$$

Скорость на поверхности носка определяется из (9.4.36) при условии, что $y=0$:

$$V_x=xc_1=\pm(xV_\infty/R_{c0})\sqrt{2\bar{\varrho}-\bar{\varrho}^2}. \tag{9.4.57}$$

Из свойства нечетности функции V_x следует, что при $x>0$ или $x<0$ должно быть соответственно $V_x>0$ или $V_x<0$. Это значит, что в формуле (9.4.57), а следовательно, и в равенстве (9.4.56) для c_1 должен быть взят знак плюс.

Отход и форма головной ударной волны. Наряду с коэффициентом c_1 решение системы (9.4.35), (9.4.40) дает зависимость для отхода s_0 ударной волны от носка:

$$s_0=\left(\frac{V_\infty}{R_{c0}}-c_1\right)\frac{1}{2c_2}.$$

Вносим сюда значения c_2 из (9.4.55) и c_1 из (9.4.56) со знаком плюс:

$$s_0=\frac{\bar{\varrho}R_{c0}}{(1-\bar{\varrho})^2}\left[1-(2\bar{\varrho}-\bar{\varrho}^2)^{1/2}\right]. \tag{9.4.58}$$

В правую часть этой формулы входит радиус кривизны волны на оси R_{c0}, который следует рассматривать при заданных условиях набегающего потока как функцию радиуса сферы $R_т$. Если исходить из предположения, что на оси волна концентрична сфере, то $R_{c0}=R_т+s_0$. Вводя новые обозначения $\bar{R}_{c0}=R_{c0}/R_т$, $\tilde{s}_0=s_0/R_{c0}$, напишем

$$\bar{R}_{c0}=1/(1-\tilde{s}_0). \tag{9.4.59}$$

В действительности концентричность не имеет места. Соответствующее отклонение от зависимости (9.4.59) будет тем больше, чем меньше числа $\mathbf{M}_\infty$. Для учета отклонения от концентричной формы ударной волны можно воспользоваться зависимостью, полученной по опытным данным,

$$\bar{R}_{c0}=R_{c0}/R_т=1/(1-\tilde{s}_0)^{2,5}. \tag{9.4.60}$$

В результате отход, отнесенный к радиусу сферического носка,

$$\bar{s}_0=\frac{s_0}{R_т}=\frac{s_0}{R_{c0}}\cdot\frac{R_{c0}}{R_т}=\tilde{s}_0(1-\tilde{s}_0)^{-2,5}, \tag{9.4.61}$$

где $\tilde{s}_0$ берется в соответствии с (9.4.58) в виде

$$\tilde{s}_0=\frac{\bar{\varrho}}{(1-\bar{\varrho})^2}\left[1-(2\bar{\varrho}-\bar{\varrho}^2)^{1/2}\right]. \tag{9.4.62}$$

Величина $\bar{s}_0$, рассчитанная по (9.4.61), (9.4.62), представлена в функции $\bar{\rho}=\rho_\infty/\rho_c$ на рис. 9.4.8, *а*. На участке до значения $\bar{\rho}<0{,}4$ кривая, показанная на рис. 9.4.8, *а* и характеризующая изменение отхода для ударной волны около сферического носка, аппроксимируется простой зависимостью [2]

$$\bar{s}_0=0{,}52\,[\bar{\varrho}/(1-\bar{\varrho})]^{0{,}86}. \qquad (9.4.63)$$

В полученных зависимостях безразмерная плотность $\bar{\rho}=\rho_\infty/\rho_c$ является параметром подобия для относительного отхода $\bar{s}_0=s_0/R_т$ и определяется из условий равновесной диссоциации непосредственно за прямой частью ударной волны.

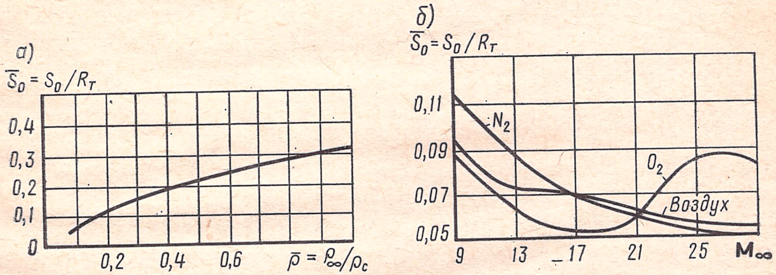


Рис. 9.4.8. Относительный отход ударной волны перед сферическим носком, обтекаемым сверхзвуковым потоком:

а — для воздуха (по аргументу $\bar{\rho}$); *б* — для кислорода, азота и воздуха (по аргументу M_∞; $p_\infty=0{,}01$ атм; $T_\infty=290$ К)

Формула (9.4.63) отражает реальное явление, заключающееся в том, что в условиях диссоциации происходит снижение температуры, вызывающее увеличение плотности. Таким образом, возникает возможность дополнительного поджатия газа и, как следствие, приближения ударной волны к обтекаемой поверхности.

Представляют интерес результаты расчета относительного отхода ударной волны, полученные в работе [2]. Эти результаты графически изображены на рис. 9.4.8, *б* и показывают изменение величины $\bar{s}_0=s_0/R_т$ в зависимости от $\mathbf{M}_\infty$ для случаев обтекания сферы потоками воздуха, кислорода и азота. Видно, что при значениях чисел $\mathbf{M}_\infty=9\div13$, когда изменение теплоемкости воздуха обусловлено в основном диссоциацией кислорода, кривая $\bar{s}_0(\mathbf{M}_\infty)$ для воздуха расположена ближе к соответствующей кривой для кислорода. С увеличением $\mathbf{M}_\infty$ все большее значение начинает иметь диссоциация азота и кривая, характеризующая изменение относительного отхода ударной волны для воздуха, становится ближе к аналогичной кривой для азота, поскольку этот компонент в воздухе преобладающий.

Характер влияния диссоциации и ионизации на отход ударной волны можно выявить достаточно четко на примере чистых газов, таких, как кислород и азот. При $\mathbf{M}_\infty=18$ кислород уже заметно диссоциирован, плотность достигает, как показывают расчеты, максимальной величины, а расстояние $\bar{s}_0$ (рис. 9.4.8, *б*) будет минимальным. С увеличением M_∞ кислород становится полностью диссоциированным, сжатие уменьшается и соответственно возрастает величина отхода ударной волны. Далее с ростом M_∞ происходит первичная ионизация газа, увеличиваются его теплоемкость, а следовательно, и сжатие газа, что приводит к уменьшению величины $\bar{s}_0$. Для азота влияние переменности теплоекости сказывается при значительно бо́льших числах M_∞, чем для кислорода.

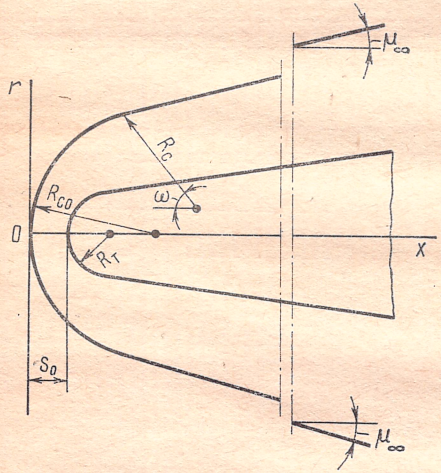


Рис. 9.4.9. Ударная волна перед затупленным по сфере конусом, расположенным в сверхзвуковом потоке

Кроме того, так как процессы диссоциации и ионизации в азоте протекают не последовательно, как в кислороде, а практически одновременно, то немонотонность изменения величин $\bar{s}_0$ для него менее ярко выражена, чем для кислорода.

Для воздуха, представляющего собой объемную смесь (примерно 26% кислорода и 74% азота), характер кривой $\bar{s}_0$, естественно, будет более монотонным, чем для чистого кислорода, что видно из рис. 9.4.8, *б*.

Форму образующей головной ударной волны можно определить расчетом, основанным на решении системы соответствующих газодинамических уравнений сверхзвукового обтекания затупленных тел, а также опытным путем. Интересные результаты по определению параметров такого обтекания и, в частности, формы ударной волны приведены в работе [2].

Как показали расчеты и экспериментальные исследования сверхзвукового обтекания конусов со сферическим затуплением, образующую ударной волны можно с достаточным приближением представить в виде гиперболы

$$(x+a)^2/a^2-r^2/b^2=1, \qquad (9.4.64)$$

построенной на рис. 9.4.9. В уравнении (9.4.64) a и b — полуоси гиперболы, которые можно определить следующим образом. Из аналитической геометрии известно, что радиус кривизны в какой-либо точке кривой, заданной уравнением $r=r(x)$,

$$R=-(1+r'^2)^{3/2}/r'', \qquad (9.4.65)$$

где $r'=dr/dx$, $r''=d^2r/dx^2$.

В соответствии с (9.4.64)

$$r'=\frac{x+a}{r}\cdot\frac{b^2}{a^2}; \quad r''=\frac{1}{r}\cdot\frac{b^2}{a^2}\left[1-\frac{(x+a)^2}{r^2}\cdot\frac{b^2}{a^2}\right],$$

или

$$r'=\left(1+\frac{r^2}{b^2}\right)^{1/2}\frac{b^2}{ra};\quad r''=-b^4/(r^3a^2).$$

Внесем значения этих производных в (9.4.65):

$$R=\frac{b^2}{a}\left[1+\frac{r^2}{b^2}\left(1+\frac{a^2}{b_2}\right)\right]^{3/2}. \qquad (9.4.66)$$

Полагая $r=0$, найдем радиус кривизны R_{c0} на оси:

$$R_{c0}=b^2/a. \qquad (9.4.67)$$

В соответствии с этим (9.4.66) можно переписать в виде

$$R=R_{c0}\left[1+\frac{r^2}{b^2}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\right]^{3/2}. \qquad (9.4.66')$$

Ударная волна вдали от обтекаемого тела, вниз по потоку, должна вырождаться в слабую волну возмущения, наклон которой к направлению скорости набегающего потока определяется углом

$$\theta_c=\mu_\infty=\arcsin(1/\mathbf{M}_\infty)=\operatorname{arctg}(1/\sqrt{\mathbf{M}_\infty^2-1}).$$

Из уравнения гиперболы (9.4.64) следует, что тангенс угла наклона образующей ударной волны в произвольной точке

$$\operatorname{tg}\theta_c=r'=\left(1+\frac{r^2}{b^2}\right)^{1/2}\frac{b^2}{ra}.$$

Переходя к пределу при $r\to\infty$, получим

$$\operatorname*{tg}_{r\to\infty}\theta_c=\operatorname{tg}\mu_\infty=b/a=1/\sqrt{\mathbf{M}_\infty^2-1}. \qquad (9.4.68)$$

Решая совместно (9.4.67), (9.4.68) и определяя

$$b=R_{c0}\sqrt{\mathbf{M}_\infty^2-1},\ a=R_{c0}(\mathbf{M}_\infty^2-1), \qquad (9.4.69)$$

получим, таким образом, возможность рассчитывать координаты ударной волны по (9.4.66′).

Начальный градиент и распределение скорости. В соответствии с (9.4.57) градиент скорости в точке полного торможения (начальный градиент)

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=\tilde{\lambda}=\frac{V_\infty}{R_{c0}}\sqrt{2\bar{\varrho}-\bar{\varrho}^2}. \qquad (9.4.70)$$

Экспериментальная проверка показала, что если в (9.4.70) принять

$$R_{c0}=R_т(1-\tilde{s}_0)^{-1/2}, \qquad (9.4.71)$$

т. е. исходить из выражения, соответствующего предположению о меньшем отклонении от концентричной формы ударной волны вблизи сферической поверхности носка, чем это следует из (9.4.60), то получаемые результаты для начального градиента скорости будут пригодны как для очень высоких, так и для небольших сверхзвуковых скоростей. Расчетная зависимость будет иметь вид

$$\tilde{\lambda}=(V_\infty/R_т)\sqrt{(2\bar{\varrho}-\bar{\varrho}^2)(1-\tilde{s}_0)}. \qquad (9.4.72)$$

Величину $\tilde{s}_0$ можно выразить через относительный отход $\bar{s}_0$, если воспользоваться выражением

$$\bar{s}_0=\frac{s_0}{R_т}=\frac{s_0}{R_{c0}}\cdot\frac{R_{c0}}{R_т}=\frac{\tilde{s}_0}{\sqrt{1-\tilde{s}_0}},$$

согласно которому

$$\tilde{s}_0=-\frac{\bar{s}_0^2}{2}\left(1-\sqrt{1+\frac{4}{\bar{s}_0^2}}\right). \qquad (9.4.73)$$

В этой формуле относительный отход $\bar{s}_0$ можно определять из (9.4.63). Зависимость (9.4.72) пригодна при условии применения выражения (9.4.73) для значений $\bar{\rho}\leqslant 0{,}4$.

Распределение скорости на сферической поверхности носка в окрестности точки полного торможения можно выразить в соответствии с (9.4.70) через начальный градиент скорости $\tilde{\lambda}$:

$$V_x=\tilde{\lambda}x. \qquad (9.4.74)$$

Здесь x определяет длину дуги окружности, которую можно вычислить по известному центральному углу φ как $x=\varphi R_т$. С учетом этого

$$V_x=\tilde{\lambda}R_т\varphi. \qquad (9.4.74')$$

Экспериментальные исследования показали, что зависимость (9.4.74′), соответствующую, строго говоря, условиям обтекания малого участка сферы вблизи точки полного торможения при очень большой скорости набегающего потока, можно применять для расчета скорости на значительно большем участке криволинейной поверхности, а также при сравнительно небольших числах $\mathbf{M}_\infty$. Испытания в аэродинамических трубах при числах $\mathbf{M}_\infty=1{,}2\div4{,}9$ подтвердили линейную зависимость (9.4.74′) скорости от угла $\varphi=0$ до значений $\varphi=50°$ и позволили установить, что имеет место небольшое отклонение от этой зависимости в интервале $50°<\varphi<90°$. В практических расчетах с хорошим приближением можно пользоваться формулой (9.4.74′) для всех значений φ от 0 до 90°.

Применение метода Ньютона для расчета обтекания затупленного конического тела. Этот метод основан на корпускулярной теории Ньютона (называемой также теорией «ньютонова торможения»), согласно которой частицы газа испытывают возмущения только при ударе о твердую стенку и полностью теряют нормальную к стенке составляющую количества движения. Если $\bar{V}_{n\infty}$ — нормальная составляющая вектора скорости набегающего потока, dS — элементарная площадка обтекаемой поверхности (рис. 9.4.10), то для рассматриваемой точки потеря количества движения за единицу времени

$$\varrho_\infty V_{n\infty}(V_{n\infty}-0)\,dS=\varrho_\infty V_{n\infty}^2\,dS.$$

Величина импульса силы от избыточного давления $(p-p_\infty)dS$ за то же время в соответствии с теоремой об импульсе силы определяется потерей количества движения. Следовательно, в данной точке избыточное давление $p-p_\infty=\varrho_\infty V_{n\infty}^2$. Из рис. 9.4.10 видно, что $V_{n\infty}=V_\infty\cos\varphi$, поэтому

$$p-p_\infty=\varrho_\infty V_\infty^2\cos^2\varphi.$$

Разделив левую и правую части этого уравнения на скоростной напор $\varrho_\infty V_\infty^2/2$, получим для коэффициента давления формулу Ньютона

$$\bar{p}=2(p-p_\infty)/(\varrho_\infty V_\infty^2)=2\cos^2\varphi. \qquad (9.4.75)$$

Эта формула соответствует изложенной выше модели обтекания — модели Ньютона, при которой реализуется схема эластичного отражения частиц газа при их взаимодействии с поверхностью. Такая модель имеет недостаток: она не дает принципиально правильного ответа на вопрос о том, как ведут себя частицы газа после соударения. В действительности их скорость после соударения не будет равна касательной к поверхности составляющей вектора скорости набегающего потока, а скорости этих частиц за местом соударения по этой модели не определяются. Таким образом, практически модель Ньютона не рассматривает собственно процесса обтекания тела.

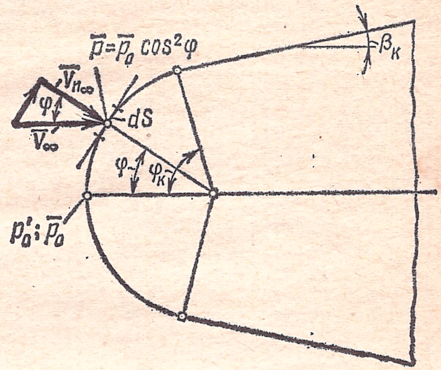


Рис. 9.4.10. К определению давления по методу Ньютона в случае сверхзвукового обтекания затупленной поверхности

От этого недостатка свободна модель Эйлера, предусматривающая изучение течения жидкости около поверхности, т. е. определение в каждой ее точке скорости и других параметров и, как результат, расчет взаимодействия жидкости с обтекаемым телом,

Однако, учитывая простоту и удобство расчетов по теории Ньютона, предпринимались попытки ее усовершенствовать, с тем чтобы улучшить получаемые результаты расчета аэродинамических параметров. Рассмотрим одно из таких усовершенствований. Как видно из формулы (9.4.75), в точке полного торможения, для которой центральный угол $\varphi=0$, коэффициент давления $\bar{p}_0=2$. Таким образом, (9.4.75) можно написать в виде

$$\bar{p}=\bar{p}_0\cos^2\varphi. \qquad (9.4.75')$$

Экспериментальные исследования показали, что если в (9.4.75') вместо значения $\bar{p}_0=2$, которое для реальных потоков не имеет места, взять величину $\bar{p}_0$, полученную либо опытным путем, либо точными теоретическими расчетами, то формула (9.4.75′) будет давать результаты, весьма близкие к действительным на значительном участке сферической поверхности. Формулу (9.4.75′) в отличие от (9.4.75) называют модифицированной или усовершенствованной формулой Ньютона, согласно которой избыточное давление

$$p - p_\infty = (p_0' - p_\infty)\cos^2\varphi,$$

откуда отношение давления p в некоторой точке к давлению p_0' в точке полного торможения

$$p/p_0' = \cos^2\varphi + (p_\infty/p_0')\sin^2\varphi. \tag{9.4.76}$$

Вблизи точки полного торможения течение можно рассматривать с известным приближением как несжимаемое и для его расчета применять уравнение Бернулли

$$V_x^2/2 + p/\varrho = p_0'/\varrho, \tag{9.4.77}$$

где ρ — плотность, полагаемая постоянной в небольшой окрестности точки полного торможения и равной плотности ρ_0' в этой точке.

После подстановки (9.4.77) в (9.4.76) при условии, что $\rho = \rho_0'$, получим

$$\frac{V_x^2}{2} = \frac{p_0'}{\varrho_0'} - \frac{p}{\varrho_0'} = \frac{p_0'}{\varrho_0'}\left[1 - \left(\cos^2\varphi + \frac{p_\infty}{p_0'}\sin^2\varphi\right)\right].$$

Вычислим производную по x:

$$V_x\,\frac{dV_x}{dx} = 2\cos\varphi\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{p_0'}{\varrho_0'}\left(1 - \frac{p_\infty}{p_0'}\right).$$

Переходя к пределу при $\varphi \to 0$, $x \to 0$ и учитывая, что $(\cos\varphi)_{x\to 0} = 1$, $(\sin\varphi)_{x\to 0} = \varphi = x/R_т$, $(V_x/x)_{x\to 0} = (dV_x/dx)_{x\to 0} = \tilde{\lambda}$, $(d\varphi/dx)_{x\to 0} = 1/R_т$, найдем зависимость для начального градиента скорости:

$$\left(\frac{dV_x}{dx}\right)_{x\to 0} = \tilde{\lambda} = \frac{1}{R_т}\sqrt{\frac{2(p_0' - p_\infty)}{\varrho_0'}}. \tag{9.4.78}$$

В соответствии с этой зависимостью для определения начального градиента скорости необходимо знать давление p_0' и плотность ρ_0' в точке полного торможения.

В соответствии с линейным законом, выражаемым зависимостью (9.4.74′), распределение скорости можно представить соотношением

$$V_x = \varphi\sqrt{[2(p_0' - p_\infty)]/\varrho_0'}. \tag{9.4.78′}$$

Наряду с этой формулой для расчета скорости можно применить соотношение, получаемое из уравнения (3.6.26) для давления в изэнтропическом течении. Положим в этом уравнении $p_0 = p_0'$, $V = V_x$ и, наконец, k равной величине $\bar{k}$, рассчитанной для точки полного торможения с учетом влияния температуры T_0' и давления p_0' в этой точке. Решая уравнение относительно скорости V_x, найдем

$$V_x = V_{\max}\left[1-(p/p_0')^{(\bar{k}-1)/\bar{k}}\right]^{1/2}.$$

Для максимальной скорости из (3.6.22) получим

$$V_{\max}^2 = \frac{2}{k_\infty - 1}a_\infty^2 + V_\infty^2,$$

где параметры с индексом «∞» соответствуют невозмущенному течению до ударной волны. Разделив обе части равенства на V_∞^2 и учитывая, что $\mathbf{M}_\infty^2 = V_\infty^2/a_\infty^2$, найдем отношение

$$\frac{V_{\max}^2}{V_\infty^2} = \frac{2}{k_\infty - 1}\cdot\frac{1}{\mathbf{M}_\infty^2} + 1.$$

В соответствии с этим отношением расчетная зависимость для скорости имеет вид

$$\frac{V_x}{V_\infty} = \left(\frac{2}{k_\infty - 1}\cdot\frac{1}{\mathbf{M}_\infty^2} + 1\right)^{1/2}\left[1-\left(\frac{p}{p_0'}\right)^{(\bar{k}-1)/\bar{k}}\right]^{1/2}, \qquad (9.4.79)$$

где p/p_0' определяется при помощи формулы Ньютона (9.4.76).

Еще в большей степени могут быть упрощены расчеты скорости и других параметров газа при помощи таблиц газодинамических функций. Зная закон изменения функции $\pi(\lambda) = p/p_0'$ (9.4.76), можно определить для соответствующего значения $\bar{k}$ по таблицам [6] значения газодинамических функций:

$$\lambda = V_x/a^*,\ \varepsilon = \varrho/\varrho_0' \text{ и } \tau = T/T_0'.$$

Полагая при этом известными критическую скорость звука a^*, а также параметры торможения ρ_0', p_0', T_0', вычисляем в рассматриваемой точке затупленной поверхности следующие величины:

$$V_x = \lambda a^*,\ \varrho = \varepsilon\varrho_0',\ p = \pi p_0',\ T = \tau T_0'.$$

Параметры газа на периферийной конической поверхности, сопрягающейся со сферическим носком, можно с известным приближением принять такими, как на линии сопряжения, т. е. в конце носка. В частности, скорость на конусе можно найти по (9.4.78′), принимая $\varphi = \pi/2 - \beta_к$:

$$V_x = V_к = (\pi/2 - \beta_к)\sqrt{[2(p_0' - p_\infty)]/\varrho_0'}. \qquad (9.4.80)$$

Другое соотношение для скорости на конусе получается из выражения (9.4.79), если принять в нем в соответствии с (9.4.76)

$$\frac{p}{p_0'} = \frac{p_к}{p_0'} = \sin^2\beta_к + \frac{p_\infty}{p_0'}\cos^2\beta_к, \qquad (9.4.81)$$

где $\beta_к = \pi/2 - \varphi_к$ — угол конуса [$\varphi_к$ — центральный угол для полусферы (см. рис. 9.4.10)].

Получаемая таким образом скорость рассматривается на всей поверхности конуса как постоянная величина. Экспериментальные исследования показывают, что реальная скорость несколько отличается от этой величины и распределение скорости носит характер, показанный на рис. 9.4.11. Она возрастает по мере удаления от точки полного торможения и на некотором удалении от места сопряжения носка и конуса достигает максимального значения. Далее вниз по течению скорость снижается, приближаясь на удаленных периферийных участках к значению, соответствующему скорости на заостренном конусе.

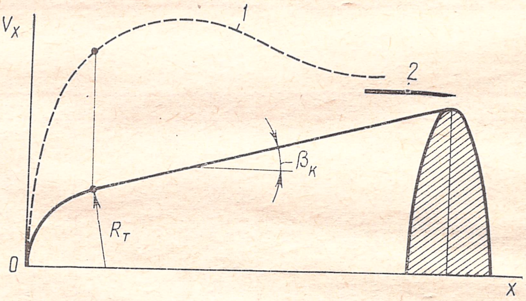


Рис. 9.4.11. Распределение скорости на затупленном конусе, расположенном в сверхзвуковом потоке:

1 — экспериментальная кривая; *2* — скорость на заостренном конусе (теория)

Сопротивление от давления (волновое сопротивление) затупленного конуса можно найти по распределению давления, вычисляя это сопротивление как сумму сопротивлений сферического носка (индекс «сф») и конической части поверхности (индекс «к»):

$$X = X_{сф} + X_к.$$

Полагая в (1.3.2) коэффициент сопротивления $c_{fx} = 0$ и принимая в качестве характерной площади S площадь донного (миделевого) сечения конуса $S = S_{мид} = \pi r^2_{мид}$, получим для носка

$$X_{сф} = q_\infty S_{мид} \int\limits_{S_{сф}} \bar{p} \cos(\widehat{nx}) \frac{dS}{S_{мид}},$$

откуда коэффициент волнового сопротивления

$$(c_{x\,в})_{сф} = \frac{X_{сф}}{q_\infty S_{мид}} = \int\limits_{S_{сф}} \bar{p} \cos(\widehat{nx}) \frac{dS}{S_{мид}}.$$

Из рис. 9.4.12 видно, что $\cos(\widehat{nx}) = \cos\varphi$ и $dS = 2\pi r dl = 2\pi r dr/\cos\varphi$. Но так как $r = R_т \sin\varphi$ и $dr = R_т \cos\varphi d\varphi$, то

$$dS = 2\pi R_т^2 \sin\varphi d\varphi.$$

С учетом приведенных выражений и формулы (9.4.75′) для $\bar{p}$ напишем

$$(c_{x\text{в}})_{\text{сф}}=\frac{X_{\text{сф}}}{q_\infty S_{\text{мид}}}=\int_0^{\varphi_\text{к}}\bar{p}_0\cos^2\varphi\cos\varphi\,\frac{2\pi R_\text{т}^2\sin\varphi}{\pi r_{\text{мид}}^2}\,d\varphi=$$

$$=-\frac{\bar{p}_0 R_\text{т}^2}{r_{\text{мид}}^2}\int_1^{\cos^2\varphi_\text{к}}\cos^2\varphi d\cos^2\varphi=\frac{\bar{p}_0 R_\text{т}^2}{2r_{\text{мид}}^2}\left(1-\cos^4\varphi_\text{к}\right)=$$

$$=\frac{\bar{p}_0 R_\text{т}^2}{r_{\text{мид}}^2}\sin^2\varphi_\text{к}\left(1-\frac{\sin^2\varphi_\text{к}}{2}\right)=\frac{\bar{p}_0 R_\text{т}^2}{r_{\text{мид}}^2}\cos^2\beta_\text{к}\left(1-\frac{\cos^2\beta_\text{к}}{2}\right). \quad (9.4.82)$$

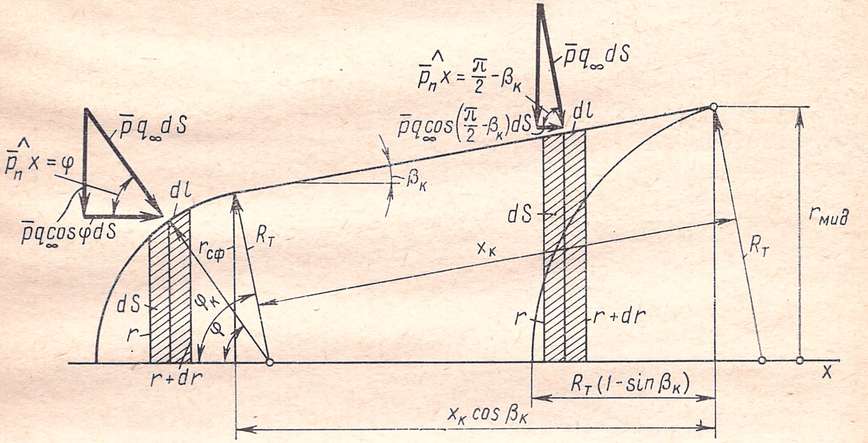

$\bar{p}q_\infty dS$
$\widehat{\bar{p}_n x}=\varphi$
$\bar{p}q_\infty\cos\varphi dS$
dl
dS
r
$r+dr$
$r_{сф}$
R_T
$\varphi_к$
φ
$\widehat{\bar{p}_n x}=\frac{\pi}{2}-\beta_к$
$\bar{p}q_\infty dS$
$\bar{p}q_\infty\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta_к\right)dS$
dl
$\beta_к$
dS
$x_к$
r
$r+dr$
R_T
$r_{мид}$
x
$R_T(1-\sin\beta_к)$
$x_к\cos\beta_к$

Рис. 9.4.12. К расчету аэродинамического сопротивления затупленного конуса

Если в этой формуле принять $r_{\text{мид}}=r_{\text{сф}}$, то получим коэффициент волнового сопротивления затупленного носка, рассчитанный по площади основания $S=\pi r_{\text{сф}}^2$. Учитывая, что $r_{\text{сф}}=R_\text{т}\sin\varphi_\text{к}$ найдем

$$(c_{x\text{в}})_{\text{сф}}=\bar{p}_0\left[1-(\sin^2\varphi_\text{к})/2\right]. \quad (9.4.83)$$

Сопротивление конического участка с боковой поверхностью $S_{\text{бок}}$.

$$X_\text{к}=q_\infty S_{\text{мид}}\int_{S_{\text{бок}}}\bar{p}\cos(\widehat{nx})\,(dS/S_{\text{мид}}).$$

Из рис. 9.4.12 видно, что

$$\cos(\widehat{nx})=\cos[(\pi/2)-\beta_\text{к}]=\sin\beta_\text{к};\ dS=2\pi r dl=2\pi r dr/\sin\beta_\text{к}.$$

Учитывая также, что

$$\bar{p}=\bar{p}_0\cos^2\varphi_\text{к}=\bar{p}_0\cos^2[(\pi/2)-\beta_\text{к}]=\bar{p}_0\sin^2\beta_\text{к};\quad S_{\text{мид}}=\pi r_{\text{мид}}^2,$$

получим для коэффициента сопротивления конического участка

$$(c_{x\text{в}})_\text{к}=\frac{X_\text{к}}{q_\infty S_\text{мид}}=\int\limits_{r_\text{сф}}^{r_\text{мид}}\bar{p}_0\sin^2\beta_\text{к}\sin\beta_\text{к}\,\frac{2\pi r\,dr}{\pi r^2_\text{мид}\sin\beta_\text{к}}=$$
$$=\frac{\bar{p}_0\sin^2\beta_\text{к}}{r^2_\text{мид}}\left(r^2_\text{мид}-r^2_\text{сф}\right).$$

Выражение в круглых скобках согласно рис. 9.4.12:

$$r^2_\text{мид}-r^2_\text{сф}=(r_\text{мид}-r_\text{сф})\left[2r_\text{мид}-(r_\text{мид}-r_\text{сф})\right]=$$
$$=x_\text{к}\sin\beta_\text{к}\left(2r_\text{мид}-x_\text{к}\sin\beta_\text{к}\right).$$

В соответствии с этим

$$(c_{x\text{в}})_\text{к}=\bar{p}_0\sin^3\beta_\text{к}\,\frac{x_\text{к}}{r^2_\text{мид}}\left(2r_\text{мид}-x_\text{к}\sin\beta_\text{к}\right). \qquad (9.4.84)$$

Складывая (9.4.82) и (9.4.84), найдем полный коэффициент сопротивления, отнесенный к площади $S_\text{мид}=\pi r^2_\text{мид}$:

$$c_{x\text{в}}=\frac{X_\text{к}}{q_\infty S_\text{мид}}=(c_{x\text{в}})_\text{сф}+(c_{x\text{в}})_\text{к}=\bar{p}_0\left[\frac{R^2_\text{т}}{r^2_\text{мид}}\cos^2\beta_\text{к}\left(1-\frac{\cos^2\beta_\text{к}}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{x_\text{к}}{r^2_\text{мид}}\sin^3\beta_\text{к}\left(2r_\text{мид}-x_\text{к}\sin\beta_\text{к}\right)\right]. \qquad (9.4.85)$$

В частном случае ($R_\text{т}=0$) получаем коэффициент сопротивления заостренного конуса. Величина этого коэффициента находится из условия, что $\bar{p}_0=2$, $x_\text{к}\sin\beta_\text{к}=r_\text{мид}$:

$$c_{x\text{в}}=(c_{x\text{в}})_\text{к}=2\sin^2\beta_\text{к}. \qquad (9.4.86)$$

Если $x_\text{к}=0$, то обтекаемая поверхность превращается в сферический сегмент высотой $R_\text{т}(1-\sin\beta_\text{к})$ (рис. 9.4.12). Полагая в (9.4.85) $x_\text{к}=0$, придем к формуле (9.4.83) для коэффициента волнового сопротивления такой сферической поверхности. В этой формуле $\varphi_\text{к}=\pi/2-\beta_\text{к}$.

Плоский торец. Результаты теоретического и экспериментального исследования распределения давления по плоскому торцу графически изображены на рис. 9.4.13. Анализ этих результатов позволяет установить общую закономерность для изменения коэффициента давления в виде $\bar{p}=\bar{p}_0 f(\bar{r})$, где $\bar{p}_0$ — коэффициент давления в центре торца, совпадающем с точкой полного торможения, $\bar{r}=r/R_\text{т}$ — безразмерная величина (рис. 9.4.13), $f(\bar{r})$ — некоторая «универсальная» функция, зависящая от $\bar{r}$.

В соответствии с этим коэффициент волнового сопротивления торца

$$(c_{x\text{в}})_\text{п}=\bar{p}_0\int\limits_0^1 f(\bar{r})\,d\bar{r}^2.$$

Полагая, что «универсальная» функция $f(\bar r)$ пригодная для любых сверхзвуковых скоростей, интеграл в приведенной формуле можно вычислить и получить зависимость

$$(c_{x\text{в}})_{\text{п}} = 0{,}915\bar{p}_0. \tag{9.4.87}$$

Эта величина примерно вдвое превышает коэффициент сопротивления полусферы, значение которого в соответствии с (9.4.83) определяется соотношением $(c_{x\text{в}})_{\text{сф}} = 0{,}5\bar{p}_0$ (при $\varphi_\text{к}=\pi/2$).

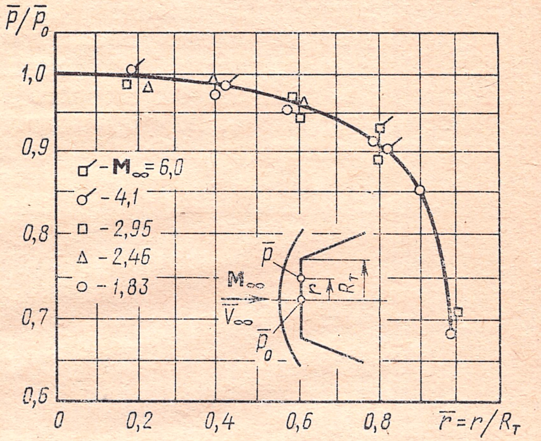


Рис. 9.4.13. Распределение давления по плоскому торцу

Отход ударной волны от плоского торца больше, чем от сферы. Ориентировочная оценка приводит к заключению, что если для сферического носка величина $\bar s_0 = s_0/R_\text{т}$ имеет порядок отношения плотностей $\bar\rho = \rho_\infty/\rho'_0$, то в случае плоского затупления $\bar s_0 \sim \sqrt{\bar\rho}$. В соответствии с экспериментальными данными относительный отход

$$\bar{s}_0 = s_0/R_\text{т} = 1{,}03\sqrt{\bar\varrho/(1-\bar\varrho)}. \tag{9.4.88}$$

Радиус кривизны волны на оси, определяющий ее форму вблизи торца, оказывается, как и отход, пропорциональным радиусу плоского затупления. Согласно экспериментальным исследованиям,

$$\bar R_{c0} = \frac{R_{c0}}{R_\text{т}} = 0{,}52\,(3-\bar\varrho)\,[\bar\varrho\,(1-\bar\varrho)]^{-1/2}. \tag{9.4.89}$$

Нетрудно видеть, что в соответствии с (9.4.89) при $\bar\rho \to 0$ величина $R_{c0} \to \infty$, так как волна в пределе соприкасается с плоской поверхностью торца.

Рассмотрим градиент скорости в центре торца, совпадающем с точкой полного торможения. Как показывают исследования, его величина в этой точке не равна нулю. Можно предположить, что плоский торец влияет на течение в окрестности точки полного торможения аналогично сферической поверхности некоторого радиуса $R_\text{т}^\text{э}$. Следовательно, возможно подобрать такой эквивалентный радиус сферы $R_\text{т}^\text{э}$, при котором кривизна волны на оси будет приблизительно одинаковой с ее значением перед торцом. Тогда $(\bar R_{c0})_\text{п} R_\text{т} = (\bar R_{c0})_\text{сф} R_\text{т}^\text{э}$, где $R_\text{т}$ — радиус торца. В соответствии с (9.4.78) градиент скорости в центре торца

$$\tilde{\lambda}=\frac{1}{R_{\text{т}}^{\text{э}}}\sqrt{\frac{2(p_0'-p_\infty)}{\varrho_0'}}, \qquad (9.4.90)$$

где $R_{\text{т}}^{\text{э}}=R_{\text{т}}(\bar{R}_{\text{c0}})_{\text{п}}/(\bar{R}_{\text{c0}})_{\text{сф}}$, причем $(\bar{R}_{\text{c0}})_{\text{п}}=(R_{\text{c0}}/R_{\text{т}})_{\text{п}}$ находится по (9.4.89), а $(\bar{R}_{\text{c0}})_{\text{сф}}=(R_{\text{c0}}/R_{\text{т}})_{\text{сф}}$ — из (9.4.71). Экспериментальные исследования показывают, что при больших скоростях формула (9.4.90) дает достаточно удовлетворительные результаты.

Сопротивление тонкого конуса с малым затуплением. Соотношение (9.4.85) соответствует предположению о таком обтекании затупленного тела, при котором скорость и давление на конической поверхности будут теми же, что и в конце сферического носка. В реальных условиях это явление не имеет места, однако с известным приближением такое предположение может быть оправдано для достаточно толстого конуса. Рассматриваемое явление соответствует наблюдаемому в эксперименте быстрому восстановлению коэффициента давления до значения на заостренной конической поверхности $\bar{p}_{\text{к}}$ (при большой скорости $\bar{p}_{\text{к}}=2\sin^2\beta_{\text{к}}$). Например, для затупленного по сфере 40° конуса при $\mathbf{M}_\infty=6$ такое восстановление происходит на расстоянии от носка, несколько большем его диаметра. Это явление особенно ярко выражено при умеренных числах $\mathbf{M}_\infty$. Влияние на полное сопротивление участка поверхности вблизи носка из-за малой величины этого участка невелико и поэтому давление на нем можно принять таким, как на остальной конической поверхности.

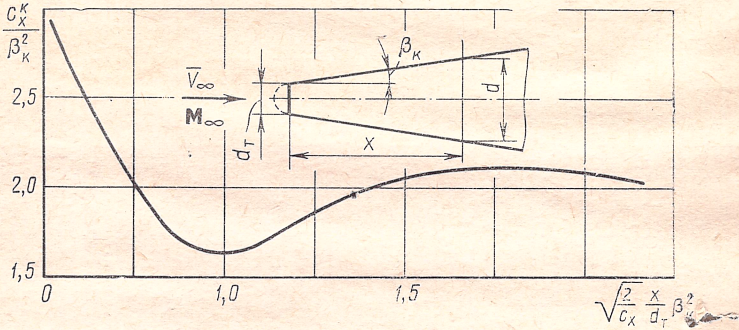


Рис. 9.4.14. Коэффициент сопротивления тонкого затупленного конуса

Однако, как показывают исследования, у слабо затупленных тонких тел величина давления на конической части оказывается существенно меньше его величины на остром конусе, причем по мере удаления от носка оно сравнительно медленно восстанавливается до величины давления на остром конусе (см. рис. 9.4.5). При этом по мере увеличения сверхзвуковых скоростей влияние затупления на распределение давления возрастает. Затупленный носок оказывает воздействие на течение в возмущенной области длиной в десятки и сотни диаметров затупления, причем чем тоньше тело, тем протяженней эта область и, следовательно, эффективней воздействие затупления. К сказанному следует добавить, что эффект затупления зависит от вида носка, например он значительно больше для плоского торца, чем для сферы. Аэродинамические исследования тонких затупленных конических тел осуществлены проф. Г. Г. Черным [24]. На рис. 9.4.14 приведен график, построенный по данным этих исследований, позволяющий рассчитать коэффициент сопротивления конуса с затуплением произвольной формы $[c_x^{\text{к}}=4X^{\text{к}}/(q_\infty \pi d_{\text{т}}^2)]$. Из этого графика видно, что при некоторой длине конуса его сопротивление становится минимальным. Минимум коэффициента сопротивления достигается в соответствии с графиком, изображенным на рис. 9.4.14, при относительной длине конуса $x/d_{\text{т}}=(0{,}68/\beta_{\text{к}}^2)\,c_x^{1/2}$ (где c_x — коэффициент сопротивления затупления, отнесенный к площади $\pi d^2{}_{\text{т}}/4$). По сравнению с соответствующим значением для острого конуса минимальная величина коэффициента сопротивления меньше примерно на 10%.

ГЛАВА X

ЗАОСТРЕННОЕ ТЕЛО ВРАЩЕНИЯ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

§ 10.1. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК

Летательный аппарат (например ракета, снаряд) или некоторые его конструктивные элементы могут иметь форму заостренного тела вращения. Рассмотрим расчет сверхзвукового обтекания заостренного тела вращения, расположенного в потоке газа под нулевым углом атаки. Форма тела вращения (рис. 10.1.1) задана уравнением образующей $r=f(x)$. Известны также параметры набегающего потока (M_∞, p_∞, ρ_∞, T_∞). Если толщина тела вращения такова, что оно вносит в обтекающий поток большие возмущения, то расчет этого потока может быть осуществлен по методу характеристик.

Расчет обычно начинают с определения конического потока около острия, которое в малой окрестности носка можно заменить конусом (на рис. 10.1.1 его границей является точка K). В результате расчета на образующих OD, OA и т. д. промежуточных конических поверхностей (включая образующие конуса OK и скачка OS) находят скорости, а также углы ω, μ и β. При этом углы θ наклона образующих промежуточных конусов выбирают произвольно, но так, чтобы интервалы $\Delta\theta$ были достаточно малы и обеспечивали заданную точность рассчитываемых параметров.

Расчеты целесообразно сопровождать графическим построением сетки характеристик, как это показано на рис. 10.1.1. Вначале строят элемент KD характеристики первого семейства, проведя через точку K прямую под углом $\mu_K+\beta_K$ (где $\beta_K=\beta_o$) к оси конуса до пересечения в точке D с соседней образующей промежуточной конической поверхности, имеющей угол θ_D. В результате графически определяют координаты x_D, r_D точки D.

Бо́льшую точность получают при аналитическом определении этих координат. С этой целью напишем уравнение для элемента характеристики первого семейства

$$r_K - r_D = (x_K - x_D)\operatorname{tg}(\mu_K + \beta_K) \qquad (10.1.1)$$

и уравнение образующей

$$r_D = x_D \operatorname{tg}\theta_D. \qquad (10.1.2)$$

Решая эти уравнения, находим неизвестные x_D и r_D. Аналогично вычисляют координаты остальных точек характеристики KS первого семейства, имеющей вид ломаной линии, которая является границей конического потока. Причем координаты x_S, r_S точки S, лежащей на пересечении элемента характеристики первого семейства ES с образующей OS конического скачка уплотнения, находятся в результате совместного решения уравнений:

$$r_E - r_S = (x_E - x_S)\,\mathrm{tg}\,(\mu_E + \beta_E); \qquad (10.1.3)$$

$$r_S = x_S\,\mathrm{tg}\,\theta_S. \qquad (10.1.4)$$

Получаемые указанным способом координаты точек характеристики KS соответствуют углам μ и β, принимаемым постоянными вдоль каждого из рассматриваемых элементов характеристики и равными значениям этих углов в начале элемента.

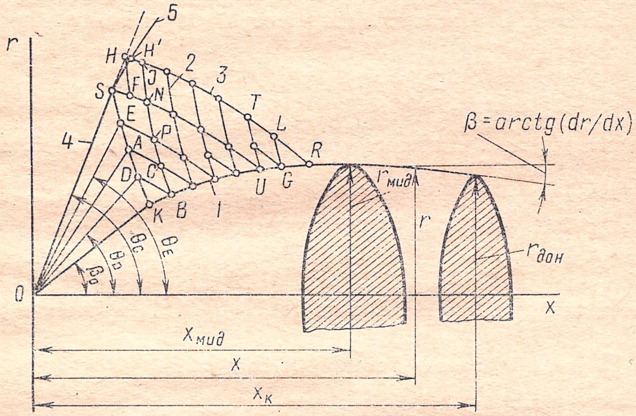


Рис. 10.1.1. Схема расчета сверхзвукового обтекания тела вращения по методу характеристик:

1 — образующая тела вращения; *2* — характеристика первого семейства; *3* — характеристика второго семейства; *4* — прямолинейный скачок; *5* — искривленный участок скачка

Для получения более точных данных можно вести расчет координат по средним значениям углов μ и β между крайними точками элемента характеристики. Тогда, в частности, вместо (10.1.1) запишем

$$r_K - r_D = (x_K - x_D)\,\mathrm{tg}\,[(1/2)\,(\mu_K + \mu_D + \beta_K + \beta_D)], \qquad (10.1.1')$$

а вместо (10.1.3)

$$r_E - r_S = (x_E - x_S)\,\mathrm{tg}\,[(1/2)\,(\mu_E + \mu_S + \beta_E + \beta_S)]. \qquad (10.1.3')$$

В этих уравнениях x_D, r_D и x_S, r_S — уточненные координаты точек D и S.

После того как определены вид кривой характеристики KS, скорости, числа **M**, углы μ и β в точках этой характеристики, дальнейшее решение задачи сводится к нахождению поля скоростей (чисел **M**) в области между этой характеристикой и образующей обтекаемого тела. С этой целью применяются соответствующие соотношения для характеристик в физической плоскости (плоскости потока) и в плоскости годографа.

При выборе соотношений для характеристик в плоскости годографа необходимо учитывать, что в области потока, ограниченной прямолинейной образующей скачка уплотнения OS, характеристикой второго семейства SU (строящейся постепенно в ходе решения задачи) и образующей тела OU, течение будет безвихревым (изэнтропическим). В соседней области, ограниченной той же характеристикой SU, участками криволинейного скачка SH и образующей тела UR, течение будет вихревым (неизэнтропическим).

Для отыскания поля скоростей на изэнтропическом участке течения проведем через каждую точку характеристики KS элементы характеристики второго семейства. Одна из них, проходящая через точку D, пересечет стенку в точке B, в которой и необходимо найти скорость. Координаты этой точки определяются из совместного решения уравнения для элемента характеристики второго семейства

$$r_D - r_B = (x_D - x_B)\,\mathrm{tg}\,(\beta_D - \mu_D) \tag{10.1.5}$$

и уравнения образующей тела

$$r_B = f\,(x_B). \tag{10.1.6}$$

Решая уравнения (10.1.5) и (10.1.6), находим координаты точки $B(x_B, r_B)$. Угол β_B наклона касательной к образующей в точке B, совпадающий в силу безотрывного обтекания с углом наклона вектора скорости в этой точке, определяется из уравнения

$$(dr/dx)_B = \mathrm{tg}\,\beta_B = [df\,(x)/dx]_{x=x_B}. \tag{10.1.7}$$

Чтобы найти скорость в точке B, воспользуемся уравнением (5.4.9). Это уравнение, записанное в конечных разностях при $y=r$, $\varepsilon=1$ (осесимметричное течение), примет вид

$$\Delta\omega_D + \Delta\beta_D - \frac{x_B - x_D}{r_D}\,m_D = 0. \tag{10.1.8}$$

В этом уравнении приращение $\Delta\beta_D = \beta_B - \beta_D$ представляет собой разность углов наклона векторов скоростей в точках B и D. При этом в соответствии с (10.1.7)

$$\beta_B = \mathrm{arctg}\,[(dr/dx)_B]. \tag{10.1.7$'$}$$

Из (10.1.8) находим, учитывая, что $\Delta\omega_D = \omega_B - \omega_D$, угол

$$\omega_B = \omega_D - (\beta_B - \beta_D) + \frac{x_B - x_D}{r_D}\,m_D, \tag{10.1.9}$$

где в соответствии с (5.4.6)

$$m_D = \sin\beta_D \sin\mu_D / \cos(\beta_D - \mu_D). \tag{10.1.10}$$

Угол ω_D, входящий в (10.1.9), находится из табл. 5.3.1 по значению числа $\mathbf{M}_D$ в точке D. Вычислив ω_B по (10.1.9), определяем при помощи той же табл. 5.3.1 соответствующие величине ω_B значения числа $\mathbf{M}_B$ и угла $\mu_B = \arcsin\,(1/M_B)$ в точке B. Затем по найденным числам M можно вычислить давления.

Определим сначала давление p_K в точке K, которой соответствует число $\mathbf{M}_K$:

$$p_K = p_0'\left(1 + \frac{k-1}{2}\,\mathbf{M}_K^2\right)^{-k/(k-1)} = p_0'\,\pi\,(\mathbf{M}_K), \tag{10.1.11}$$

где давление торможения за коническим скачком

$$p_0' = p_0 \nu_0, \tag{10.1.12}$$

определяется по давлению торможения p_0 (3.6.29) до скачка и значению функции ν_0, вычисляемому из (9.2.26) по углу скачка θ_c и числу $\mathbf{M}_\infty$.

Давление в точке B

$$p_B = p_0'\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_B^2\right)^{-k/(k-1)} = p_0'\pi\,(\mathbf{M}_B). \tag{10.1.13}$$

Функции $\pi(\mathbf{M}_K)$ и $\pi(\mathbf{M}_B)$ в (10.1.11) и (10.1.13) определяются соответственно по значениям чисел $\mathbf{M}_K$ и $\mathbf{M}_B$ из таблиц, помещенных в [6].

Коэффициенты давления:

$$\bar{p}_K = 2\left(p_K - p_\infty\right)/\left(k\mathrm{M}_\infty^2 p_\infty\right) \text{ и } \bar{p}_B = 2\left(p_B - p_\infty\right)/\left(k\mathrm{M}_\infty^2 p_\infty\right). \qquad (10.1.14)$$

Скорость, температура и плотность определяются соответственно из соотношений:

$$\frac{V_{K(B)}}{V_{\max}} = \left\{1 - \left[\frac{p_{K(B)}}{p_0'}\right]^{(k-1)/k}\right\}^{1/2}; \qquad (10.1.15)$$

$$\frac{T_{K(B)}}{T_0} = \left[1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_{K(B)}^2\right]^{-1}; \qquad (10.1.16)$$

$$\frac{\varrho_{K(B)}}{\varrho_0} = \left[\frac{T_{K(B)}}{T_0}\right]^{1/(k-1)} \nu_0, \qquad (10.1.17)$$

где ρ_0 и T_0 находятся по параметрам набегающего потока соответственно по формулам (3.6.34), (3.6.35), а максимальная скорость в соответствии с (3.6.22)

$$V_{\max} = \left(V_\infty^2 + \frac{2}{k-1}\, a_\infty^2\right)^{1/2}. \qquad (10.1.18)$$

Рассчитав параметры в точке B, проводим через нее элемент характеристики первого семейства до пересечения в точке C с прямолинейным участком характеристики второго семейства, выходящей из точки A (см. рис. 10.1.1). Координаты точки C определяются из решения уравнений элементов AC и BC характеристик. Уравнение элемента AC характеристики имеет вид

$$r_A - r_C = \left(x_A - x_C\right)\operatorname{tg}\left(\beta_A - \mu_A\right), \qquad (10.1.19)$$

а уравнение элемента BC

$$r_B - r_C = \left(x_B - x_C\right)\operatorname{tg}\left(\beta_B + \mu_B\right). \qquad (10.1.20)$$

Решая совместно эти уравнения, находим координаты точки C $(x_C,\ r_C)$. Чтобы найти в этой точке углы β_C и ω_C, надо воспользоваться уравнениями для характеристик (5.4.8) и (5.4.9). Записывая эти уравнения в конечных разностях и полагая $\varepsilon = 1$, получим:

$$\Delta\omega_B - \Delta\beta_B - \frac{x_C - x_B}{r_B}\, l_B = 0; \qquad (10.1.21)$$

$$\Delta\omega_A + \Delta\beta_A - \frac{x_C - x_A}{r_A}\, m_A = 0, \qquad (10.1.22)$$

где в соответствии с (5.4.5) и (5.4.6)

$$\left.\begin{aligned} l_B &= \sin\beta_B \sin\mu_B/\cos\left(\beta_B + \mu_B\right); \\ m_A &= \sin\beta_A \sin\mu_A/\cos\left(\beta_B - \mu_A\right). \end{aligned}\right\} \qquad (10.1.23)$$

Вместо четырех неизвестных $\Delta\omega_B$, $\Delta\omega_A$, $\Delta\beta_B$ и $\Delta\beta_A$ в уравнениях (10.1.21), (10.1.22) можно рассматривать в соответствии с (5.4.20) лишь две неизвестные величины: $\Delta\omega_B$ и $\Delta\beta_B$ (или $\Delta\omega_A$ и $\Delta\beta_A$).

С учетом соотношений (5.4.20) уравнение (10.1.22) преобразуется к виду

$$\Delta\omega_B + \omega_B - \omega_A + \Delta\beta_B + \beta_B - \beta_A - \frac{x_C - x_A}{r_A}\, m_A = 0. \qquad (10.1.24)$$

Решая это уравнение совместно с (10.1.21) относительно переменной $\Delta\beta_B$, получим

$$\Delta\beta_B = \frac{1}{2}\left[\frac{x_C - x_A}{r_A}\, m_A - \frac{x_C - x_B}{r_B}\, l_B - (\omega_B - \omega_A) - (\beta_B - \beta_A)\right]. \quad (10.1.25)$$

По найденному значению $\Delta\beta_B$ находим из (10.1.21) угловое приращение:

$$\Delta\omega_B = \Delta\beta_B + \frac{x_C - x_B}{r_B}\, l_B. \quad (10.1.21')$$

Абсолютные значения углов в точке C следующие:

$$\beta_C = \Delta\beta_B + \beta_B, \quad \omega_C = \Delta\omega_B + \omega_B. \quad (10.1.26)$$

По величине ω_C из табл. 5.3.1 находим число $\mathbf{M}_C$ и угол возмущения $\mu_C = \arcsin(1/\mathbf{M}_C)$. По числу $\mathbf{M}_C$ при необходимости могут быть найдены другие параметры, а именно: давление, плотность, температура, скорость.

Вычисляемые таким образом параметры представляют собой первое приближение, так как вдоль элементов характеристик коэффициенты l и m, а также радиальные координаты принимались постоянными и равными их соответствующим значениям в точках A и B. Эти параметры можно уточнить, если в уравнения (10.1.21) и (10.1.22) подставить вместо l_B, m_A, r_B, r_A величины, вычисленные как средние между заданными в точках A и B и полученными в точке C в первом приближении. Для этих средних величин имеем соотношения:

$$l'_B = \sin\beta'_B \sin\mu'_B / \cos(\beta'_B + \mu'_B), \quad m'_A = \sin\beta'_A \sin\mu'_A / \cos(\beta'_A - \mu'_A); \quad (10.1.23')$$

$$r'_B = (r_B + r_C)/2, \quad r'_A = (r_A + r_C)/2, \quad (10.1.27)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \beta'_B &= (\beta_B + \beta_C)/2; \quad \mu'_B = (\mu_B + \mu_C)/2; \\ \beta'_A &= (\beta_A + \beta_C)/2, \quad \mu'_A = (\mu_A + \mu_C)/2. \end{aligned}\right\} \quad (10.1.28)$$

Продолжая аналогичные расчеты, можно определить параметры во всех точках второго ряда, включая точку N, лежащую на пересечении элементов PN характеристики первого семейства и SN характеристики второго семейства, проведенной из конца прямолинейного конического скачка уплотнения.

Дальнейший расчет заключается в том, чтобы найти параметры в точке пересечения элемента характеристики первого семейства, проведенной через точку N с продолжением скачка за точкой S. Практически в целях получения лучшего приближения характеристику проводят не через точку N, а через точку F, расположенную между точками N и S (см. рис. 10.1.1). Координаты x_F, r_F точки F выбираются таким образом, чтобы элемент FH характеристики, примыкающий к скачку, был достаточно малым и мог рассматриваться в виде прямолинейного участка. Параметры в точке $F(\omega, \mathbf{M}, \mu, \beta)$ вычисляют по известным их значениям в точках S и N линейной интерполяцией. Например,

$$\omega_F = \omega_S + (\omega_N - \omega_S)\,\frac{x_F - x_S}{x_N - x_S}. \quad (10.1.29)$$

Уравнение элемента FH характеристики первого семейства будет

$$r_F - r_H = (x_F - x_H)\,\mathrm{tg}\,(\beta_F + \mu_F). \quad (10.1.30)$$

Решая это уравнение совместно с уравнением прямолинейной образующей скачка $r_H = x_H\,\mathrm{tg}\,\theta_C$, определим координаты x_H, r_H и найдем тем самым в первом приближении положение точки H на скачке уплотнения. Эти координаты должны быть уточнены, так как реальный скачок за точкой S будет искривлен. Действительно, характеристики первого семейства (ES, FH и др.) являются по своей природе волнами разрежения. Встречая скачок уплотнения, эти волны уменьшают его интенсивность и, следовательно, наклон, в результате скачок искривляется.

Течение за таким скачком уплотнения будет вихревым (неизэнтропическим), поэтому для определения скорости в точке H необходимо использовать уравнение (5.4.41) для элемента FH характеристики первого семейства, учитывающее изменение энтропии за криволинейным скачком. Полагая в этом уравнении $y_F = r_F$, $\varepsilon = 1$ (осесимметричное течение) и решая его относительно $\Delta\beta_F$ совместно с (5.4.38), получим зависимость (5.4.46), в которой принято $\varepsilon = 1$ и $y_F = r_F$:

$$\Delta\beta_F = \left[\left(\frac{d\omega}{d\beta}\right)_S - 1\right]^{-1}\left(\omega_F - \omega_S + \frac{x_H - x_F}{r_F}\, l_F - \frac{x_H - x_F}{kR}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta n}\, c_F\right), \qquad (10.1.31)$$

где производная $(d\omega/d\beta)_S$ находится (по 5.4.39), а коэффициенты l_F, c_F вычисляются по соответствующим формулам (5.4.42).

В формулу (10.1.31) входит величина ΔS, определяющая изменение энтропии при переходе от точки H к точке F. Расчеты в первом приближении предполагают, что точка H расположена на продолжении прямолинейной образующей скачка. Поэтому можно было бы принять изменение энтропии равными нулю, т. е. $\Delta S = 0$. Но это предположение снижает точность расчетов, так как в действительности точка H располагается на искривленном участке скачка (H'). Лучшие результаты получаются, если принять, что энтропия (или давление торможения) в точке H не равна ее значению в точке F.

Расчет в первом приближении давления торможения p'_{0H} в точке H ведется следующим образом. Примем, что угол β'_H отклонения потока за скачком уплотнения в точке H равен углу наклона вектора скорости в точке F. По значению угла $\beta'_H = \beta_F$ можно определить соответствующий угол скачка θ'_{cH}. Для этой цели воспользуемся формулой (4.3.25), которую запишем в виде

$$\frac{\operatorname{tg}\theta'_{cH}}{\operatorname{tg}\left(\theta'_{cH} - \beta'_H\right)} = \frac{M_\infty^2 \sin^2\theta'_{cH}}{1 - \delta + \delta M_\infty^2 \sin\theta'_{cH}}. \qquad (10.1.32)$$

При заданных значениях β_H', M_∞ и $\delta = (k-1)/(k+1)$ это трансцендентное уравнение решается относительно θ'_{cH} путем последовательных приближений. По значению θ'_{cH} можно определить, используя формулу (10.1.12), давление торможения p'_{0F} в точке H. Принимая, что в точке F давление торможения p'_{0F} равно давлению торможения p'_{0S} в точке S, рассчитанному по углу скачка θ_{cS} при помощи формулы (4.3.22), можно найти отношение

$$\left(p'_{0H} - p'_{0F}\right)/p'_{0F} = \left(p'_{0H} - p'_{0S}\right)/p'_{0S}.$$

Внося это отношение в (5.4.45), определим градиент энтропии $\Delta S/\Delta n$, входящий в формулу (10.1.31). Определив по этой формуле значение $\Delta\beta_F$, находим, используя (5.4.41) при $y_F = r_F$ и $\varepsilon = 1$, приращение угла:

$$\Delta\omega_F = \Delta\beta_F + \frac{x_H - x_F}{r_F}\, l_F - \frac{x_H - x_F}{kR}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta n}\, c_F. \qquad (10.1.33)$$

По $\Delta\beta_F$ и $\Delta\omega_F$ определяем для точки H углы:

$$\beta_H = \beta_{H'} = \Delta\beta_F + \beta_F,\quad \omega_H = \omega_{H'} = \Delta\omega_F + \omega_F. \qquad (10.1.34)$$

Из табл. 5.3.1 по углу $\omega_{H'}$ находим $M_{H'}$ и $\mu_{H'}$. По найденному значению $\beta_{H'}$ можно уточнить по формуле (10.1.32) угол наклона скачка в точке H и найти во втором приближении координаты $x_{H'}$, $r_{H'}$ новой точки H'. Для этой цели напишем уравнение для участка скачка за точкой S

$$r_S - r_{H'} = (x_S - x_{H'})\operatorname{tg}\theta_{cH'} \qquad (10.1.35)$$

и уравнение элемента характеристики первого семейства

$$r_F - r_{H'} = (x_F - x_{H'})\operatorname{tg}\left(\beta'_F + \mu'_F\right), \qquad (10.1.36)$$

в котором углы β_F' и μ_F' выбраны средними значениями:

$$\beta_F' = \frac{\beta_F + \beta_{H'}}{2}, \quad \mu_F' = \frac{\mu_F + \mu_{H'}}{2}.$$

Решая совместно (10.1.35), (10.1.36), находим уточненные координаты $x_{H'}$, $r_{H'}$. При необходимости можно осуществить расчет параметров в точке $H'(\omega_{H'}$, $M_{H'}$, $\mu_{H'}$ и $\beta_{H'})$ в третьем приближении.

Полученные данные о параметрах в точках H' и N позволяют рассчитать параметры в точке J (см. рис. 10.1.1). Этот расчет аналогичен решению первой задачи (см. § 5.4), связанной с определением скорости в точке пересечения характеристик разных семейств, выходящих из двух близко расположенных точек.

Координаты x_J, r_J точки J определяют в результате решения уравнений (5.4.10), (5.4.12), записанных соответственно для элементов NJ и $H'J$ характеристик первого и второго семейств:

$$r_N - r_J = (x_N - x_J)\,\mathrm{tg}\,(\beta_N + \mu_N); \tag{10. 1. 37}$$

$$r_{H'} - r_J = (x_{H'} - x_J)\,\mathrm{tg}\,(\beta_{H'} - \mu_{H'}). \tag{10. 1. 38}$$

Для вычисления параметров в точке J, расположенной в вихревой области потока, необходимо применить соотношения для характеристик в плоскости годографа скорости, учитывающие изменения энтропии. Эти уравнения, записанные в конечных разностях, имеют вид (5.4.11) и (5.4.13). Уравнение (5.4.11), записанное для $\varepsilon=1$ и $y=r$ с учетом обозначений, принятых для элемента NJ характеристики первого семейства, будет иметь следующий вид:

$$\Delta\omega_N - \Delta\beta_N - \frac{x_J - x_N}{r_N}\, l_N + \frac{x_J - x_N}{kR} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta n}\, c_N = 0. \tag{10. 1. 39}$$

Для элемента $H'J$ характеристики второго семейства используем уравнение (5.4.13):

$$\Delta\omega_{H'} + \Delta\beta_{H'} - \frac{x_J - x_{H'}}{r_{H'}}\, m_{H'} - \frac{x_J - x_{H'}}{kR}\, \frac{\Delta S}{\Delta n}\, t_{H'} = 0, \tag{10. 1. 40}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Delta\omega_N &= \omega_J - \omega_N, \quad \Delta\beta_N = \beta_J - \beta_N; \\ \Delta\omega_{H'} &= \omega_J - \omega_{H'}, \quad \Delta\beta_{H'} = \beta_J - \beta_{H'}. \end{aligned}\right\} \tag{10. 1. 41}$$

Для определения коэффициентов l_N, c_N, $m_{H'}$, $t_{H'}$ следует воспользоваться формулами (5.4.15), в которых параметры с индексами «B» и «A» заменяются соответственно параметрами с индексами «N» и «H'». Градиент энтропии $\Delta S/\Delta n$ вычисляется с использованием соотношений (5.4.16) или (5.4.18), в которых следует заменить индексы «B» и «A» соответственно на «N» и «H'». При этом давления торможения $p'_{0H'}$ для точки H' и p'_{0N} для точки N определяют по формуле (4.3.22) соответственно по значениям углов скачка $\theta_{cH'}$ и $\theta_{cs}(\theta_{cH'} < \theta_{cs})$.

Система уравнений (10.1.39), (10.1.40) включает четыре неизвестные величины: $\Delta\omega_N$, $\Delta\beta_N$, $\Delta\omega_{H'}$, $\Delta\beta_{H'}$. Число неизвестных можно сократить до двух, если учесть соотношения (5.4.20), по аналогии с которыми

$$\Delta\omega_{H'} = \Delta\omega_N + \omega_N - \omega_{H'}; \quad \Delta\beta_{H'} = \Delta\beta_N + \beta_N - \beta_{H'}. \tag{10. 1. 42}$$

Произведем соответствующую замену в (10.1.40):

$$\Delta\omega_N + \omega_N - \omega_{H'} + \Delta\beta_N + \beta_N - \beta_{H'} - \frac{x_J - x_H}{r_{H'}}\, m_{H'} - \frac{x_J - x_{H'}}{kR} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta n}\, t_{H'} = 0. \tag{10. 1. 40'}$$

Решая это уравнение совместно с (10.1.39) относительно $\Delta\beta_N$, найдем

$$\Delta\beta_N = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{kR}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta n}\left[(x_J - x_{H'})\,t_{H'} + (x_J - x_N)\,c_N\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{x_J - x_{H'}}{r_{H'}}\,m_{H'} - \frac{x_J - x_N}{r_N}\,l_N - (\omega_N - \omega_{H'}) - (\beta_N - \beta_{H'})\right\}. \quad (10.1.43)$$

По найденному значению $\Delta\beta_N$ вычисляют из (10.1.39) угловое приращение:

$$\Delta\omega_N = \Delta\beta_N + \frac{x_J - x_N}{r_N}\,l_N - \frac{x_J - x_N}{kR}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta n}\,c_N. \quad (10.1.44)$$

По $\Delta\omega_N$ и $\Delta\beta_N$ определяют абсолютные значения углов в точке J:

$$\omega_J = \Delta\omega_N + \omega_N;\ \beta_J = \Delta\beta_N + \beta_N.$$

Из табл. 5.3.1 находят по ω_J число $\mathbf{M}_J$ и угол возмущения μ_J. Давление торможения p'_{0J} (энтропия S_J) в точке J находят интерполяцией по значениям $p''_{0H'}$ и p'_{0N} в точках H' и N.

Вычисленные параметры можно уточнить, если в уравнения (10.1.39), (10.1.40) подставить вместо l_N, m_H', c_N, t_H' величины, вычисленные по средним значениям углов β и μ в соответствии с формулами (5.4.25).

Так, шаг за шагом, определяют координаты точек H', J, ..., L характеристики второго семейства, а также газодинамические параметры в этих точках. Используя найденные параметры в точке L, можно определить скорость и другие параметры в точке R, расположенной на поверхности обтекаемого тела. Координаты точки R определяют в результате решения уравнения для элемента LR характеристики второго семейства

$$r_L - r_R = (x_L - x_R)\,\mathrm{tg}\,(\beta_L - \mu_L) \quad (10.1.45)$$

и уравнения образующей тела $r_R = f(x_R)$. Решение этих уравнений дает значения x_R, r_R.

Точка R расположена в вихревой области потока на пересечении элемента LR характеристики второго семейства и образующей тела, поэтому для расчета скорости надо воспользоваться уравнением (5.4.27). Приняв в нем $\varepsilon = 1$ и заменив y на r, а индекс «D» на «L», напишем

$$\Delta\omega_L = -\Delta\beta_L + \frac{x_R - x_L}{r_L}\,m_L - \frac{x_R - x_L}{kR}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta n}\,t_L, \quad (10.1.46)$$

где

$$\Delta\omega_L = \omega_R - \omega_L;\ \Delta\beta_L = \beta_R - \beta_L. \quad (10.1.47)$$

Коэффициенты m_L и t_L находят по формулам (5.4.28), в которых индекс «D» заменяют на «L». Градиент энтропии $\Delta S/\Delta n$ определяют по одной из формул (5.4.29) при условии замены индексов «D» на «L» и «B» на «R». При этом давление торможения p'_{0R} в точке R известно и будет таким, как в точках K, B, ..., U, G, лежащих на одной линии тока, примыкающей к поверхности тела. Величину p''_{0R} вычисляют по формуле (4.3.22) и значению угла скачка θ_{cS}. Давление торможения p'_{0L} в точке L определяют интерполяцией по значениям p'_{0T} и $p'_{0G} = p''_{0R}$ соответственно в точках T и G.

Угол наклона касательной к образующей тела в точке R известен из уравнения образующей $r = f(x)$ и равен $\beta_R = \mathrm{arctg}[(dr/dx)_R]$. Поэтому известной будет разность $\Delta\beta_L = \beta_R - \beta_L$ и по уравнению (10.1.46) можно непосредственно вычислить угловое приращение $\Delta\omega_L$. По этому приращению подсчитывают угол $\omega_R = \Delta\omega_L + \omega_L$, определяют число $\mathbf{M}_R$, давление и другие параметры в точке R с учетом влияния вихревого характера течения.

Как показывают расчеты и экспериментальные исследования, существенное влияние вихревого характера движения за криволинейным скачком уплотнения наблюдается лишь при больших скоростях обтекания. Например, для параболической головки с удлинением $\lambda_{\text{мид}}=x_{\text{мид}}/(2r_{\text{мид}})=5$ (длина головки в пять раз больше диаметра миделева сечения $2r_{\text{мид}}$) при значении параметра $K_1=M_\infty/\lambda_{\text{мид}}=1$, которому соответствует число $M_\infty=5$, волновое сопротивление возрастало за счет вихревого влияния на 5% по сравнению с его величиной в потенциальном потоке. В то же время при $K_1=4$ ($M_\infty=20$) оно увеличивается более чем на 25%. Эффект возрастания сопротивления с физической точки зрения объясняется тем, что на образование вихрей необратимо затрачивается дополнительная часть кинетической энергии потока.

На рис. 10.1.2 показано распределение давления, найденное по методу характеристики для двух тел с параболической головной частью, уравнение образующей которых

$$\bar{r}=\bar{x}(2-\bar{x}), \tag{10.1.48}$$

где $\bar{r}=r/r_{\text{мид}}$, $\bar{x}=x/x_{\text{мид}}$ ($x_{\text{мид}}$ — расстояние от носка до места миделевого сечения тела вращения с радиусом $r_{\text{мид}}$).

Для тела вращения с такой образующей (рис. 10.1.3) тангенс угла наклона касательной в произвольной точке

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{dr}{dx}=\frac{2r_{\text{мид}}}{x_{\text{мид}}}(1-\bar{x})=\frac{1}{\lambda_{\text{мид}}}(1-\bar{x}), \tag{10.1.49}$$

а в точке заострения, для которой $\bar{x}=0$,

$$\operatorname{tg}\beta_0=1/\lambda_{\text{мид}}, \tag{10.1.50}$$

где $\lambda_{\text{мид}}=x_{\text{мид}}/(2r_{\text{мид}})$ — удлинение головной части.

На графике, изображенном на рис. 10.1.2, показано распределение давления для значения параметра $K_1=M_\infty \operatorname{tg}\beta_0=M_\infty/\lambda_{\text{мид}}=2$. В случае вихревого течения четко видно повышение давления по сравнению с потенциальным обтеканием. Это повышение следует учитывать в практических случаях, начиная примерно со значений параметра $K_1=1{,}2\div1{,}5$. При меньших его значениях вихревым влиянием можно пренебречь. График (рис. 10.1.2) подтверждает действие закона подобия по параметру K_1 при больших скоростях не только для конусов, но и для аффинно-подобных тел вращения с криволинейной образующей, какими являются тела параболической формы (об аффинном подобии подробнее см. в § 10.3). Это подобие распространяется и на цилиндрические участки тел. Видно, что обтекание двух различных по своим размерам тел характеризуется одной кривой для функции давления $p/p_\infty-1$, поскольку в каждом случае параметр K_1 был один и тот же.

Закон подобия по параметру K_1 имеет большое практическое значение. Действительно, вместо экспериментирования с различными моделями можно провести продувку с одним телом, получив при этом данные о распределении давления для ряда значений параметра K_1. Затем в соответствии с законом подобия эти данные можно распространить на всю бесконечную совокупность аффинно-преобразованных тел с конкретными геометрическими размерами. Например, если результаты на рис. 10.1.2 получены при $M_\infty = 6$ для тела с удлинением головной части $\lambda_{мид} = 3$ так, что $K_1 = 2$, то, очевидно, найденная кривая действительна (как это видно из графика) также для другого тела с удлинением $\lambda_{мид} = 6$, но уже при $M_\infty = 12$, т. е. при условии сохранения того же значения $K_1 = 2$. Используя закон подобия, можно отнести полученные результаты, например, к телу с $\lambda_{мид} = 5$ и $M_\infty = 10$ и т. д. Таким образом, в данном случае действие закона подобия ограничено одним и тем же значением параметра $K_1 = 2$. Чтобы расширить эти границы, эксперименты или расчеты ведут для различных величин K_1.

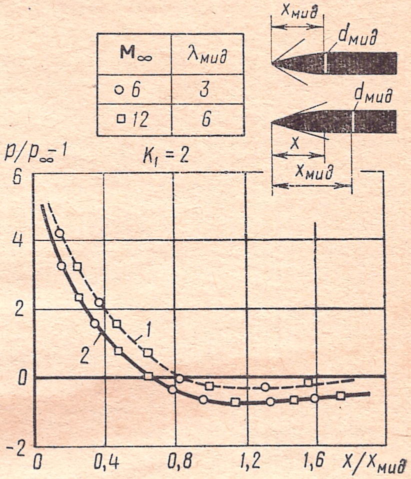


Рис. 10.1.2. Распределение давления около тел вращения с параболической головной частью:

1 — с учетом вихревого движения за скачком; 2 — для потенциального движения за скачком

Следует отметить еще одно важное следствие закона подобия. Оно заключается в том, что при отсутствии возможности осуществить продувки на больших скоростях необходимые результаты можно получить на меньших числах M_∞. Для этого надо вести эксперимент с менее удлиненной аффинно-подобной моделью при сохранении заданного параметра K_1. При этом область применимости закона подобия для заостренного тела вращения может устанавливаться из анализа возможности использования этого закона для конического острия. Такой анализ проводится на основе сравнения результатов приближенного аэродинамического расчета с точной теорией или экспериментом и выявления отклонения от допустимой погрешности. Этим методом построена для конуса заштрихованная область на рис. 10.1.4 (зона сомнительного подобия), за пределами которой применение закона подобия дает ошибку менее 5—6%.

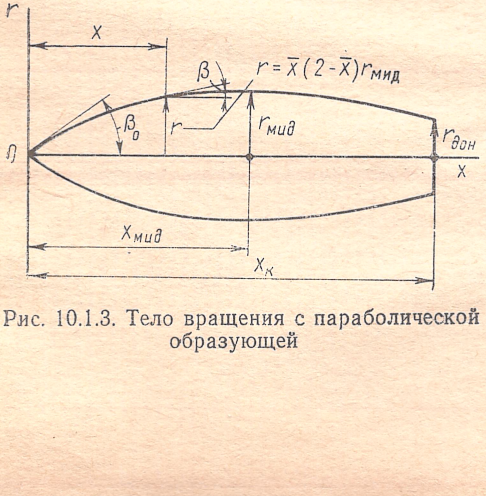


Рис. 10.1.3. Тело вращения с параболической образующей

При использовании графика (рис. 10.1.4) с целью определения области применимости закона подобия для параболической головки с удлинением $\lambda_{мид}$, необходимо перестроить этот график таким образом, чтобы вдоль горизонтальной оси были отложены удлинения головки, вычисленные из условия $\lambda_{мид} = 1/\mathrm{tg}\,\beta_0$.

При исследовании эффекта вихревого течения было показано, что возрастание скорости полета влечет за собой необходимость при расчете невязкого обтекания учитывать влияние факторов, которыми при небольших скоростях можно было пренебречь.

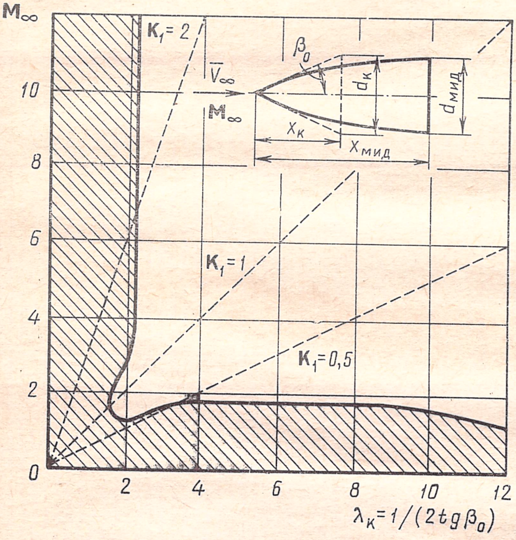


Рис. 10.1.4. Область возможного применения закона подобия по параметру K_1
$[\lambda_к = x_к/d_к = 1/(2\mathrm{tg}\,\beta_0)$; $\lambda_{мид} = x_{мид}/d_{мид} = 1/\mathrm{tg}\,\beta_0$; $K_1 = M_0 \mathrm{tg}\,\beta_0]$

Опыт и теория показывают, что при больших числах M_∞ известное влияние на обтекание оказывают такие факторы, как пограничный слой и различные эффекты, наблюдаемые в нем (диссоциация, ионизация, теплопередача между стенкой и газом). Определенное влияние оказывают также колебательные возбуждения, диссоциация и ионизация воздуха, которые могут возникнуть при очень высоких скоростях обтекания из-за значительного повышения температуры в невязкой области потока между ударной волной и поверхностью тела. Необходимо отметить, что влияние высоких температур газа на изменение распределения давления значительно меньше, чем на распределение скорости, температуры и плотности.

Расчет параметров невязкого обтекания при условии, что газ претерпевает физико-химические превращения вследствие воздействия высоких температур, может быть осуществлен рядом методов, в том числе методом характеристик [26, 27, 42].

Зная распределение коэффициента давления $\bar{p} = (p - p_\infty)/q_\infty$, где $q_\infty = kM^2_\infty p_\infty/2$, можно вычислить силу и коэффициент волнового сопротивления тела вращения, обтекаемого сверхзвуковым потоком при нулевом угле атаки. Для вычисления коэффициента волнового сопротивления используем формулу (1.3.2), подобно тому, как это было сделано при выводе формулы (9.2.29). При этом учтем, что

$$S_п=S_{мид}=\pi r^2_{мид};\ \ dS=2\pi r dl;\ \ dl=dx/\cos\beta;$$

$$\cos(\widehat{nx})=\sin\beta;\ \ \sin\beta/\cos\beta=dr/dx.$$

В результате получим

$$c_{x\,в}=\frac{X_в}{q_\infty S_{мид}}=\frac{2}{r_{мид}}\int\limits_0^{x_к}\bar{p}\bar{r}\left(\frac{dr}{dx}\right)dx, \qquad (10.1.51)$$

или

$$c_{x\,в}=4\lambda_{мид}\int\limits_0^{\bar{x}_к}\bar{p}\bar{r}\,\mathrm{tg}\,\beta d\bar{x}, \qquad (10.1.51')$$

где $x_к$ — длина тела вращения;

$$\bar{x}=x/x_{мид};\ \ \bar{x}_к=x_к/x_{мид};$$

$$\bar{r}=r/r_{мид};\ \mathrm{tg}\,\beta=dr/dx;\ \lambda_{мид}=x_{мид}/(2r_{мид}).$$

Представление о характере изменения коэффициента волнового сопротивления можно получить из рис. 10.1.5, на котором приведены результаты расчета этого коэффициента по методу характеристик для параболического тела вращения. Как видно, с ростом числа M_∞ и удлинения $\lambda_{мид}$ коэффициент сопротивления уменьшается. Увеличение удлинения соответствует большему заострению тела, которое, естественно, вызывает снижение сопротивления. Что касается влияния числа M_∞, то указанный характер изменения коэффициента $c_{xв}$ свидетельствует не об уменьшении сопротивления [с ростом M_∞ оно также увеличивается в соответствии с зависимостью $X_в=c_{x\,в}(kp_\infty M^2/2)S_{мид}$], а о некотором отклонении характера этого изменения от квадратичного закона (по M_∞). При этом для больших чисел Маха ($M_\infty>5\div6$) практически реализуется именно такой закон изменения сопротивления, так как коэффициенты $c_{xв}$ меняются незначительно.

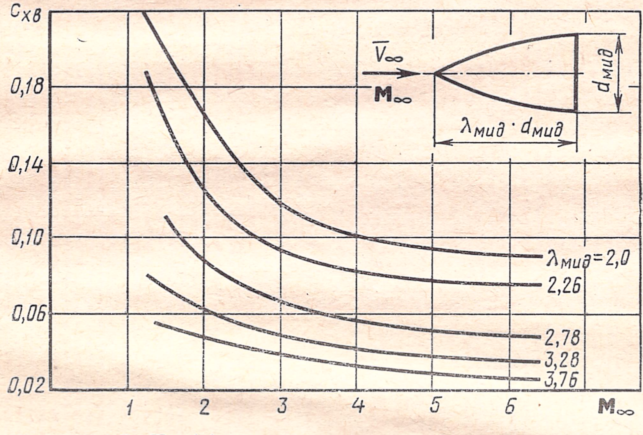


Рис. 10.1.5. Коэффициенты волнового сопротивления параболической головной части

Зак. 967

Для приближенной оценки коэффициента волнового сопротивления параболических головных частей или тел вращения, близких к ним по форме, можно пользоваться соотношением [9]

$$c_{x\text{в}}=0{,}08\,(15{,}5+\mathbf{M}_\infty)\,(3+\mathbf{M}_\infty)^{-1}\bar{p}_{\text{к}}, \qquad (10.1.52)$$

где $\bar{p}_{\text{к}}$ — коэффициент давления на коническом носке обтекаемого тела вращения.

Формула (10.1.52) дает удовлетворительные результаты для удлинений $\lambda_{\text{мид}}\geqslant 2{,}5$ и интервала $1{,}5\leqslant \mathbf{M}_\infty\leqslant 6$.

§ 10.2. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ОБТЕКАНИЯ ТОНКИХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Отдельные образцы летательных аппаратов выполняют в виде тонких заостренных тел вращения (некоторые типы ракет, артиллерийских снарядов и др.) или же они имеют в качестве одного из конструктивных элементов корпус, представляющий собой по форме такое тело. Этим вызывается целесообразность исследования аэродинамических характеристик тонких заостренных тел вращения.

Рассмотрим задачу об установившемся обтекании тонких тел, установленных под малыми углами атаки. Возмущенное течение около таких тел мало отличается от невозмущенного. Такое течение, названное ранее линеаризованным, может быть исследовано при помощи соответствующих линеаризованных уравнений аэродинамики. Рассмотрим эти линеаризованные уравнения. Они получаются из общих уравнений движения (3.1.35), (3.1.35′) в цилиндрических координатах, удобных для исследования обтекания тел вращения и имеющих следующий вид для установившегося невязкого обтекания ($\partial\bar{V}/\partial t=0,\ \nu=0$):

$$\left.\begin{aligned}
&V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_r\frac{\partial V_x}{\partial r}+\frac{V_\gamma}{r}\cdot\frac{\partial V_x}{\partial\gamma}=-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x};\\
&V_x\frac{\partial V_r}{\partial x}+V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\gamma}{r}\cdot\frac{\partial V_r}{\partial\gamma}-\frac{V_\gamma^2}{r}=-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r};\\
&V_x\frac{\partial V_\gamma}{\partial x}+V_r\frac{\partial V_\gamma}{\partial r}+\frac{V_\gamma}{r}\cdot\frac{\partial V_\gamma}{\partial\gamma}+\frac{V_rV_\gamma}{r}=-\frac{1}{\varrho r}\cdot\frac{\partial p}{\partial\gamma},
\end{aligned}\right\}\quad(10.2.1)$$

а также уравнения неразрывности (2.4.31) в этих же координатах.

Продифференцировав это уравнение, получим

$$r\left(\frac{\partial\varrho}{\partial x}V_x+\frac{\partial\varrho}{\partial r}V_r+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varrho}{\partial\gamma}V_\gamma\right)+\varrho r\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V_\gamma}{\partial\gamma}\right)+$$
$$+\varrho V_r=0. \qquad (10.2.2)$$

Принимая во внимание, что частная производная $\frac{\partial\varrho}{\partial x}=\frac{d\varrho}{dp}\times$ $\times\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}$, и заменяя здесь $\partial p/\partial x$ в соответствии с первым уравнением (10.2.1), найдем

$$\frac{\partial\varrho}{\partial x}=-\frac{\varrho}{a^2}\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_r\frac{\partial V_x}{\partial r}+\frac{V_\gamma}{r}\cdot\frac{\partial V_x}{\partial\gamma}\right). \qquad (10.2.3)$$

Аналогично получаем из второго и третьего уравнения (10.2.1):

$$\frac{\partial\varrho}{\partial r}=-\frac{\varrho}{a^2}\left(V_x\frac{\partial V_r}{\partial x}+V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\gamma}{r}\cdot\frac{\partial V_r}{\partial\gamma}-\frac{V_\gamma^2}{r}\right); \qquad (10.2.4)$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varrho}{\partial\gamma}=-\frac{\varrho}{a^2}\left(V_x\frac{\partial V_\gamma}{\partial x}+V_r\frac{\partial V_\gamma}{\partial r}+\frac{V_\gamma}{r}\cdot\frac{\partial V_\gamma}{\partial\gamma}+\frac{V_rV_\gamma}{r}\right). \qquad (10.2.5)$$

Внесем значения частных производных из (10.2.3)—(10.2.5) в уравнение неразрывности (10.2.2):

$$(V_x^2-a^2)\frac{\partial V_x}{\partial x}+(V_r^2-a^2)\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{1}{r}(V_\gamma^2-a^2)\frac{\partial V_\gamma}{\partial\gamma}+$$

$$+V_xV_r\left(\frac{\partial V_x}{\partial r}+\frac{\partial V_r}{\partial x}\right)+V_xV_\gamma\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V_x}{\partial\gamma}+\frac{\partial V_\gamma}{\partial x}\right)+$$

$$+V_rV_\gamma\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V_r}{\partial\gamma}+\frac{\partial V_\gamma}{\partial r}\right)-\frac{V_ra^2}{r}=0. \qquad (10.2.6)$$

Имея в виду соотношения (2.4.25′) и учитывая, что

$$\frac{\partial V_\gamma}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\right)=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\gamma}-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma},$$

получим из (10.2.6) уравнение для потенциальной функции:

$$(V_x^2-a^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+(V_r^2-a^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}(V_\gamma^2-a^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\gamma^2}+$$

$$+2V_xV_r\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial r}+\frac{2}{r}V_xV_\gamma\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial\gamma}+\frac{2}{r}V_rV_\gamma\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\gamma}-\frac{V_r\left(a^2+V_\gamma^2\right)}{r}=0. \qquad (10.2.7)$$

Обычно вместо системы уравнений движения (10.2.1) и уравнения неразрывности (10.2.2) пользуются одним уравнением (10.2.7) для потенциала скоростей. В соответствии со свойствами линеаризованного возмущенного течения

$$V_x=V_\infty+V_x', \; V_r=V_r', \; V_\gamma=V_\gamma', \qquad (10.2.8)$$

где добавочные возмущенные составляющие скорости:

$$V_x'\ll V_\infty, \; V_r'\ll V_\infty, \; V_\gamma'\ll V_\infty.$$

Поэтому имеет место соотношение (7.1.2′) для скорости звука, в котором принимаем $u=V_x'$. Внеся в уравнение (10.2.7) это соотношение, а также значения (10.2.8) и величины

$$V_x^2 = V_\infty + 2V_\infty V'_x,\ V_r^2 = V_r'^2,\ V_\gamma^2 = V_\gamma'^2,\ \varphi = \varphi_\infty + \varphi',\ \text{получим}$$

$$\left[V_\infty^2 - a_\infty^2 + (k-1)V_\infty V'_x\right]\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \left[V_r'^2 - a_\infty^2 + (k-1)V_\infty V'_x\right]\frac{\partial^2\varphi'}{\partial r^2} +$$
$$+\frac{1}{r^2}\left[V_\gamma'^2 - a_\infty^2 + (k-1)V_\infty V'_x\right]\frac{\partial^2\varphi'}{\partial\gamma^2} + 2\left(V_\infty + V'_x\right)V'_r\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x\partial r} +$$
$$+\frac{2}{r}\left(V_\infty + V'_x\right)V'_\gamma\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x\partial\gamma} + \frac{2}{r}V'_r V'_\gamma\frac{\partial^2\varphi'}{\partial r\partial\gamma} -$$
$$-\frac{V'_r}{r}\left[a_\infty^2 - (k-1)V_\infty V'_x + V_\gamma'^2\right] = 0. \qquad (10.2.9)$$

Учитывая, что вторые производные от φ' являются величинами первого порядка малости, в уравнении (10.2.9) можно пренебречь членами, содержащими произведения этих производных и возмущенных составляющих скорости V_x', V_r' или V_γ'. В результате находим линеаризованное дифференциальное уравнение для добавочной величины потенциальной функции φ'

$$\left(V_\infty^2 - a_\infty^2\right)\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} - a_\infty^2\frac{\partial^2\varphi'}{\partial r^2} - \frac{a_\infty^2}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi'}{\partial\gamma^2} - \frac{a_\infty^2}{r}\cdot\frac{\partial\varphi'}{\partial r} = 0. \qquad (10.2.10)$$

Разделим все члены этого уравнения на $-a_\infty^2$:

$$\left(1 - \mathbf{M}_\infty^2\right)\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi'}{\partial\gamma^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi'}{\partial r} = 0. \qquad (10.2.10')$$

Уравнение (10.2.10′) используется для исследования потока около тонких тел вращения под малым углом атаки, т. е. неосесимметричного маловозмущенного течения. При осесимметричном обтекании (угол атаки равен нулю) уравнение упрощается, так как составляющая скорости $V_\gamma' = (1/r)\,\partial\varphi'/\partial\gamma = 0$ и, следовательно,

$$\left(1 - \mathbf{M}_\infty^2\right)\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi'}{\partial r} = 0. \qquad (10.2.11)$$

Уравнения (10.2.10′) и (10.2.11) составляют теоретическую основу аэродинамики стационарных линеаризованных течений около тонких тел вращения. В результате решения этих уравнений определяют потенциал возмущения φ'. Решение уравнения для потенциала φ' ведется при следующих граничных условиях. На границе возмущенной области потенциал $\varphi' = 0$. В данном случае такой границей является поверхность слабой ударной волны, возникающей перед тонким заостренным телом и представляющей собой фактически линию слабого возмущения (простую волну сжатия) или линию Маха с углом наклона образующей к направлению вектора скорости $\overline{V}_\infty$, равным $\mu_\infty = \arcsin(1/\mathbf{M}_\infty)$. На поверхности обтекаемого тела потенциал φ' должен удовлетворять условию безотрывного обтекания (3.3.19), в котором функцию, описывающую обтекаемую поверхность вращения, можно представить в виде $F=f(x)-r$. Тогда

$$\varphi_r/\varphi_x=dr/dx, \tag{10.2.12}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\varphi_r&=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{\partial(\varphi_\infty+\varphi')}{\partial r}=\frac{\partial\varphi_\infty}{\partial r}+\frac{\partial\varphi'}{\partial r}=\varphi_{\infty r}+\varphi'_r;\\ \varphi_x&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial(\varphi_\infty+\varphi')}{\partial x}=\frac{\partial\varphi_\infty}{\partial x}+\frac{\partial\varphi'}{\partial x}=\varphi_{\infty x}+\varphi'_x.\end{aligned}\right\} \tag{10.2.13}$$

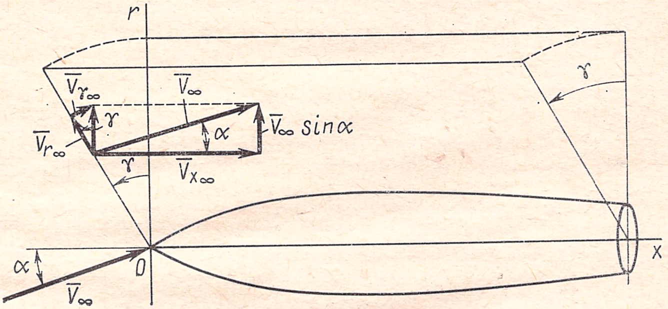


Рис. 10.2.1. Составляющие скорости набегающего потока в цилиндрических координатах

Составляющие скорости набегающего потока в цилиндрических координатах можно определить по схеме, изображенной на рис. 10.2.1:

$$\left.\begin{aligned}V_{x\infty}&=\partial\varphi_\infty/\partial x=\varphi_{x\infty}=V_\infty\cos\alpha;\\ V_{r\infty}&=\partial\varphi_\infty/\partial r=\varphi_{r\infty}=V_\infty\sin\alpha\cos\gamma.\end{aligned}\right\} \tag{10.2.14}$$

По этой же схеме можно найти третью составляющую:

$$V_{\gamma\infty}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi_\infty}{\partial\gamma}=\frac{1}{r}\varphi_{\gamma\infty}=-V_\infty\sin\alpha\sin\gamma. \tag{10.2.15}$$

В соответствии с соотношениями (10.2.14) и (10.2.15) потенциал скоростей невозмущенного потока

$$\varphi_\infty=xV_\infty\cos\alpha+rV_\infty\sin\alpha\cos\gamma. \tag{10.2.16}$$

Для линеаризованного потока примем $\cos\alpha\approx1-\alpha^2/2$ и $\sin\alpha\approx\alpha$, поэтому

$$\varphi_\infty=xV_\infty(1-\alpha^2/2)+rV_\infty\alpha\cos\gamma. \tag{10.2.16'}$$

Следовательно, суммарный потенциал

$$\varphi=\varphi_\infty+\varphi'(x,r,\gamma)=xV_\infty(1-\alpha^2/2)+rV_\infty\alpha\cos\gamma+\varphi'(x,r,\gamma). \tag{10.2.17}$$

Вычисляя производные φ_r и φ_x, внося их в (10.2.12) и пренебрегая величиной $0{,}5\,\alpha^2$, получим

$$(V_\infty \alpha \cos\gamma + \varphi'_r)/(V_\infty + \varphi'_x) = dr/dx. \qquad (10.2.18)$$

Если обтекание осесимметричное, то условие безотрывного обтекания (10.2.18) упрощается:

$$\varphi'_r/(V_\infty + \varphi'_x) = dr/dx. \qquad (10.2.19)$$

Потенциал скоростей линеаризованного потока φ, обтекающего тело вращения под малым углом атаки (рис. 10.2.2), можно представить в виде суммы трех составляющих: потенциала невозмущенного потока φ_∞, добавочного потенциала продольного возмущенного (осесимметричного) течения $\varphi_1'(x, r)$ и второго добавочного потенциала $\varphi_2'(x, r, \gamma)$, возникающего от поперечного обтекания:

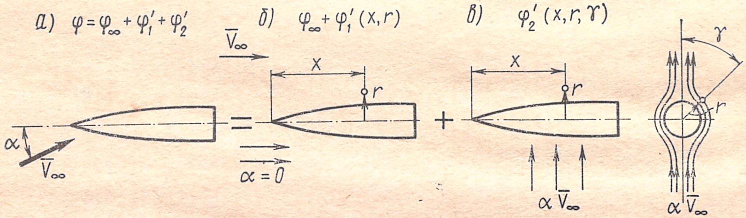

а) $\varphi=\varphi_\infty+\varphi_1'+\varphi_2'$
$\overline{V}_\infty$
б) $\varphi_\infty+\varphi_1'(x,r)$
в) $\varphi_2'(x,r,\gamma)$
γ
x
r
x
r
r
α
$\overline{V}_\infty$
$\alpha=0$
$\alpha\overline{V}_\infty$
$\alpha\overline{V}_\infty$

Рис. 10.2.2. Тонкое тело вращения в линеаризованном потоке под малым углом атаки:

а — неосесимметричное обтекание; *б* — осесимметричное обтекание; *в* — добавочное поперечное обтекание

$$\varphi = \varphi_\infty + \varphi'_1(x, r) + \varphi'_2(x, r, \gamma). \qquad (10.2.20)$$

В теории линеаризованных течений φ_1' и φ_2' рассматриваются как функции, которые, являясь решениями уравнений движения, определяют независимые друг от друга потоки. Поэтому на каждую такую функцию можно отдельно наложить граничные условия. В частности, решение для φ_1', получаемое из уравнения (10.2.11)

$$(1 - \mathbf{M}_\infty^2)\varphi'_{1xx} + \varphi'_{1rr} + \varphi'_{1r}/r = 0 \qquad (10.2.11')$$

(где $\varphi'_{1xx} = \partial^2\varphi'_1/\partial x^2$, $\varphi'_{1rr} = \partial^2\varphi'_1/\partial r^2$, $\varphi'_{1r} = \partial\varphi'_1/\partial r$), должно удовлетворять условию (10.2.19) осесимметричного обтекания

$$\varphi'_{1r}/(V_\infty + \varphi'_{1x}) = dr/dx. \qquad (10.2.19')$$

Граничное условие для функции φ_2', удовлетворяющей (10.2.10′),

$$(1 - \mathbf{M}_\infty^2)\varphi'_{2xx} + \varphi'_{2rr} + \varphi'_{2\gamma\gamma}/r^2 + \varphi'_{2r}/r = 0, \qquad (10.2.10'')$$

получим из выражения (10.2.18), записав его в виде

$$\alpha V_\infty \cos\gamma + \varphi'_{1r} + \varphi'_{2r} = \frac{dr}{dx}\left(V_\infty + \varphi'_{1x} + \varphi'_{2x}\right). \qquad (10.2.21)$$

В этих выражениях $\varphi'_{1x} = \partial\varphi'_1/\partial x$, $\varphi'_{2x} = \partial\varphi'_2/\partial x$ и т. д.

Имея в виду равенство (10.2.19′) и отбрасывая в (10.2.21) член с меньшим порядком $(dr/dx)\varphi'_{2x}$, получим из (10.2.21) граничное условие поперечного обтекания

$$\varphi'_{2r} = -\alpha V_\infty \cos\gamma. \qquad (10.2.22)$$

В соответствии с условием (10.2.22) добавочный потенциал от поперечного обтекания должен быть таким, чтобы на поверхности тела исчезла радиальная составляющая набегающего потока $V_{r\infty} = \alpha V_\infty \cos\gamma$. Эта составляющая скорости может быть как сверхзвуковой, так и дозвуковой. То обстоятельство, что $V_{r\infty} < a_\infty$, не имеет значения, так как рассматриваемое дополнительное поперечное течение представляет собой составную часть суммарного потока и является лишь следствием математического представления модели такого потока.

Определив с учетом граничных условий суммарный потенциал скоростей (10.2.20), можно вычислить скорость, а затем давление, используя уравнение Бернулли

$$\frac{k}{k-1}\cdot\frac{p}{\varrho} + \frac{V^2}{2} = \frac{k}{k-1}\cdot\frac{p_\infty}{\varrho_\infty} + \frac{V_\infty^2}{2}.$$

Внося сюда значение $\varrho = \varrho_\infty (p/p_\infty)^{1/k}$, поскольку течение можно считать изэнтропическим, найдем

$$\frac{k}{k-1}\left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{(k-1)/k}\frac{p_\infty}{\varrho_\infty} + \frac{V^2}{2} = \frac{k}{k-1}\cdot\frac{p_\infty}{\varrho_\infty} + \frac{V_\infty^2}{2}.$$

Учитывая, что $kp_\infty/\varrho_\infty = a_\infty^2$ и $\mathbf{M}_\infty^2 = V_\infty^2/a_\infty^2$, получим

$$\frac{p}{p_\infty} = \left[1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\infty^2\left(1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}\right)\right]^{k/(k-1)}.$$

Так как квадрат полной скорости $V^2 = (V_\infty \cos\alpha + V'_x)^2 + V'^2_r + V'^2_\gamma$, то

$$\frac{p}{p_\infty} = \left[1 - (k-1)\mathbf{M}_\infty^2\left(\frac{V'_x}{V_\infty}\cos\alpha + \frac{V'^2_r}{2V_\infty^2} + \frac{V'^2_\gamma}{2V_\infty^2} + \frac{V'^2_x}{2V_\infty^2} - \frac{\sin^2\alpha}{2}\right)\right]^{k/(k-1)}. \qquad (10.2.23)$$

Здесь второй член в квадратных скобках меньше единицы, и, следовательно, все выражение можно разложить в ряд по биному. Сохраняя в разложении только первые два члена, учитывая малость величины $V'^2_x/2V_\infty^2$ по сравнению с первым членом в круглой скобке и полагая при малых углах атаки $\cos\alpha\approx 1$, $\sin^2\alpha\approx\alpha^2$, получим

$$\frac{p}{p_\infty}=1-k\mathrm{M}_\infty^2\left(\frac{V_x'}{V_\infty}+\frac{V_r'^2}{2V_\infty^2}+\frac{V_\gamma'^2}{2V_\infty^2}-\frac{\alpha^2}{2}\right), \qquad (10.2.24)$$

откуда коэффициент давления

$$\bar{p}=\frac{2(p-p_\infty)}{k\mathrm{M}_\infty^2 p_\infty}=-2\left(\frac{V_x'}{V_\infty}+\frac{V_r'^2}{2V_\infty^2}+\frac{V_\gamma'^2}{2V_\infty^2}-\frac{\alpha^2}{2}\right). \qquad (10.2.25)$$

В соответствии с условием (10.2.12), в котором можно принять $\varphi_x\approx\varphi_{x\infty}=V_\infty$, составляющую V_r' заменим величиной

$$V_r'=\varphi_r'=V_\infty(dr/dx), \qquad (10.2.19'')$$

а V_x' и V_γ' — их выражениями через добавочные потенциалы:

$$V_x'=\varphi_x';\quad V_\gamma'=\frac{1}{r}\varphi_{\gamma\infty}'+\frac{1}{r}\varphi_{2\gamma}',$$

где согласно (10.2.15) величина

$$\varphi_{\gamma\infty}'/r=\alpha V_\infty\sin\gamma.$$

В результате получим

$$\bar{p}=\frac{-2}{V_\infty^2}\left[V_\infty\varphi_x'+\frac{V_\infty^2}{2}\left(\frac{dr}{dx}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_{2\gamma}'}{r}-\alpha V_\infty\sin\gamma\right)^2-\frac{\alpha^2V_\infty^2}{2}\right]. \qquad (10.2.26)$$

Эту величину коэффициента давления можно представить в виде суммы двух составляющих, т. е. $\bar{p}=\bar{p}_1+\bar{p}_2$. Одна из составляющих $\bar{p}_1$ определяется условиями осесимметричного обтекания:

$$\bar{p}_1=\frac{-2}{V_\infty^2}\left[V_\infty\varphi_{1x}'+\frac{V_\infty^2}{2}\left(\frac{dr}{dx}\right)^2\right], \qquad (10.2.27)$$

а другая $\bar{p}_2$ — поперечным обтеканием, зависящим от угла атаки:

$$\bar{p}_2=\frac{-2}{V_\infty^2}\left[V_\infty\varphi_{2x}'+\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_{2\gamma}'}{r}-\alpha V_\infty\sin\gamma\right)^2-\frac{\alpha^2V_\infty^2}{2}\right]. \qquad (10.2.28)$$

§ 10.3. РАСЧЕТ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ОБТЕКАНИЯ

Задача о линеаризованном осесимметричном обтекании тонкого тела вращения будет решена, если найти добавочный потенциал скоростей φ_1', удовлетворяющий линеаризованному уравнению (10.2.11). Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что выражение

$$\varphi_1'=\int_0^{x-\alpha' r} f(\varepsilon)\,d\varepsilon\Big/\sqrt{(x-\varepsilon)^2-\alpha'^2r^2}, \qquad (10.3.1)$$

где $\alpha' = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$, действительно удовлетворяет уравнению (10.2.11).

Смысл решения (10.3.1) можно установить, если ввести переменную, определяемую равенством $\alpha' r \sqrt{-1} = p$. Тогда формально уравнение (10.2.11) приводится к виду, совпадающему с уравнением для потенциала скоростей несжимаемого потока, а именно

$$\varphi'_{1xx} + \varphi'_{1pp} + \varphi'_{1p}/p = 0, \tag{10. 3. 2}$$

где индексы «x» и «p» означают соответствующие частные производные φ_1' по x и p.

Представим теперь, что в некоторой точке $x = \varepsilon$ на оси тела находится источник жидкости с расходом (интенсивностью) q. Потенциал скоростей, индуцируемых этим источником в точке с координатами x, p, расположенной на шаровой поверхности радиуса $\varrho = \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + p^2}$, будет определяться в соответствии с формулой (2.9.14) в виде $\varphi_1' = -q/\left[4\pi\sqrt{(x-\varepsilon)^2 + p^2}\right]$. Если теперь представить, что вдоль оси тела на участке от $\varepsilon = 0$ до $\varepsilon = x - \alpha' r$ расположена система источников с переменной интенсивностью $q = -4\pi f(\varepsilon)$, отнесенной к единице длины, то суммарный потенциал в рассматриваемой точке x, r от действия всех источников выразится формулой

$$\varphi_1' = \int_0^{x-\alpha' r} f(\varepsilon)\, d\varepsilon / \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + p^2}. \tag{10. 3. 3}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что интеграл (10.3.3) удовлетворяет дифференциальному уравнению (10.3.2). Следовательно, решение (10.3.3) представляет собой потенциальную функцию от источников, непрерывно распределенных вдоль оси тела. Сравнивая (10.3.3) и (10.3.1), видим, что при $p = \alpha' r \sqrt{-1}$ оба эти выражения тождественны. Таким образом, с помощью формальной аналогии показано, что, как и для несжимаемой жидкости, смысл решения (10.3.1) заключается в том, что функция φ_1' является потенциалом источников, непрерывно распределенных вдоль оси тела. Найденное решение (10.3.1) отражает содержание метода источников, согласно которому обтекаемое тело заменяется системой непрерывно распределенных вдоль его оси как источников, так и стоков.

Закон распределения источников (стоков), т. е. вид функции $f(\varepsilon)$, должен быть таким, чтобы в результате наложения невозмущенного потока на течение от этих источников одна из линий тока суммарного потока совпадала с образующей тела вращения. Иначе говоря, потенциальная функция φ_1' должна удовлетворять условию (10.2.19′) безотрывного обтекания.

Формальную аналогию между несжимаемым (или сжимаемым дозвуковым) и сжимаемым сверхзвуковым потоками от источников или стоков необходимо дополнить особенностями, характерными для сверхзвукового течения. Если источник в дозвуковом потоке оказывал влияние на все точки пространства, расположенные вверх и вниз по потоку, то при сверхзвуковом течении возмущения от источников распространяются только внутри конусов Маха с вершинами у источников. Таким образом, если представить себе систему непрерывно распределенных по оси тела источников (рис. 10.3.1), то скорость и давление в любой точке A (x, r) будут определяться теми возмущениями, которые исходят из источников, расположенных вверх по течению, начиная от точки

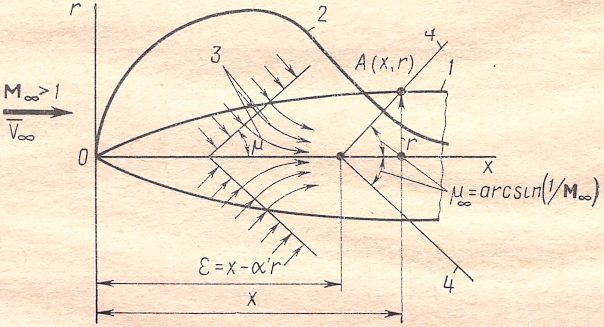


Рис. 10.3.1. Распределение источников вдоль оси тела вращения и характер их влияния при сверхзвуковых скоростях обтекания:

1 — образующая тела вращения; *2* — кривая $f(x)$, характеризующая распределение источников; *3* — линии тока от источников; *4* — конус возмущений (конус Маха)

$\varepsilon = x - \alpha' r$ и кончая точкой $\varepsilon = x = 0$, совпадающей с острием тела. В точке $\varepsilon = x = 0$ интенсивность источника равна нулю, так как полагаем, что при $\varepsilon \leqslant 0$ возмущения отсутствуют. Сказанным определяются пределы интеграла в формуле (10.3.1).

Вид кривой $f(\varepsilon)$ [или $f(x)$], представляющей собой закон распределения источников (стоков) для тонкого тела с произвольной образующей, показан на рис. 10.3.1. Эта кривая определяет непрерывный характер малых возмущений, индуцируемых источниками (стоками) и соответствующих линеаризованному обтеканию. В том случае, когда возникают большие возмущения, например при обтекании тел с притупленной головной частью или заостренных тел с большим наклоном образующих к направлению скорости набегающего потока, линейная теория неприменима.

Чтобы найти общие зависимости для скорости и давления, преобразуем (10.3.1), вводя новую переменную интегрирования:

$$z = \operatorname{arch}[(x - \varepsilon)/(\alpha' r)]. \qquad (10.3.4)$$

Учитывая, что согласно (10.3.4) $\operatorname{ch} z = (x - \varepsilon)/(\alpha' r)$, $\varepsilon = x - \alpha' r \operatorname{ch} z$, $d\varepsilon = -\alpha' r \operatorname{sh} z\, dz$, выражение (10.3.1) можно преобразовать к виду

$$\varphi_1' = \int\limits_0^{\operatorname{arch}(x/\alpha' r)} f(x - \alpha' r \operatorname{ch} z)\, dz. \qquad (10.3.5)$$

В формуле (10.3.5) верхний предел $z = \operatorname{arch}(x/\alpha' r)$ интеграла соответствует нижнему пределу $\varepsilon = 0$ интеграла (10.3.1), а нижний предел $z = 0$ — верхнему пределу $\varepsilon = x - \alpha' r$ в (10.3.1).

Дифференцируя φ_1' по x, найдем осевую добавочную составляющую скорости:

$$V_{x1}' = \varphi_{1x}' = \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_0^{\operatorname{arch}(x/\alpha' r)} f(x - \alpha' r \operatorname{ch} z)\, dz =$$

$$= \int\limits_0^{\operatorname{arch}(x/\alpha' r)} \dot{f}(x - \alpha' r \operatorname{ch} z)\, dz + f(x - \alpha' r \operatorname{ch} z)\big|_{z = \operatorname{arch}(x/\alpha' r)} \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arch}\frac{x}{\alpha' r}\right), \qquad (10.3.6)$$

где $\dot{f}$ — полная производная функция f по аргументу $x - \alpha' r \operatorname{ch} z$.

Так как интенсивность источника у острия тела $f(\varepsilon) = f(0) = 0$, то

$$V_{x1}' = \varphi_{1x}' = \int\limits_0^{\operatorname{arch}(x/\alpha' r)} \dot{f}(x - \alpha' r \operatorname{ch} z)\, dz. \qquad (10.3.7)$$

Аналогично (10.3.6) находим для радиальной составляющей скорости

$$V_{r1}' = \varphi_{1r}' = -\alpha' \int\limits_0^{\operatorname{arch}(x/\alpha' r)} \dot{f}(x - \alpha' r \operatorname{ch} z) \operatorname{ch} z\, dz. \qquad (10.3.8)$$

Приведем выражение (10.3.8) к переменной ε, определяемой в соответствии с (10.3.4) по уравнению $\varepsilon = x - \alpha' r \operatorname{ch} z$. Так как

$$dz = \frac{-d\varepsilon}{\sqrt{[(x-\varepsilon)/(\alpha' r)]^2 - 1}} \cdot \frac{1}{\alpha' r} = \frac{-d\varepsilon}{\sqrt{(x-\varepsilon)^2 - \alpha'^2 r^2}}; \ \operatorname{ch} z = \frac{x - \varepsilon}{\alpha' r},$$

то подынтегральное выражение

$$\dot{f}(x - \alpha' r \operatorname{ch} z) \operatorname{ch} z\, dz = \dot{f}(\varepsilon)(x - \varepsilon)\, d\varepsilon / (\alpha' r \sqrt{(x-\varepsilon)^2 - \alpha'^2 r^2}).$$

Нижний предел $z = 0$ соответствует значению $1 = (x - \varepsilon)/(\alpha' r)$, откуда новый предел $\varepsilon = x - \alpha' r$; верхнему пределу $z = \operatorname{arch}(x/\alpha' r)$ соответствует предел ε, полученный из условия $\operatorname{ch}[\operatorname{arch}(x/\alpha' r)] = (x - \varepsilon)/(\alpha' r)$, в соответствии с которым $\varepsilon = 0$. Таким образом,

$$V_{r1}' = \frac{1}{r} \int\limits_{x - \alpha' r}^{0} \frac{\dot{f}(\varepsilon)(x - \varepsilon)\, d\varepsilon}{\sqrt{(x-\varepsilon)^2 - \alpha'^2 r^2}}, \qquad (10.3.9)$$

или

$$V'_{r1}=\frac{1}{r}\int\limits_{x-\alpha' r}^{0}\dot{f}(\varepsilon)\left[1-\left(\frac{\alpha' r}{x-\varepsilon}\right)^{2}\right]^{-1/2}d\varepsilon. \qquad (10.3.9')$$

Так как $\alpha' r<(x-\varepsilon)$, то выражение $[1-(\alpha' r)^2/(x-\varepsilon)^2]^{-1/2}$ можно разложить в ряд:

$$V'_{r1}=\frac{1}{r}\int\limits_{x-\alpha' r}^{0}\dot{f}(\varepsilon)\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha' r}{x-\varepsilon}\right)^{2}-\ldots\right]d\varepsilon.$$

При $r\to 0$ член в квадратных скобках стремится к единице, а нижний предел — к значению $\varepsilon=x$. В соответствии с этим предельное значение для радиальной составляющей скорости при $r\to 0$

$$V'_{r1}=\frac{1}{r}\int\limits_{x}^{0}\dot{f}(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

что дает после интегрирования

$$V'_{r1}=[f(0)-f(x)]/r.$$

Но у острия тела $f(0)=0$, поэтому

$$V'_{r1}=-f(x)/r. \qquad (10.3.10)$$

Воспользовавшись условием (10.2.19) безотрывного обтекания, в котором для весьма тонкого тела можно пренебречь вторым членом φ'_{1x} в знаменателе, получим зависимость для определения функции $f(x)$:

$$f(x)=-r\,(dr/dx)\,V_{\infty}. \qquad (10.3.11)$$

Это уравнение можно написать в виде

$$f(x)=-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{dS(x)}{dx}V_{\infty}=-\frac{V_{\infty}}{2\pi}S'(x), \qquad (10.3.12)$$

где $S(x)=\pi r^2$ — текущее значение площади поперечного сечения тонкого тела.

Выражение (10.3.12) для функции $f(x)$, определяющей закон распределения источников вдоль оси в предельном случае при $r\to 0$, можно использовать для расчета составляющей скорости (10.3.7), необходимой при вычислении давления по формуле (10.2.27) на поверхности тонких реальных тел вращения. Для этой цели в (10.3.12) заменим x на $\varepsilon=x-\alpha' r\operatorname{ch} z$ и подставим в (10.3.7) производную:

$$\dot{f}(\varepsilon)=\frac{df}{d\varepsilon}=-\frac{V_{\infty}}{2\pi}\cdot\frac{d^2S(\varepsilon)}{d\varepsilon^2}=-\frac{V_{\infty}}{2\pi}S''(x-\alpha' r\operatorname{ch} z). \qquad (10.3.13)$$

В результате

$$V'_{x1}=\varphi'_{1x}=\frac{-V_\infty}{2\pi}\int\limits_0^{\operatorname{arch}(x/\alpha' r)} S''(x-\alpha' r\operatorname{ch} z)dz. \qquad (10.3.14)$$

Таким образом, для расчета по формуле (10.3.14) скорости необходимо знать форму тела вращения и распределение площади вдоль оси, т. е. вид функции $S(x)$.

Допустим, что имеется тело вращения с параболической образующей (см. рис. 10.1.3), уравнение которой задано в виде (10.1.48). В соответствии с этим уравнением площадь поперечного сечения

$$S(x)=\pi r^2=\frac{\pi x^2}{4\lambda^2_{\text{мид}}}\left(2-\frac{x}{x_{\text{мид}}}\right)^2. \qquad (10.3.15)$$

Определим отсюда вторую производную:

$$S''(x)=\frac{d^2S(x)}{dx^2}=\frac{\pi}{\lambda^2_{\text{мид}}}\left(2-\frac{6x}{x_{\text{мид}}}+\frac{3x^2}{x^2_{\text{мид}}}\right). \qquad (10.3.16)$$

Произведя замену x на $\varepsilon=x-\alpha' r\operatorname{ch} z$, найдем

$$S''(x-\alpha' r\operatorname{ch} z)=\frac{\pi}{\lambda^2_{\text{мид}}}\left[2-\frac{6}{x_{\text{мид}}}(x-\alpha' r\operatorname{ch} z)+\frac{3}{x^2_{\text{мид}}}(x-\alpha' r\operatorname{ch} z)^2\right]. \qquad (10.3.16')$$

После подстановки в (10.3.14), получим

$$V'_{x1}=\frac{-V_\infty}{2\lambda^2_{\text{мид}}}\int\limits_0^{\operatorname{arch} u}\left[2-\frac{6\bar{x}}{u}(u-\operatorname{ch} z)+\frac{3\bar{x}^2}{u^2}(u-\operatorname{ch} z)^2\right]dz, \qquad (10.3.17)$$

где $\bar{x}=x/x_{\text{мид}}$ и

$$u=x/(\alpha' r). \qquad (10.3.18)$$

Введем обозначения:

$$i^0_x=I_0;\ i^1_x=uI_0-I_1;\ i^2_x=u^2I_0-2uI_1+I_2, \qquad (10.3.19)$$

где величины I_n определяются в виде интегралов:

$$I_n=\int\limits_0^{\operatorname{arch} u}(\operatorname{ch} z)^n dz\ (n=0,\ 1,\ 2). \qquad (10.3.20)$$

В соответствии с обозначениями (10.3.19)

$$V'_{x1}=\frac{-V_\infty}{2\lambda^2_{\text{мид}}}\left(2i^0_x-\frac{6\bar{x}i^1_x}{u}+\frac{3\bar{x}^2i^2_x}{u^2}\right). \qquad (10.3.21)$$

В случае более общего задания функции $S''(x)$ в виде многочлена

$$S''(x)=\sum_{n=0}^{k}a_n x^n \qquad (10.3.22)$$

выражение, аналогичное (10.3.21), можно представить следующим образом:

$$V'_{x1}=-\sum_{n=0}^{k} b_n i_x^n. \qquad (10.3.23)$$

Коэффициенты a_n зависят от вида образующей тела вращения, а b_n — также и от скорости V_∞. Значения функции $i_x{}^n$ для $n=0$, 1, 2, представленные в виде (10.3.19), соответствуют заданию образующей тела по уравнению параболы второй степени.

Для тела вращения с уравнением образующей более высокой степени необходимо вычислять значения $i_x{}^n$ для $n=3$, 4 и т. д. В частности, если уравнение образующей таково, что производная $S''(x)$ (10.3.22) определяется по уравнению

$$S''(x)=\sum_{n=0}^{3} a_n x^n, \qquad (10.3.22')$$

то в соответствии с (10.3.23) составляющая скорости

$$V_{x1}=-\sum_{n=0}^{3} b_n i_x^n, \qquad (10.3.23')$$

где $i_x{}^n$ вычисляется для значений $n=0$, 1, 2 по формулам (10.3.19), а для $n=3$ — из выражения

$$i_x^3=u^3 I_0-3u^2 I_1+3u I_2-I_3. \qquad (10.3.24)$$

Функции i_x^n, вычисленные для значений параметра u от 1 до 8,8, приведены в табл. 10.3.1.

Как частный случай, из соотношения (10.3.21) можно получить выражение для составляющей скорости на тонком конусе. Для этого надо заменить $1/\lambda_{\text{мид}}$ на $\beta_0=\beta_{\text{к}}$ (угол заострения параболического тела вращения у острия) и принять $x=0$:

$$V'_{x1\text{к}}=-V_\infty (i_x^0)_{\text{к}} \beta_{\text{к}}^2. \qquad (10.3.25)$$

Таблица 10.3.1

u	i_x^0	i_x^1	i_x^2	i_x^3	i_r^0	i_r^1	i_r^2	i_r^3
1,0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,1	0,4435	0,0298	0,0019	0,0001	0,4582	0,0303	0,0026	0,0004
1,2	0,6223	0,0838	0,0149	0,0071	0,6633	0,0856	0,0109	0,0015
1,3	0,7567	0,1527	0,0392	0,0095	0,8312	0,1256	0,0383	0,0096
1,4	0,8673	0,2342	0,0753	0,0254	0,9804	0,2526	0,0794	0,0281
1,6	1,047	0,4265	0,2068	0,2412	1,249	0,4756	0,2230	0,1124
1,8	1,177	0,6690	0,4875	0,4631	1,450	0,7166	0,4137	0,2949
2,0	1,317	0,9024	0,7314	0,6332	1,732	1,073	0,8296	0,6950
2,4	1,522	1,472	1,675	2,030	2,182	1,857	1,990	2,326
2,8	1,690	2,116	3,107	4,854	2,615	2,816	3,846	5,946
3,2	1,831	2,820	5,076	9,701	3,040	3,948	6,543	11,90
3,6	1,954	3,578	7,634	17,28	3,458	5,247	10,21	21,84

Продолжение табл. 10.3.1

u	i_x^0	i_x^1	i_x^2	i_x^3	i_r^0	i_r^1	i_r^2	i_r^3
4,0	2,064	4,382	10,81	28,28	3,873	6,714	14,98	36,84
4,4	2,162	5,227	14,65	43,46	4,286	8,348	21,00	58,31
4,8	2,251	6,111	19,19	63,76	4,694	10,14	28,37	87,74
5,2	2,333	7,028	24,44	89,85	5,103	12,10	37,26	127,0
5,6	2,408	7,976	30,44	122,7	5,510	14,22	47,78	177,9
6,0	2,478	8,953	37,21	163,2	5,916	16,51	60,07	242,4
6,4	2,544	9,958	44,77	212,3	6,322	18,96	74,25	322,8
6,8	2,605	10,99	53,17	271,1	6,726	21,56	90,44	421,4
7,2	2,663	12,04	62,37	340,2	7,130	24,34	108,8	540,7
7,6	2,717	13,12	72,43	421,0	7,534	27,27	129,4	683,4
8,0	2,769	14,22	83,37	514,5	7,937	30,36	152,5	852,2
8,4	2,818	15,33	95,18	621,4	8,341	33,62	178,1	1050,4
8,8	2,865	16,47	107,9	743,3	8,743	37,04	206,3	1280,6

Имея в виду, что в соответствии с (10.3.19) и (10.3.20) для конуса

$$i_{x\,\text{к}}^0 = I_{0\text{к}} = \operatorname{arch} u_{\text{к}},$$

где $u_{\text{к}} = (x/\alpha' r)_{\text{к}} = 1/(\alpha' \beta_{\text{к}})$,
напишем для составляющей скорости

$$V'_{x1\text{к}} = -V_\infty \beta_{\text{к}}^2 \operatorname{arch} u_{\text{к}} = -V_\infty \beta_{\text{к}}^2 \ln\left(u_{\text{к}} + \sqrt{v_{\text{к}}^2 - 1}\right). \quad (10.3.25')$$

По найденным значениям V'_{x1k} можно определить по (10.2.27) коэффициент давления на поверхности тела вращения в соответствующей точке. В частности, на конической поверхности, где добавочная составляющая скорости определяется из (10.3.25′), коэффициент давления

$$\bar{p}_{1\text{к}} = \beta_{\text{к}}^2 \left[2 \ln\left(u_{\text{к}} + \sqrt{u_{\text{к}}^2 - 1}\right) - 1\right]. \quad (10.3.26)$$

В соответствии с (9.2.30) зависимость (10.3.26) определяет коэффициент волнового сопротивления тонкого конуса, т. е.

$$c_{x\,\text{в.к}} = \bar{p}_{1\text{к}} = \beta_{\text{к}}^2 \left[2 \ln\left(u_{\text{к}} + \sqrt{u_{\text{к}}^2 - 1}\right) - 1\right]. \quad (10.3.26')$$

Для тонкого тела вращения произвольной формы коэффициент волнового сопротивления следует рассчитывать по формуле (10.1.51), в которой коэффициент давления в соответствии с (10.3.14) и (10.2.27)

$$\bar{p}_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\operatorname{arch} u} S''(x - \alpha' r \operatorname{ch} z)\, dz - \left(\frac{dr}{dx}\right)^2. \quad (10.3.27)$$

На рис. 10.3.2 показано распределение коэффициента давления, найденное по линеаризованной теории при $\mathbf{M}_\infty = 1{,}5$ для всех трех участков тонкого тела вращения — головного, цилиндрического и хвостового. Как видно, вниз по потоку давление вдоль цилиндра, начиная с конца головки, возрастает, постепенно восстанавливаясь до соответствующей величины в набегающем потоке ($\bar{p}_1 \to 0$). Обтекание сужающейся части (кормы) сопровождается увеличением разрежения.

Полагая $dr/dx = \operatorname{tg}\beta \approx \beta$, найдем формулу для коэффициента волнового сопротивления:

$$c_{x\text{в}} = 2\int\limits_0^{\tilde{x}_\text{к}} \left[\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\operatorname{arch} u} S''(x-\alpha' r \operatorname{ch} z)\,dz - \beta^2\right]\bar{r}\beta\, d\tilde{x}, \qquad (10.3.28)$$

где $\tilde{x} = x/r_\text{мид}$.

Для параболической образующей с уравнением $r = (r_\text{мид}/x_\text{мид}) \times x(2 - x/x_\text{мид})$ производная

$$\frac{dr}{dx} = \frac{2r_\text{мид}}{x_\text{мид}}(1-\bar{x}) = \frac{1}{\lambda_\text{мид}}(1-\bar{x}) = \beta_0(1-\bar{x}), \qquad (10.3.29)$$

где $\bar{x} = x/x_\text{мид}$.

Этот коэффициент можно рассматривать как сумму двух составляющих: $c_{x\text{в}} = c^\text{г}_{x\text{в}} + c^\text{кр}_{x\text{в}}$, где $c^\text{г}_{x\text{в}}$ и $c^\text{кр}_{x\text{в}}$ — коэффициенты волнового сопротивления соответственно головной части и кормы. Принимая во внимание, что практически давление на цилиндре восстанавливается до атмосферного p, следовательно, поток перед хвостовым участком считается невозмущенным, распределение давления по этому участку и соответствующую величину $c^\text{кр}_{x\text{в}}$ можно рассматривать независимо от головной части.

Изменение этой величины характеризуется графиками, изображенными на рис. 10.3.3, из которых видно, что $c^\text{кр}_{x\text{в}}$ зависит от удлинения кормы $\lambda_\text{кр} = x_\text{кр}/d_\text{мид}$ (где $x_\text{кр}$ — длина хвостового участка), числа M_∞ и донного сужения $\bar{S}_\text{дон} = S_\text{дон}/S_\text{мид}$. С увеличением $\bar{S}_\text{дон}$ снижается величина проекции хвостовой поверхности на плоскость, перпендикулярную продольной оси тела, что обусловливает уменьшение сопротивления кормы. Значение $c^\text{г}_{x\text{в}}$ для головной части можно вычислять по (10.1.52) или при помощи зависимости, полученной в соответствии с линеаризованной теорией [9],

$$M_\infty^2\, c^\text{г}_{x\text{в}} = K_1^2\left(\frac{2}{3}\ln\frac{2}{K_1} - \frac{1}{18}\right), \qquad (10.3.28')$$

в которой $K_1 = M_\infty \beta_0$.

Интеграл в (10.3.27) может быть выражен в соответствии с (10.3.16′) в виде

$$\int\limits_0^{\operatorname{arch} u} S''(x - \alpha' r \operatorname{ch} z)\,dz = \beta_0^2 N_1(u, \bar{x}). \qquad (10.3.30)$$

Здесь N_1 — некоторая функция безразмерной координаты $\bar{x}$ и параметра u, определяемого из условия

$$u = \frac{x}{\alpha' r} = \frac{x_\text{мид}}{\alpha' r_\text{мид}} \cdot \frac{1}{2 - x/x_\text{мид}} = \frac{u_0}{2-\bar{x}}, \qquad (10.3.31)$$

где $u_0 = 1/(\alpha'\beta_0)$.

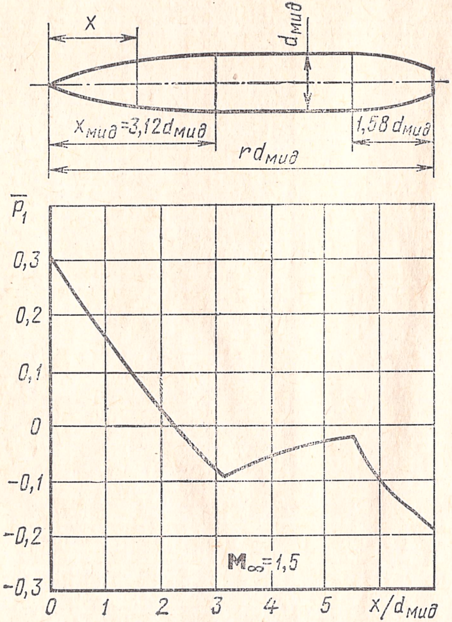


Рис. 10.3.2. Распределение коэффициента давления по поверхности корпуса, имеющего параболическую головную и хвостовую части

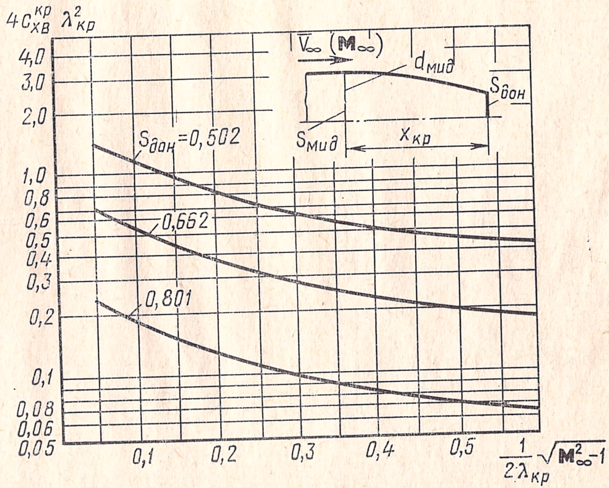


Рис. 10.3.3. Коэффициент сопротивления хвостовой сужающейся части корпуса с параболической образующей

Принимая во внимание (10.3.29)—(10.3.31), зависимость (10.3.27) можно представить в общем виде:

$$\bar{p}_1 = \beta_0^2 N(u_0, \bar{x}), \qquad (10.3.32)$$

где N — некоторая функция параметра u_0 и безразмерной координаты $\bar{x}$.

С учетом (10.3.32) коэффициент волнового сопротивления (10.3.28)

$$c_{x\text{в}} = \beta_0^2 D(u_0), \qquad (10.3.33)$$

где D — некоторая функция только параметра u_0.

Общие формулы (10.3.32) и (10.3.33) позволяют сделать следующий вывод об аэродинамическом подобии потоков около параболических тел вращения. Если эти потоки характеризуются одним и тем же значением параметра u_0, то в соответственных точках с одинаковыми безразмерными координатами $\bar{x}$ будут одинаковы отношения $\bar{p}_1/\beta_0^2$. В аэродинамически подобных потоках тела вращения испытывают такие осевые усилия, что отношения $c_{x\text{в}}/\beta_0^2$ для них будут одинаковыми. Таким образом, критерием подобия в данном случае является параметр

$$u_0 = 1/(\alpha'\beta_0) = 1\Big/\left(\beta_0\sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1}\right) = \lambda_{\text{мид}}\Big/\sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1}. \qquad (10.3.34)$$

Для чисел $\mathbf{M}_\infty \gg 1$ параметр u_0 можно представить в виде

$$u_0 = 1/\mathbf{K}_1, \qquad (10.3.34')$$

где $\mathbf{K}_1 = \beta_0 \mathbf{M}_\infty = \mathbf{M}_\infty/\lambda_{\text{мид}}$.

Умножая обе части (10.3.32) на $\mathbf{M}_\infty^2$ и учитывая зависимость (10.3.34′), найдем

$$p_1/p_\infty - 1 = N_2(\mathbf{K}_1, \bar{x}), \qquad (10.3.35)$$

где N_2 — некоторая функция аргументов $\mathbf{K}_1$ и x.

В соответствии с выражением (10.3.35) в данной точке $\bar{x}$ функция давления $p_1/p_\infty - 1$ зависит только от параметра $\mathbf{K}_1$. Закон подобия по этому параметру подтверждается также результатами расчета по методу характеристик.

Исследования показывают, что при использовании линеаризованных методов расчета обтекания удовлетворительное совпадение результатов для функции давления получается для значений параметров подобия $\mathbf{K}_1$, меньших единицы. Закон подобия по этому параметру оказывается сомнительным при некоторых сочетаниях чисел $\mathbf{M}_\infty$ и удлинений $\lambda_{\text{мид}}$, что непосредственно следует из анализа пределов применимости линеаризованной теории. Эти пределы можно установить, например, из формулы (10.3.26), определяющей коэффициент давления на конусе. Очевидно, при $u_k = u_0 < 1$ эта формула теряет смысл, так как величина $\sqrt{u_0^2 - 1}$ будет мнимой. Когда же u_0, оставаясь больше единицы, приближается к ней, формула (10.3.26) дает нереальную (отрицательную) величину коэффициента давления на тонком конусе. Следовательно, расчет по линеаризованной теории дает удовлетворительные результаты лишь для условий, при которых $u_0 \gg 1$. Из этого вытекает, что, очевидно, сомнительным применение закона подобия будет в том случае, если u_0 мало отличается от единицы.

Физически таким значениям u_0 соответствует отклонение действительного течения от линеаризованного. В самом деле, если удлинение уменьшается, т. е. тело становится более толстым (менее заостренным) или при том же удлинении возрастает число M_∞, то в обоих случаях поток все более отличается от линеаризованного. Чтобы сохранить линеаризованный характер течения, необходимо при больших числах M_∞ увеличивать удлинение, т. е. больше заострять тело. При этом должно быть соблюдено неравенство $\lambda_{\text{мид}} > \mathrm{M}_\infty$. В соответствии с этим параметр подобия $\mathrm{K}_1 = \mathrm{M}_\infty/\lambda_{\text{мид}}$ должен быть меньше единицы.

Из выражения $u_0 = (\alpha'\beta_0)^{-1}$ следует, что если тело вращения тонкое, т. е. удлинение велико, то для сохранения неравенства $u_0 > 1$ необходимо выполнить условие $\mathrm{M}_\infty > 1$. Если же число $\mathrm{M}_\infty \to 1$, то, как следует из формулы (10.3.25′), возмущенная скорость по абсолютной величине достигает бесконечно большого значения, что физически невозможно. Таким образом, теория линеаризованных течений и законы их подобия пригодны при одновременном соблюдении двух неравенств:

$$\lambda_{\text{мид}} > (\mathrm{M}_\infty^2 - 1)^{1/2} \text{ и } \mathrm{M}_\infty > 1. \qquad (10.3.36)$$

Сравнение с экспериментальными данными показывает, что расчеты по линеаризованной теории и применение критериев подобия возможны для удлинений $\lambda_{\text{мид}} \geqslant 2$ и чисел M_∞ не менее $1{,}4 \div 1{,}5$ ($\mathrm{K}_1 = \mathrm{M}_\infty/\lambda_{\text{мид}} < 0{,}7 \div 0{,}75$).

Подобие по параметру $\mathrm{K}_1 = \mathrm{M}_\infty\beta_0$ для давления определяет подобие и для функции волнового сопротивления, причем применение этого закона подобия должно быть связано с требованием сохранения линеаризованного течения. Возможные пределы этого применения могут быть определены по графику (см. рис. 10.1.4).

Умножив обе части формулы (10.3.33) на M_∞^2, получим общее выражение для функции сопротивления

$$\mathrm{M}_\infty^2 c_{x\text{в}} = \beta_0^2 H(\mathrm{K}_1), \qquad (10.3.37)$$

где $H(\mathrm{K}_1)$ — некоторая функция, зависящая от параметра K_1.

Это выражение говорит о том, что если обтекание двух или нескольких тел вращения с различным удлинением характеризуется одним и тем же значением параметра K_1, то у каждого из этих тел будет одна и та же величина функции $\mathrm{M}_\infty^2 c_{x\text{в}}$.

Рассмотренные критерии подобия были получены на примере тел вращения с параболической образующей. Эти тела вращения обладают свойством, вытекающим из уравнения (10.1.48) и состоящим в том, что вся их бесконечная совокупность характеризуется одинаковым по длине распределением относительных толщин:

$\bar{x}=x/x_{\text{мид}}$ . . .	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$\bar{r}=r/r_{\text{мид}}$	0	0,36	0,64	0,84	0,96	1,0	0,96	0,84	0,64	0,36	0

Среди этой совокупности могут быть геометрически подобные тела, отличающиеся своими линейными размерами в одно и то же число раз. Такие тела, очевидно, имеют одинаковое удлинение, и их можно совместить друг с другом путем равномерной, т. е. одинаковой для всех направлений, деформации. Для выполнения аэродинамического подобия необходимо обеспечить для рассматриваемой геометрически подобной модели то же число $\mathbf{M}_\infty$, что и для натурного тела вращения.

Однако совокупность параболических тел включает и такие формы, которые можно совместить лишь путем неравномерной деформации. Представим себе два тела с различными удлинениями. Если ввести линейный масштаб, одинаковый для радиальной и осевой координат, то деформация тела в продольном и осевом направлениях не дает полного совмещения. Такое совмещение, называемое аффинным, может быть достигнуто, если масштабы для радиальной и осевой координат будут различными. В соответствии с этим тела с параболической образующей называют аффинно-подобными. К этому же классу аффинно-подобных тел относят конические тела, образующие которых задаются уравнением в безразмерной форме $\bar{r}=\bar{x}$. Конические тела характеризуются, следовательно, одинаковым распределением относительных толщин, которое не зависит от удлинения этих тел.

В отличие от параболических и конических тел у оживальных головок (с образующей в виде дуги окружности) с изменением $\lambda_{\text{мид}}$ меняется распределение по длине относительных толщин $\bar{r}$. Вследствие этого нельзя аффинно преобразовать одну оживальную головку в другую. Однако в тех случаях, когда исследуется линеаризованное обтекание тонких тел, рассмотренные критерии подобия могут быть использованы, так как при больших удлинениях ($\lambda_{\text{мид}}>3$) оживальная головка мало отличается от параболической.

§ 10.4. НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ОБТЕКАНИЕ

Задача о неосесимметричном обтекании сводится к определению добавочного потенциала φ_2', обусловленного поперечным потоком газа около тонкого тела вращения и удовлетворяющего уравнению (10.2.10′). Покажем, что решение для φ_2' может быть получено при помощи решения φ_1' для осесимметричного обтекания, т. е. покажем, что между φ_2' и φ_1' существует взаимная связь. С этой целью продифференцируем по r уравнение (10.2.11′) осесимметричного возмущенного течения:

$$(1-\mathbf{M}_\infty^2)\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi_1'}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{\partial\varphi_1'}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2}\ \frac{\partial\varphi_1'}{\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2\varphi_1'}{\partial r^2}=0. \qquad (10.4.1)$$

Если принять, что

$$\varphi_2'=-\left(\partial\varphi_1'/\partial r\right)\cos\gamma, \qquad (10.4.2)$$

то после подстановки его в исходное уравнение (10.2.10″) придем к (10.4.1). Следовательно, равенство (10.4.2) действительно имеет место и полный потенциал возмущения при неосесимметричном обтекании может рассматриваться в виде

$$\varphi'=\varphi_1'+\varphi_2'=\varphi_1'-\left(\partial\varphi_1'/\partial r\right)\cos\gamma. \qquad (10.4.3)$$

Чтобы выяснить физический смысл интеграла φ_2', воспользуемся методом аналогии, который был применен при рассмотрении осесимметричного обтекания и заключался в том, что обтекаемое тело как в сжимаемом, так и в несжимаемом потоках заменялось системой источников и стоков.

В рассматриваемом случае неосесимметричного обтекания тела метод аналогии будет состоять в следующем. Если φ_1' считать потенциальной функцией источников (стоков) несжимаемой жидкости, непрерывно распределенных по оси тела, то в соответствии с выражением (2.9.21′) производную $\partial\varphi_1'/\partial r$ следует рассматривать как функцию, определяющую поток от диполей, расположенных вдоль той же оси. В соответствии со сказанным при исследовании обтекания тела неосесимметричным несжимаемым потоком оно может быть заменено системой непрерывно распределенных вдоль его оси диполей. Распространяя указанную выше аналогию (осесимметричное течение) на случай обтекания тела с нарушением осевой симметрии, будем считать, что в сверхзвуковом линеаризованном потоке обтекаемое тело может быть заменено системой распределенных вдоль оси сверхзвуковых диполей, а φ_2' — потенциал от этих диполей.

В соответствии с (10.3.5)

$$\varphi_2'=-\cos\gamma\,\frac{\partial}{\partial r}\int\limits_0^{\operatorname{arch}(x/\alpha' r)} f(x-\alpha' r\operatorname{ch}z)\operatorname{ch}z\,dz=$$

$$=\alpha'\cos\gamma\int\limits_0^{\operatorname{arch}(x/\alpha' r)} \dot{f}(x-\alpha' r\operatorname{ch}z)\operatorname{ch}z\,dz. \qquad (10.4.4)$$

Заменив здесь функцию $\dot{f}(\varepsilon)$ на $m(\varepsilon)$ и обозначив $x/(\alpha' r)=u$, получим

$$\varphi_2'=\alpha'\cos\gamma\int\limits_0^{\operatorname{arch}u} m(x-\alpha' r\operatorname{ch}z)\operatorname{ch}z\,dz. \qquad (10.4.4')$$

Функция $m(\varepsilon)$ в выражении (10.4.4′) описывает закон распределения диполей, т. е. характер изменения их моментов вдоль оси тела вращения. Заменяя тело распределенными по его оси диполями, следует учитывать особенность распространения возмущения в сверхзвуковом потоке, заключающуюся в том, что возмущения от диполей, как и возмущения от источников, распространяются только вниз по потоку в пределах конуса возмущения.

Итак, пользуясь изложенным методом аналогии, будем при исследовании неосесимметричного, или, как говорят, косого, обтекания тела вращения заменять его системой диполей. Смысл такой замены состоит в том, что добавочное возмущение, вносимое телом в поток при косом обтекании, эквивалентно возмущению от диполей, размещенных на его оси определенным образом в зависимости от формы и условий набегающего потока.

Решение задачи о косом обтекании, которое сводится к расчету параметров потока, поперечного относительно оси тела, будет найдено, если функция $m(\varepsilon)$ подобрана таким образом, что потенциал φ_2' удовлетворяет дополнительному граничному условию на поверхности тела при неосесимметричном обтекании. Это условие на основании (10.2.22) и (10.4.4′) можно записать в виде

$$\alpha' \cos\gamma \, \frac{\partial}{\partial r} \int\limits_0^{\operatorname{arch} u} m(x-\alpha' r \operatorname{ch} z) \operatorname{ch} z dz = -\alpha V_\infty \cos\gamma.$$

Продифференцировав это выражение, получим

$$\alpha'^2 \int\limits_0^{\operatorname{arch} u} \dot{m}(x-\alpha' r \operatorname{ch} z) \operatorname{ch}^2 z dz = \alpha V_\infty, \qquad (10.4.5)$$

где $\dot{m}$ — производная функции m по аргументу $x-\alpha' r \operatorname{ch} z$.

Решая интегральное уравнение (10.4.5), можно определить для заданной формы тела и скорости набегающего потока функцию распределения диполей m. Решение этого уравнения можно упростить, если рассмотреть весьма тонкое тело вращения. Для этой цели преобразуем (10.4.5) с помощью переменной $\varepsilon = x - \alpha' r \operatorname{ch} z$:

$$\frac{1}{r^2} \int\limits_0^{x-\alpha' r} \frac{\dot{m}(\varepsilon)(x-\varepsilon)^2 d\varepsilon}{\sqrt{(x-\varepsilon)^2 - \alpha'^2 r^2}} = \alpha V_\infty. \qquad (10.4.6)$$

Для весьма тонкого тела с малым r интеграл в (10.4.6) может быть принят в первом приближении равным его значению при $r \to 0$. Тогда

$$\alpha V_\infty r^2 = \int\limits_0^x \dot{m}(\varepsilon)(x-\varepsilon) d\varepsilon,$$

или

$$\alpha V_\infty r^2 = \int\limits_0^x (x-\varepsilon) dm.$$

Интегрируя по частям и полагая $\bar{u}=x-\varepsilon$, $d\bar{v}=dm$, получим

$$\alpha V_{\infty} r^2=(x-\varepsilon)\, m(\varepsilon)\Big|_0^x+\int\limits_0^x m(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Так как у острия $m(\varepsilon)=m(0)=0$, а значение $\varepsilon \approx x$ вследствие $r \ll x$, то

$$\alpha V_{\infty} r^2=\int\limits_0^x m(x)\, dx.$$

После дифференцирования по x получим

$$m(x)=2\alpha V_{\infty} r\,(dr/dx). \qquad (10.4.7)$$

Выражение (10.4.7) для функции $m(x)$, определяющей закон распределения диполей в предельном случае при $r \to 0$, может быть использовано для расчета неосесимметричного обтекания тела, отличающегося от весьма тонкого, по аналогии с тем, как это было сделано в § 10.3 в связи с применением функции f (10.3.11) распределения источников для исследования осесимметричного обтекания. Для этого в (10.4.7) необходимо перейти от переменной x к переменной $\varepsilon=x-\alpha' r \operatorname{ch} z$ и написать

$$m(x-\alpha' r \operatorname{ch} z)=\alpha V_{\infty} \frac{dr^2}{d\varepsilon}=\frac{\alpha V_{\infty}}{\pi} S'(x-\alpha' r \operatorname{ch} z), \qquad (10.4.8)$$

откуда производная

$$\dot{m}(x-\alpha' r \operatorname{ch} z)=\frac{\alpha V_{\infty}}{\pi} S''(x-\alpha' r \operatorname{ch} z). \qquad (10.4.9)$$

Вычисляя производную φ'_{2x} от добавочного потенциала (10.4.4′), получим зависимость для осевой составляющей скорости:

$$V_{x2}=\varphi'_{2x}=\alpha' \cos\gamma \int\limits_0^{\operatorname{arch} u} \dot{m}\,(x-\alpha' r \operatorname{ch} z) \operatorname{ch} z\, dz. \qquad (10.4.10)$$

Внося сюда значение $\dot{m}$ из (10.4.9), найдем

$$V'_{x2}=\frac{\alpha'\alpha V_{\infty} \cos\gamma}{\pi} \int\limits_0^{\operatorname{arch} u} S''(x-\alpha' r \operatorname{ch} z) \operatorname{ch} z\, dz. \qquad (10.4.11)$$

Для частного случая параболической образующей с уравнением (10.1.48) вторая производная от функции $S(x)$ определяется формулой (10.3.16), следовательно,

$$V'_{x2}=\frac{\alpha'\alpha V_{\infty} \cos\gamma}{\lambda^2_{\text{мид}}} \int\limits_0^{\operatorname{arch} u} \left[2-\frac{6\bar{x}}{u}(u-\operatorname{ch} z)+\right.$$

$$\left.+\frac{3\bar{x}^2}{u^2}(u-\operatorname{ch} z)^2\right] \operatorname{ch} z\, dz, \qquad (10.4.12)$$

где $\bar{x}=x/x_{\text{мид}}$, $u=x/(\alpha' r)$.

Введем обозначения:

$$i_r^0=I_1;\quad i_r^1=uI_1-I_2;\quad i_r^2=u^2I_1-2uI_2+I_3, \qquad (10.4.13)$$

где величины I_n $(n=1,\ 2,\ 3)$ определяются в виде интегралов (10.3.20).

В соответствии с этими обозначениями

$$V'_{x_2}=\frac{\alpha'\alpha V_\infty\cos\gamma}{\lambda^2_{\text{мид}}}\left(2i_r^0-\frac{6\bar{x}}{u}\,i_r^1+\frac{3\bar{x}^2}{u^2}\,i_r^2\right). \qquad (10.4.14)$$

В случае более общего задания функции $S''(x)$ (10.3.22) выражение, аналогичное (10.4.12), можно представить в виде

$$V'_{x\,2}=\sum_{n=0}^{l} g_n i_r^n. \qquad (10.4.15)$$

Коэффициенты g_n зависят от вида образующей тела вращения и условий набегающего потока (угла атаки α, скорости V_∞). Значения функции i_r^n вычисляются для $n=0,\ 1,\ 2$ по (10.4.13), а для $n=3$ — из выражения

$$i_r^3=u^3I_1-3u^2I_2+3uI_3-I_4. \qquad (10.4.16)$$

Функции i_r^n, вычисленные для значений параметра u от 1 до 8,8, приведены в табл. 10.3.1.

Для тонкого конуса, обтекаемого под малым углом атаки, из (10.4.14), полагая $\bar{x}=0$, $\lambda^2_{\text{мид}}=1/\beta^2_{\text{к}}$, получим

$$V'_{x2\text{к}}=2\alpha'\alpha V_\infty i^0_{r\,\text{к}}\beta^2_{\text{к}}\cos\gamma. \qquad (10.4.17)$$

В соответствии с (10.3.20)

$$i^0_{r\,\text{к}}=\int_0^{\operatorname{arch} u_{\text{к}}}\operatorname{ch} z\,dz=\sqrt{u^2_{\text{к}}-1}. \qquad (10.4.18)$$

Имея в виду также, что $u_{\text{к}}=1/(\alpha'\beta_{\text{к}})$, получим

$$V'_{x2\text{к}}=2\alpha\beta_{\text{к}}V_\infty\cos\gamma\sqrt{1-(\alpha'\beta_{\text{к}})^2}. \qquad (10.4.19)$$

Используя формулу (10.2.28), можно определить коэффициент давления в рассматриваемой точке поверхности тела вращения. Входящая в эту формулу производная $\varphi'_{2\gamma}$ равна в соответствии с (10.4.4′) и (10.4.8)

$$\varphi'_{2\gamma}=\frac{\partial\varphi'_2}{\partial\gamma}=\alpha'\sin\gamma\int_0^{\operatorname{arch} u} m(x-\alpha' r\operatorname{ch} z)\operatorname{ch} z\,dz=$$

$$=\frac{\alpha'\alpha V_\infty\cos\gamma}{\pi}\int_0^{\operatorname{arch} u} S'(x-\alpha' r\operatorname{ch} z)\operatorname{ch} z\,dz. \qquad (10.4.20)$$

Вместо (10.4.20) можно воспользоваться упрощенным соотношением для $\varphi'_{2\gamma}$, которое получается из потенциала φ'_2, представленного на основе (10.3.10) и (10.4.2) в виде

$$\varphi'_2 = -(\partial\varphi'_1/\partial r)\cos\gamma = [f(x)/r]\cos\gamma. \qquad (10.4.21)$$

Дифференцируя по γ, найдем

$$\partial\varphi'_2/\partial\gamma = \varphi'_{2\gamma} = -[f(x)/r]\sin\gamma. \qquad (10.4.22)$$

Вычисляя производную по r, определим добавочную радиальную составляющую скорости для условий $r \to 0$:

$$V'_{2r} = \varphi'_{2r} = \partial\varphi'_2/\partial r = -[f(x)/r^2]\cos\gamma. \qquad (10.4.23)$$

В соответствии с условием (10.2.22) безотрывного обтекания эта составляющая скорости

$$V'_{2r} = -[f(x)/r^2]\cos\gamma = -\alpha V_\infty\cos\gamma.$$

Отсюда находим значение

$$f(x) = \alpha V_\infty r^2. \qquad (10.4.24)$$

Следовательно,

$$\varphi'_{2\gamma} = -\alpha V_\infty r\sin\gamma. \qquad (10.4.25)$$

Внеся это выражение в (10.2.28), получим

$$\bar{p}_2 = \frac{-2}{V_\infty^2}\left[V_\infty\varphi'_{2x} + \frac{\alpha^2V_\infty^2}{2}(4\sin^2\gamma - 1)\right], \qquad (10.4.26)$$

где φ'_{2x} вычисляется при помощи (10.4.14) или (10.4.15), а для частного случая обтекания конуса — по формуле (10.4.19).

С учетом (10.2.27) полный коэффициент давления

$$\bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \frac{-2}{V_\infty^2}\left[V_\infty\varphi'_{1x} + \frac{V_\infty^2}{2}\left(\frac{dr}{dx}\right)^2 + V_\infty\varphi'_{2x} + \frac{\alpha^2V_\infty^2}{2}(4\sin^2\gamma - 1)\right]. \qquad (10.4.27)$$

§ 10.5. РАСЧЕТ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

По найденному распределению давления около тела вращения при обтекании его под углом атаки, т. е. с нарушением осевой симметрии, можно определить аэродинамические силы, моменты и их аэродинамические коэффициенты. Схемы действия сил и момента приведены на рис. 7.5.4 и 7.5.5.

Получим вначале общие выражения для расчета сил, моментов и коэффициентов при том условии, что геометрическая форма обтекаемого тела известна и для заданных угла атаки α, давления p_∞ и числа $\mathbf{M}_\infty$ набегающего потока найдено распределение давления по боковой поверхности тела.

Коэффициент осевой силы. Для вычисления осевой силы R и коэффициента этой силы $c_R = R/(q_\infty S_{\text{мид}})$ рассмотрим схему тела вращения (рис. 10.5.1) с произвольной образующей, определяемой уравнением $r = f(x)$. Выделим элемент поверхности шириной dx, расположенный на расстоянии x от носка. На участок этого элемента площадью $dS = r d\gamma dl$ действует сила избыточного давления, равная $(p - p_\infty) dS$.

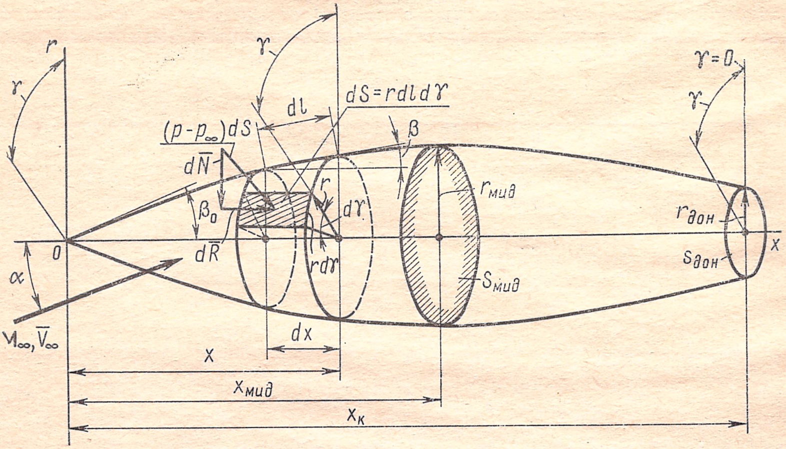


Рис. 10.5.1. К определению аэродинамических коэффициентов по известному распределению давления на поверхности тела вращения

С учетом этих данных и в соответствии с формулой (1.3.1), в которой принимаем $\tau = 0$, элементарная величина продольной силы, действующей на выделеннный участок площади, будет

$$(p - p_\infty) \cos(\widehat{nx}) dS = (p - p_\infty) r d\gamma dl \sin\beta. \qquad (10.5.1)$$

Переходя здесь к коэффициенту давления $\bar{p} = (p - p_\infty)/q_\infty$ и учитывая, что $dl = dx/\cos\beta$, найдем

$$\bar{p} q_\infty \cos(\widehat{nx}) dS = \bar{p} q_\infty r \operatorname{tg}\beta d\gamma dx.$$

Внося это выражение в формулу (1.3.2), в которой полагаем $X = R_p$, $c_{fx} = 0$, и принимая во внимание симметричный характер распределения давления по обе стороны от вертикальной плоскости симметрии, совпадающей с плоскостью угла атаки, в которой лежит вектор скорости $\bar{V}_\infty$ (эта плоскость называется также нулевой меридиональной плоскостью), получим для осевой силы ($R = R_p$, индекс «p» опускаем)

$$R = 2q_\infty \int_0^{x_\text{к}} r \operatorname{tg}\beta dx \int_0^{\pi} \bar{p} d\gamma, \qquad (10.5.2)$$

где $x_\text{к}$ — расстояние до донного среза.

Эту же силу можно выразить через коэффициент c_R по формуле

$$R = c_R q_\infty S_{\text{мид}}.$$

С учетом (10.5.2) коэффициент осевой силы

$$c_R = \frac{R}{q_\infty S_{\text{мид}}} = \frac{4\lambda_{\text{мид}}}{\pi} \int_0^{\bar{x}_{\text{к}}} \bar{r}\,\mathrm{tg}\,\beta d\bar{x} \int_0^{\pi} \bar{p} d\gamma, \qquad (10.5.3)$$

где $\bar{r} = r/r_{\text{мид}}$, $\bar{x} = x/x_{\text{мид}}$, $\bar{x}_{\text{к}} = x_{\text{к}}/x_{\text{мид}}$; $\bar{p} = (p - p_\infty)/q_\infty$ — коэффициент давления, распределение которого считается известной функцией $r(x)$, γ.

Коэффициент нормальной силы. Из рис. 10.5.1 видно, что элементарная величина нормальной силы

$$dN = -(p - p_\infty) r d\gamma dl \cos\gamma \cos\beta. \qquad (10.5.4)$$

Вводя коэффициент давления $\bar{p}$ и принимая во внимание, что $dl \cos\beta = dx$, получим для полной нормальной силы

$$N = -2q_\infty \int_0^{x_{\text{к}}} r dx \int_0^{\pi} \bar{p} \cos\gamma d\gamma. \qquad (10.5.5)$$

По этой величине можно вычислить коэффициент нормальной силы:

$$c_N = \frac{N}{q_\infty S_{\text{мид}}} = \frac{-4\lambda_{\text{мид}}}{\pi} \int_0^{\bar{x}_{\text{к}}} \bar{r} d\bar{x} \int_0^{\pi} \bar{p} \cos\gamma d\gamma. \qquad (10.5.6)$$

При осесимметричном обтекании $c_N = 0$, так как распределение давления в этом случае подчиняется свойству круговой симметрии и, следовательно, не зависит от угла γ.

Коэффициент момента. Элементарная величина момента силы от давления (момента тангажа), вычисленная относительно носка тела, равна, как следует из рис. 10.5.1,

$$dM_z = -x dN + r \cos\gamma dR.$$

Элементарный момент по знаку положителен, поэтому первый член имеет знак минус с учетом отрицательного знака dN в (10.5.4). Принимая во внимание эту формулу, а также выражение (10.5.1), получим

$$dM_z = x(p - p_\infty) r d\gamma dl \cos\gamma \cos\beta + r \cos\gamma (p - p_\infty) r d\gamma dl \sin\beta. \quad (10.5.7)$$

Учитывая симметричность распределения давления, найдем для полного момента

$$M_z = 2 \int_0^{x_{\text{к}}} x r dx \int_0^{\pi} (p - p_\infty) \cos\gamma d\gamma + 2 \int_0^{x_{\text{к}}} r^2 \,\mathrm{tg}\,\beta dx \int_0^{\pi} (p - p_\infty) \cos\gamma d\gamma, \qquad (10.5.8)$$

откуда коэффициент момента

$$m_z = \frac{M_z}{q_\infty S_{\text{мид}} x_{\text{к}}} = \frac{4\lambda_{\text{мид}}}{\pi \bar{x}_{\text{к}}} \int_0^{\bar{x}_{\text{к}}} \bar{x}\bar{r}\, d\bar{x} \int_0^{\pi} \bar{p} \cos\gamma\, d\gamma +$$

$$+ \frac{2}{\pi \bar{x}_{\text{к}}} \int_0^{\bar{x}_{\text{к}}} \bar{r}^2 \operatorname{tg}\beta\, d\bar{x} \int_0^{\pi} \bar{p} \cos\gamma\, d\gamma. \qquad (10.5.9)$$

В соответствии со схемой действия момента (см. рис. 7.5.5), уменьшающего угол атаки, коэффициент этого момента, получающийся из (10.5.9), будет по знаку отрицательным. Если тело вращения тонкое ($r \ll x_{\text{к}}$), то вторым членом в этом выражении можно пренебречь.

При осесимметричном обтекании распределение давления не зависит от угла γ, поэтому

$$\int_0^{\pi} \bar{p} \cos\gamma\, d\gamma = \bar{p} \int_0^{\pi} \cos\gamma\, d\gamma = 0$$

и, следовательно, $m_z = 0$.

Аэродинамические коэффициенты в линеаризованном потоке. Найдем значения аэродинамических коэффициентов для тонких тел вращения, обтекаемых линеаризованным потоком под углом атаки. Для этого воспользуемся соотношением (10.4.27) для коэффициента давления, в котором представим φ'_{2x} в соответствии с (10.4.2) в виде

$$\varphi'_{2x} = -\left[\partial^2 \varphi'_1/(\partial r\, \partial x)\right] \cos\gamma = -\varphi'_{1rx} \cos\gamma. \qquad (10.5.10)$$

Выделим из (10.4.27) члены, не зависящие от γ, и члены, которые определяют несимметричный характер распределения давления и являются функцией угла γ:

$$\bar{p} = P_0(x, r) + P_\gamma(x, r, \gamma), \qquad (10.5.11)$$

где

$$P_0(x, r) = \frac{-2}{V_\infty^2} \left[V_\infty \varphi'_{1x} + \frac{V_\infty^2}{2} \left(\frac{dr}{dx}\right)^2 - \frac{\alpha^2 V_\infty^2}{2} \right]; \qquad (10.5.12)$$

$$P_\gamma(x, r, \gamma) = \frac{-2}{V_\infty^2} \left(-V_\infty \varphi'_{1rx} \cos\gamma + 2\alpha^2 V_\infty^2 \sin^2\gamma \right). \qquad (10.5.13)$$

Для определения коэффициента осевой силы по (10.5.3) необходимо вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi} \bar{p}\, d\gamma = \int_0^{\pi} \left[P_0(x, r) + P_\gamma(x, r, \gamma)\right] d\gamma = \frac{-2}{V_\infty^2} \int_0^{\pi} \left[V_\infty \varphi'_{1x} + \right.$$

$$\left. + \frac{V_\infty^2}{2} \left(\frac{dr}{dx}\right)^2 - \frac{\alpha^2 V_\infty^2}{2} \right] d\gamma - \frac{2}{V_\infty^2} \int_0^{\pi} \left(-V_\infty \varphi'_{1rx} \cos\gamma + 2\alpha^2 V_\infty^2 \sin^2\gamma \right) d\gamma.$$

Учитывая, что члены в квадратных скобках, а также величина φ'_{1rx} не зависят от γ, в результате интегрирования получим

$$\int_0^{\pi} \overline{p} d\gamma = \frac{-2\pi}{V_\infty^2}\left[V_\infty \varphi'_{1x} + \frac{V_\infty^2}{2}\left(\frac{dr}{dx}\right)^2 - \frac{\alpha^2 V_\infty^2}{2}\right] - 2\alpha^2\pi =$$

$$= \frac{-2\pi}{V_\infty^2}\left[V_\infty \varphi'_{1x} + \frac{V_\infty^2}{2}\left(\frac{dr}{dx}\right)^2 + \frac{\alpha^2 V_\infty^2}{2}\right].$$

Внося это выражение в (10.5.3) и учитывая, что для тонких тел $dr/dx \approx \beta$, а φ'_{1x} определяется из (10.3.14), напишем

$$c_R = \frac{4\lambda_{\text{мид}}}{\pi} \int_0^{\overline{x}_\text{к}} \overline{r}\beta d\overline{x} \int_0^{\operatorname{arch} u} S''(x - \alpha' r \operatorname{ch} z)\, dz -$$

$$- 4\lambda_{\text{мид}} \int_0^{\overline{x}_\text{к}} \overline{r}\beta^3 d\overline{x} - 4\lambda_{\text{мид}}\alpha^2 \int_0^{\overline{x}_\text{к}} \overline{r}\beta d\overline{x}. \qquad (10.5.14)$$

Сравнивая значение c_R из (10.5.14) со значением коэффициента осевой силы при нулевом угле атаки (коэффициента волнового сопротивления), определяемым из (10.3.28), замечаем, что влияние нарушения симметрии обтекания на коэффициент c_R учитывается третьим членом в (10.5.14), зависящим от квадрата угла атаки.

Соответствующее выражение для конуса получается, если в (10.5.14) произвести подстановки:

$$\left.\begin{aligned} &\beta = \beta_\text{к},\ S'' = (d^2/dx^2)(\pi r^2) = 2\pi\beta_\text{к}^2; \\ &\overline{x} = \overline{r},\ \overline{x}_\text{к} = 1,\ \lambda_{\text{мид}} = 1/(2\beta_\text{к}) = \alpha' u_\text{к}/2 \end{aligned}\right\} \qquad (10.5.15)$$

и проинтегрировать:

$$c_R = \beta_\text{к}^2\left[2\ln\left(u_\text{к} + \sqrt{u_\text{к}^2 - 1}\right) - 1\right] - \alpha^2. \qquad (10.5.16)$$

Для очень малых углов атаки членом α^2 в (10.5.14) и (10.5.16) можно пренебречь, тогда полученные выражения для коэффициентов осевой силы будут совпадать с соответствующими зависимостями (10.3.28) и (10.3.26′) для случая осесимметричного обтекания.

Чтобы определить коэффициент нормальной силы, необходимо в соответствии с (10.5.6) вычислить интеграл:

$$\int_0^{\pi} \overline{p} \cos\gamma d\gamma = \int_0^{\pi} [P_0(x, r) + P_\gamma(x, r, \gamma)] \cos\gamma\, d\gamma =$$

$$= \frac{-2}{V_\infty^2} \int_0^{\pi} \left[V_\infty \varphi'_{1x} + \frac{V_\infty^2}{2}\left(\frac{dr}{dx}\right)^2 - \frac{\alpha^2 V_\infty^2}{2}\right] \cos\gamma d\gamma -$$

$$- \frac{2}{V_\infty^2} \int_0^{\pi} \left(-V_\infty \varphi'_{1rx} \cos\gamma + 2\alpha^2 V_\infty^2 \sin^2\gamma\right) \cos\gamma d\gamma.$$

Первый член в правой части выражения равен нулю, так как величины в квадратных скобках не зависят от угла γ, а интеграл $\int\limits_0^\pi \cos\gamma d\gamma=0$. Учитывая также, что входящий во второй член интеграл $\int\limits_0^\pi \sin^2\gamma\cos\gamma d\gamma=0$, а интеграл $\int\limits_0^\pi \cos^2\gamma d\gamma=\pi/2$, получим

$$\int\limits_0^\pi \bar{p}\cos\gamma d\gamma=\frac{\pi}{V_\infty}\varphi'_{1rx}. \tag{10.5.17}$$

Внося это выражение в (10.5.6), напишем

$$c_N=\frac{-4\lambda_{\text{мид}}}{V_\infty}\int\limits_0^{\bar{x}_\text{к}}\varphi'_{1rx}\bar{r}d\bar{x}. \tag{10.5.18}$$

В соответствии с (10.5.10) и (10.4.11)

$$\varphi'_{1rx}=-\frac{\varphi'_{2x}}{\cos\gamma}=-\frac{\alpha'\alpha V_\infty}{\pi}\int\limits_0^{\operatorname{arch}u}S''(x-\alpha' r\operatorname{ch}z)\operatorname{ch}z dz. \tag{10.5.19}$$

Следовательно,

$$c_N=\frac{4\lambda_{\text{мид}}\alpha'\alpha}{\pi}\int\limits_0^{\bar{x}_\text{к}}\bar{r}d\bar{x}\int\limits_0^{\operatorname{arch}u}S''(x-\alpha' r\operatorname{ch}z)\operatorname{ch}z dz. \tag{10.5.20}$$

Для тонкого конуса в соответствии с (10.5.15) и с учетом значения интеграла $\int\limits_0^{\operatorname{arch}u_\text{к}}\operatorname{ch}z dz=\sqrt{u_\text{к}^2-1}$ найдем

$$c_N=2\alpha'\alpha\beta_\text{к}\sqrt{u_\text{к}^2-1}. \tag{10.5.21}$$

Для коэффициента момента (10.5.9), принимая во внимание (10.5.17) и (10.5.19) и равенство $\operatorname{tg}\beta\approx\beta$, получим

$$m_z=\frac{-4\lambda_{\text{мид}}\alpha'\alpha}{\pi\bar{x}_\text{к}}\int\limits_0^{\bar{x}_\text{к}}\bar{x}\bar{r}d\bar{x}\int\limits_0^{\operatorname{arch}u}S''(x-\alpha' r\operatorname{ch}z)\operatorname{ch}z dz-$$

$$-\frac{2\alpha'\alpha}{\pi\bar{x}_\text{к}}\int\limits_0^{\bar{x}_\text{к}}\bar{r}^2\beta d\bar{x}\int\limits_0^{\operatorname{arch}u}S''(x-\alpha' r\operatorname{ch}z)\operatorname{ch}z dz. \tag{10.5.22}$$

Для тонкого конуса

$$m_z=-(4/3)\,\alpha'\alpha\beta_\text{к}(1+\beta_\text{к}^2)\sqrt{u_\text{к}^2-1}. \tag{10.5.23}$$

Для очень тонких конических тел величиной $\beta^2_\text{к}$ можно пренебречь по сравнению с единицей. Очевидно, для всех очень тонких тел вращения с произвольной образующей вторые слагаемые в (10.5.9) и соответственно в (10.5.22) можно не учитывать.

Координата центра давления (см. рис. 7.5.5), отсчитываемая от носка,

$$x_{\text{ц.д}} = -M_z/N, \qquad (10.5.24)$$

а коэффициент центра давления

$$\bar{c}_{\text{ц.д}} = x_{\text{ц.д}}/x_{\text{к}} = -m_z/c_N. \qquad (10.5.25)$$

Внося сюда значения m_z и c_N соответственно из (10.5.22) и (10.5.21), можно вычислить коэффициент центра давления для тонкого тела вращения с произвольной образующей, обтекаемого линеаризованным потоком. Величину этого коэффициента для конуса можно получить, не ограничивая обтекание линеаризованными условиями. Течение около конусов, наклоненных в потоке, обладает свойством коничности, в соответстви с которым коэффициент давления $\bar{p}$ не зависит от координат x, r, а является функцией меридионального угла. Поэтому (10.5.24) с учетом (10.5.6) и (10.5.9) можно написать в виде

$$\bar{c}_{\text{ц.д}} = \left(2\lambda_{\text{мид}} \int\limits_0^{\bar{x}_{\text{к}}} \bar{x}\bar{r}\,d\bar{x} + \int\limits_0^{\bar{x}_{\text{к}}} \bar{r}^2 \operatorname{tg}\beta_{\text{к}}\,d\bar{x}\right) \Bigg/ \left(2\lambda_{\text{мид}}\bar{x}_{\text{к}} \int\limits_0^{\bar{x}_{\text{к}}} \bar{r}\,d\bar{x}\right). \qquad (10.5.26)$$

Принимая во внимание, что для конуса $\bar{x}=\bar{r}$, $\bar{x}_{\text{к}}=1$, $\lambda_{\text{мид}}=1/(2\operatorname{tg}\beta_{\text{к}})$, после интегрирования получим

$$\bar{c}_{\text{ц.д}} = (2/3)(1+\operatorname{tg}^2\beta_{\text{к}}). \qquad (10.5.27)$$

Для тонких конусов в (10.5.27) можно принять $\operatorname{tg}^2\beta_{\text{к}} \approx \beta_{\text{к}}^2$. Тогда получим соотношение $\bar{c}_{\text{ц.д}} = (2/3)(1+\beta_{\text{к}})$, которое, как видно, непосредственно может быть определено из формул для коэффиентов момента (10.5.23) и нормальной силы (10.5.21). Согласно (10.5.27), с утолщением конуса (увеличением угла $\beta_{\text{к}}$) центр давления сдвигается к хвостовому участку, так как возрастают силы от давления, действующие на этом участке, и значительней становится стабилизирующий момент от этих сил, способствующий такому сдвигу центра давления.

Коэффициенты нормальной c_N и осевой c_R сил, отнесенные к связанным осям координат, могут быть использованы для получения коэффициентов аэродинамических сил в поточной системе координат. Соответствующие расчеты осуществляются при помощи формул (7.5.25′), согласно которым коэффициенты волнового сопротивления и подъемной силы:

$$c_x = \beta_{\text{к}}^2 \left[2\ln\left(u_{\text{к}} + \sqrt{u_{\text{к}}^2 - 1}\right) - 1\right] + \alpha^2\left(2\alpha'\beta_{\text{к}}\sqrt{u_{\text{к}}^2 - 1} - 1\right); \qquad (10.5.28)$$

$$c_y = 2\alpha'\alpha\beta_{\text{к}}\sqrt{u_{\text{к}}^2 - 1}. \qquad (10.5.29)$$

Закон подобия. Для вывода закона подобия при обтекании тела вращения линеаризованным потоком воспользуемся выражением (10.4.26) для коэффициента давления $\bar{p}_2$, которое перепишем в виде

$$\bar{p}_2 = (-2/V_\infty)\, V'_{x2} - \alpha^2 (4 \sin^2 \gamma - 1). \qquad (10.5.30)$$

Для параболической формы тела дополнительная составляющая скорости V'_{x2} в заданной точке поверхности определяется из (10.4.14) как функция параметра u, вычисляемого, в свою очередь, в зависимости от величины $u_0 = 1/(\alpha' \beta_0)$ по (10.3.31). С учетом этого, а также принимая во внимание равенство $\lambda_{\text{мид}} = 1/\beta_0$, соотношение (10.5.30) можно записать в общем виде:

$$\bar{p}_2 = -2\alpha\beta_0 G(u_0, \bar{x}) \cos\gamma - \alpha^2 (4 \sin^2 \gamma - 1), \qquad (10.5.31)$$

где G — некоторая функция, зависящая для данной точки поверхности от величины u_0.

Рассмотрим случаи, когда число M_∞ потока, обтекающего тело вращения, велико и можно принять $\alpha' \approx M_\infty$. Тогда, умножив обе части равенства (10.5.31) на M_∞^2, найдем

$$p_2/p_1 - 1 = -k(\alpha/\beta_0)\, K_1^2 G_1(K_1, \bar{x}) - (k/2)(\alpha/\beta_0)^2 K_1^2 (4 \sin^2 \gamma - 1), \qquad (10.5.32)$$

где G_1 — некоторая функция, определяемая в данной точке параметром $K_1 = M_\infty \beta_0 = M_\infty / \lambda_{\text{мид}}$.

Введем параметр подобия

$$K_2 = \alpha/\beta_0 = \alpha \lambda_{\text{мид}} \qquad (10.5.33)$$

и перепишем (10.5.32) в более общем виде:

$$p_2/p_1 - 1 = B(K_1, K_2, \bar{x}, \gamma), \qquad (10.5.34)$$

где B — некоторая функция.

Из этой зависимости, являющейся выражением закона подобия при обтекании тонких аффинно-подобных тел, следует, что функция давления в данной точке поверхности с координатами $\bar{x}$, γ будет одинаковой, если у обтекаемых тел одинаковы величины K_1 и K_2. Величины K_1 и K_2 называют параметрами подобия потоков, обтекающих тонкие тела вращения под углом атаки. В соответствии с (10.5.20) и (10.5.22) от этих параметров будут зависеть функции, определяющие зависимости для коэффициентов нормальной силы и момента:

$$M_\infty^2 c_N = E(K_1, K_2); \quad M_\infty^2 m_z = F(K_1, K_2), \qquad (10.5.35)$$

где E и F — некоторые функции параметров подобия K_1 и K_2.

Закон подобия здесь выражается в том, что при обтекании двух аффинно-подобных тел вращения разного удлинения потоками с различными числами M_∞ и углами атаки α для этих тел будут одинаковы величины $M_\infty^2 c_N$ (или $M_\infty^2 m_z$), если одинаковы параметры подобия K_1 и K_2.

Результаты аэродинамической теории тонкого тела. Согласно этой теории, коэффициенты нормальной силы и продольного момента определяются для малых поперечных размеров тел вращения при условии, что $r \to 0$. Экспериментальные исследования показали, что полученные теоретические результаты для c_N, m_z и $\bar{c}_{\text{ц.д}} = -m_z/c_N$ с известным приближением пригодны для оценки аэродинамических свойств реальных тел вращения (с достаточно малыми конечными значениями r) при небольших углах атаки.

Рассмотрим соотношение (10.5.20) и заменим в нем величину S'' согласно (10.4.9):

$$c_N = \frac{4\lambda_{\text{мид}}\alpha'}{V_\infty} \int\limits_{x}^{\bar{x}_{\text{к}}} \bar{r} d\bar{x} \int\limits_{0}^{\operatorname{arch} u} \dot{m}(x - \alpha' r \operatorname{ch} z) \operatorname{ch} z dz.$$

Преобразуем это выражение с помощью переменной $\varepsilon = x - \alpha' r \operatorname{ch} z$:

$$c_N = \frac{4\lambda_{\text{мид}}}{V_\infty} \int\limits_{0}^{\bar{x}_{\text{к}}} \bar{r} d\bar{x} \int\limits_{0}^{\bar{x} - \alpha' r} \frac{\dot{m}(\varepsilon)(x - \varepsilon) d\varepsilon}{r\sqrt{(x - \varepsilon)^2 - \alpha'^2 r^2}}.$$

Переходя к пределу при $r \to 0$ и принимая во внимание, что $\bar{x} = x/x_{\text{мид}}$, найдем

$$c_N = \frac{2}{V_\infty r^2_{\text{мид}}} \int\limits_{0}^{x_{\text{к}}} m(x) dx.$$

Подставляя сюда значение $m(x)$ из (10.4.7), получим

$$c_N = \frac{4\alpha}{r^2_{\text{мид}}} \int\limits_{0}^{r_{\text{дон}}} r dr.$$

Здесь величину $r dr / r^2_{\text{мид}}$ можно представить в виде $0{,}5 d\bar{S}$, где $\bar{S}$ — относительная площадь поперечного сечения, расположенного на расстоянии x от носка. Следовательно,

$$c_N = 2\alpha \bar{S}_{\text{дон}}, \tag{10.5.36}$$

где $\bar{S}_{\text{дон}} = S_{\text{дон}}/S_{\text{мид}}$ — донное сужение.

В соответствии с полученным выражением коэффициент нормальной силы для длинного тонкого тела вращения не зависит от размеров или формы головной части. Формула (10.5.36) отражает наблюдаемое в эксперименте снижение c_N, обусловленное донным сужением ($\bar{S}_{\text{дон}} < 1$), или, наоборот, возрастание этого коэффициента, если донная часть расширяется ($\bar{S}_{\text{дон}} > 1$).

Для получения коэффициента момента воспользуемся зависимостью (10.5.22), в которой опустим второй член в правой части (ввиду малости толщины тела вращения). Перейдя к переменной $\varepsilon = x - \alpha' r \operatorname{ch} z$, как это было сделано при нахождении коэффициента c_N, получим

$$m_z=\frac{-2}{V_\infty r^2_{\text{мид}} x_{\text{к}}}\int\limits_0^{x_{\text{к}}} m(x)\,x\,dx.$$

После замены здесь $m(x)$ в соответствии с (10.4.7) получим

$$m_z=\frac{-4\alpha}{r^2_{\text{мид}} x_{\text{к}}}\int\limits_0^{r_{\text{дон}}} x r\,dr.$$

Интегрируя по частям, найдем коэффициент момента:

$$m_z=-2\alpha\left(\overline{S}_{\text{дон}}-W_{\text{т}}/W_{\text{ц}}\right), \qquad (10.5.37)$$

где $W_{\text{т}}=\pi\int\limits_0^{x_{\text{к}}} r^2 dx$ — объем тела вращения; $W_{\text{ц}}=\pi r^2_{\text{мид}} x_{\text{к}}=S_{\text{мид}} x_{\text{к}}$ — объем цилиндра, основание которого равно площади наибольшего поперечного сечения, а высота — длине тела.

Согласно (10.5.36) и (10.5.37), коэффициент центра давления

$$c_{\text{ц.д}}=x_{\text{ц.д}}/x_{\text{к}}=-m_z/c_N=1-W_{\text{т}}/(\overline{S}_{\text{дон}} W_{\text{ц}}). \qquad (10.5.38)$$

Приведенная оценка аэродинамических коэффициентов не учитывает влияние отрыва потока, наблюдаемого у длинных тел при их поперечном обтекании со скоростью $V_\infty\alpha$. При этом, как показывают экспериментальные исследования, начало отрыва почти совпадает с местом сопряжения головной части с цилиндром. Возникновение зоны отрыва с относительной длиной $\lambda_{\text{ц}}+\lambda_{\text{кр}}$ (где $\lambda_{\text{ц}}=x_{\text{ц}}/d_{\text{мид}}$, $\lambda_{\text{кр}}=x_{\text{кр}}/d_{\text{мид}}$; $x_{\text{ц}}$ и $x_{\text{кр}}$ — соответственно длины цилиндра и кормы) обусловливает появление дополнительной нормальной силы и продольного момента, так что суммарные значения соответствующих аэродинамических коэффициентов будут [9]:

$$c_N=2\alpha\overline{S}_{\text{дон}}+\Delta c_N; \qquad (10.5.39)$$

$$m_z=-2\alpha\left(\overline{S}_{\text{дон}}-W_{\text{т}}/W_{\text{ц}}\right)+\Delta m_z, \qquad (10.5.40)$$

где

$$\Delta c_N=\frac{4c\alpha^2}{\pi}(\lambda_{\text{ц}}+\lambda_{\text{кр}}); \qquad \Delta m_z=\frac{-2c\alpha^2}{\pi}(\lambda_{\text{ц}}+\lambda_{\text{кр}}). \qquad (10.5.41)$$

Коэффициент c в выражениях для Δc_N и Δm_z зависит от того, будет пограничный слой ламинарным или турбулентным. Для ламинарного течения величина $c\approx 1{,}2$, для турбулентного $c\approx 0{,}3\div 0{,}4$.

В соответствии с новыми значениями c_N и m_z [см. (10.5.39) и (10.5.40)] коэффициент центра давления

$$c_{\text{ц.д}}=\left[2\alpha\left(\overline{S}_{\text{дон}}-W_{\text{т}}/W_{\text{ц}}\right)-\Delta m_z\right]/(2\alpha\overline{S}_{\text{дон}}+\Delta c_N). \qquad (10.5.42)$$

Этот коэффициент будет больше той величины, которая определяется без учета влияния отрыва.

На рис. 10.5.2 приведены экспериментальные данные, которые сравниваются с результатами расчета по теории тонкого тела [(10.5.36), (10.5.38)], а также по (10.5.39) и (10.5.42).

Нормальная сила, определяемая по теории тонкого тела, действует лишь на расширяющейся части корпуса перед областью отрыва. Величина этой силы пропорциональна α, в то время как нормальная сила в зоне отрыва изменяется в зависимости от α^2. Как видно из рис. 10.5.2, формулы (10.5.39) и (10.5.42) дают удовлетворительные результаты.

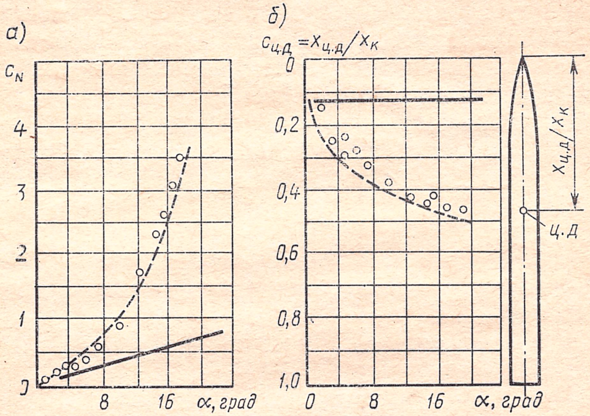


Рис. 10.5.2. Коэффициенты нормальной силы (*а*) и центра давления (*б*) заостренного тела вращения. Полное удлинение тела равно 21, удлинение головки $\lambda_{мид}=4{,}75$:

———————— — аэродинамическая теория тонкого тела; — — — — — — — с учетом отрыва потока; ○○○○○ — эксперимент при $M_\infty=2$

Подсасывающая сила. Рассмотрим зависимость (7.5.25) для коэффициента сопротивления. Эту зависимость в случае малых углов атаки, при которых $c_y \approx c_N$, представим в виде $c_x = c_R + c_y \alpha$. Строго говоря, коэффициент осевой силы c_R в этой формуле зависит от угла атаки и его можно определить как сумму $c_R = c_{R0} + c_{xт}$, в которой c_{R0} — коэффициент осевой силы при осесимметричном обтекании, $c_{xт}$ — коэффициент дополнительной осевой силы, зависящий от α. Таким образом, при неосесимметричном обтекании наряду с основной частью индуктивного сопротивления корпуса $c_y\alpha$ появляется дополнительная продольная сила $c_{xт}$, вызванная углом атаки. В частности, из формул (10.5.16) для конуса видно, что согласно линеаризованной теории коэффициент продольной силы $c_{xт} = -\alpha^2$. Возникновение этой силы связано со специфическими условиями обтекания. При дозвуковых скоростях характерным для такого обтекания является не столько поджатие газа на нижней (наветренной) стороне, сколько разрежение на верхней (подветренной) части корпуса. В случае же сверхзвуковых скоростей возникновение аэродинамической силы обусловлено в основном повышением давления на нижней стороне, в то время как разрежение на верхней стороне имеет меньшее значение. В соответствии со сказанным при дозвуковых скоростях возникает подталкивающая (подсасывающая) сила, а при сверхзвуковых — сила сопротивления.

Следует иметь в виду, что в формулу для c_R (10.5.16) входит член — α^2, определяющий подсасывающую силу корпуса, обтекаемого сверхзвуковым потоком с числом $\mathbf{M}_\infty > 1 (V_\infty > a_\infty)$ Возникновение такой силы связано с тем, что неосесимметричное обтекание корпуса определяется дополнительным поперечным течением со скоростью $V_\infty\ \alpha$, которое рассматривается в линеаризованной теории как дозвуковое.

Согласно экспериментальным данным, как при дозвуковых скоростях, так и в случае сверхзвукового обтекания коэффициент дополнительной продольной силы можно рассчитывать при помощи зависимости

$$c_{x\,\text{т}} = \xi\alpha^2, \tag{10. 5. 43}$$

в которой ξ — некоторый коэффициент, определяемый для заданной формы носовой части корпуса [13].

В частности, для носка конической формы с удлинением $\lambda_{\text{мид}}$

$$\xi \approx 0{,}08\left(\frac{\pm 2}{\lambda_{\text{мид}}}\sqrt{|\mathbf{M}_\infty^2 - 1|} - 1\right), \tag{10. 5.44}$$

где знак плюс выбирается для сверхзвуковой скорости ($\mathbf{M}_\infty > 1$), а минус — для дозвуковой ($\mathbf{M}_\infty < 1$). Формула (10.5.43) пригодна для значений числа Маха в интервале $0{,}8 \leqslant M_\infty \leqslant 2{,}8$. Из этой формулы следует, что подсасывающая сила или сопротивление отсутствуют, если $\xi = 0$, т. е. при условии $\gamma = \sqrt{\mathbf{M}_\infty^2 - 1} / \lambda_{\text{мид}} = 0{,}5$. Лобовое сопротивление ($\xi > 0$) всегда имеет место при $\mathbf{M}_\infty > 1$ и $\gamma > 0{,}5$.

Подсасывающая сила ($\xi < 0$) возникает при дозвуковых скоростях или в случае сверхзвукового обтекания ($\mathbf{M}_\infty > 1$), если $\gamma < 0{,}5$. При этом появление подсасывающей силы в случае $\mathbf{M}_\infty > 1$ обусловлено тем, что перед конической носовой частью возникает отошедшая криволинейная головная волна и обтекание поверхности носит дозвуковой характер.

ГЛАВА XI

АЭРОДИНАМИЧЕСКАЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ

§ 11.1. ПРИРОДА АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ

Интерференция между корпусом и установленным на нем крылом

Тело вращения, обычно используемое в качестве элемента конструкции летательного аппарата, может нести на себе крылья, оперение и рулевые устройства. Самолет, например, представляет собой комбинацию таких конструктивных элементов, как фюзеляж, имеющий вид тела вращения или форму, близкую к нему, а также крылья, хвостовое оперение и рули. Неуправляемая ракета может состоять из корпуса (тела вращения) и хвостового оперения (стабилизаторов). Управляемая в полете ракета по своей схеме близка к самолету, так как имеет несущие поверхности, хвостовое оперение и рулевые устройства.

При рассмотрении аэродинамики аппаратов в виде комбинаций тел вращения, крыльев, оперения и рулевых устройств возникает сложная и пока недостаточно разработанная проблема учета аэродинамической интерференции между отдельными элементами этих комбинаций. В результате такой интерференции сумма аэродинамических сил и моментов взятых отдельно (изолированных) крыла и корпуса, оперения и корпуса, корпуса, крыла и оперения или корпуса, крыла, оперения и рулей не равна полной силе или моменту комбинации, состоящей из соответствующих элементов и представляющей собой единое целое (рис. 11.1.1). Таким образом, отдельно взятые элементы — корпус, крылья, оперение, рули, — будучи соединенными в единую конструкцию летательного аппарата, как бы теряют свои индивидуальные аэродинамические характеристики и приобретают вследствие интерференции новые.

Как показывают результаты расчетов и экспериментальные исследования, при одном и том же угле атаки подъемная сила крыла в присутствии корпуса увеличивается по сравнению с изолированным крылом. Такое же явление наблюдается и в отношении подъемной силы корпуса, соединенного с крылом и изолированного.

Рассмотрим физическую картину взаимного влияния тела вращения и крыла, обусловливающего увеличение их подъемной силы, полагая, что крыло расположено на удаленном от носка цилиндрическом участке корпуса по схеме среднеплана. Предположим также, что корпус и крыло тонкие и обтекание происходит под малым углом атаки (рис. 11.1.2).

Как было показано в § 10.2, возмущенный поток около тонкого тела вращения можно получить в результате наложения на поле скоростей, возникающее при продольном осесимметричном обтекании тела невозмущенным потоком со скоростью $V_{x\infty}=V_\infty \cos\alpha\approx$ $\approx V_\infty$, поля скоростей дополнительного возмущенного потока, получающегося при поперечном обтекании этого тела со скоростью $V_{y\infty}=V_\infty \sin\alpha\approx V_\infty\alpha$.

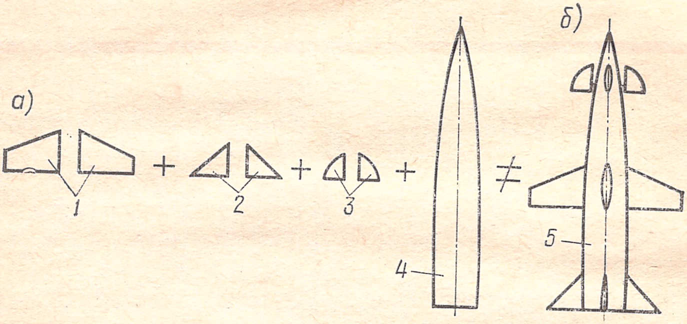


Рис. 11.1.1. Схема, иллюстрирующая понятие об интерференции между телом вращения и установленными на нем крылом, оперением и рулями:

а — изолированные элементы; *б* — элементы, соединенные в единой конструкции (комбинации) летательного аппарата; *1* — крылья; *2* — оперение; *3* — рули; *4* — тело вращения; *5* — летательный аппарат

При малых углах атаки поперечный поток является обычно дозвуковым и для приближенного расчета поля скоростей можно воспользоваться теорией потенциального обтекания круглого цилиндра несжимаемым потоком. Комплексный потенциал такого

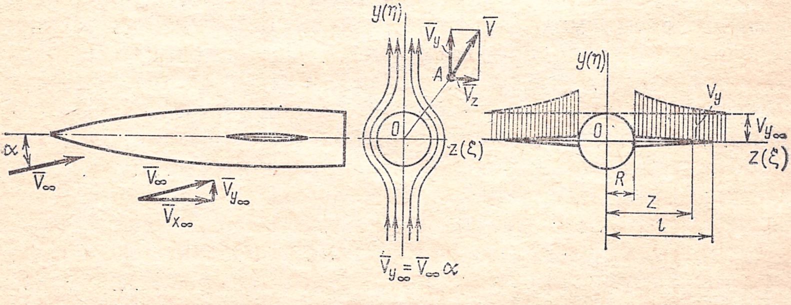


Рис. 11.1.2. Изменение нормальной составляющей скорости по размаху крыла в результате влияния тела вращения

обтекания определяется выражением (6.2.4). Приняв в нем $V=\alpha V_\infty$, заменив ζ на σ и вычислив затем производную $dW/d\sigma$, напишем выражение для комплексной скорости в виде

$$dW/d\sigma=V_z-V_y i=-\alpha V_\infty i\,[1+(R^2/\sigma^2)], \qquad (11.1.1)$$

где $\sigma=z+iy$.

На линии $z—z\,(y=0)$

$$V_z-V_y i=-\alpha V_\infty i\,[1+(R^2/z^2)], \qquad (11.1.2)$$

откуда следует, что $V_z=0$ и

$$V_y=\alpha V_\infty [1+(R^2/z^2)]. \qquad (11.1.3)$$

В соответствии с этой формулой в плоскости $y=0$ скорость V_y поперечного потока изменяется от $V_y=2\alpha V_\infty$ на поверхности цилиндра ($z=R$) до $V_y=V_{y\infty}=\alpha V_\infty$ вдали от него при $z\to\infty$ (рис. 11.1.2). Если на цилиндрическом корпусе установлено крыло, то при заданной величине угла атаки α оно будет омываться составным потоком, который можно получить путем наложения на невозмущенное течение дополнительного потока, индуцируемого корпусом. Вследствие этого влияния корпуса поперечная составляющая скорости на поверхности крыла будет равна

$$\alpha V_\infty+\alpha V_\infty R^2/z^2,$$

т. е. возникает дополнительная поперечная составляющая

$$V'_y=V_y-\alpha V_\infty=\alpha V_\infty R^2/z^2. \qquad (11.1.4)$$

С возникновением этой добавочной составляющей скорости связан скос потока, вызываемый корпусом. Угол этого скоса

$$\varepsilon_{i\,\text{т}}=V'_y/V_\infty=\alpha R^2/z^2. \qquad (11.1.5)$$

Скос потока приводит к увеличению местных углов атаки в сечениях консолей крыла. Эти местные (эффективные) углы атаки:

$$\alpha_\text{э}=\alpha+\varepsilon_{i\,\text{т}}=\alpha\,[1+(R^2/z^2)]. \qquad (11.1.6)$$

Из (11.1.6) видно, что эффективный угол атаки достигает наибольшего значения в бортовом сечении консолей при $z=R$, где $\alpha_\text{э}=2\alpha$, и постепенно уменьшается при удалении от корпуса. В концевом сечении крыла, где $z=l$, эффективный угол атаки

$$\alpha_\text{э.кц}=\alpha\,[1+(R^2/l^2)]. \qquad (11.1.6')$$

В результате увеличения местных углов атаки подъемная сила консолей крыла при наличии корпуса будет больше, чем для изолированного крыла. Крыло в свою очередь влияет на обтекание корпуса, так как возникающие повышенное давление на нижней поверхности крыла и разрежение на верхней поверхности распространяются на корпус. Поэтому происходит перераспределение давления и возникает дополнительная подъемная сила корпуса, обусловленная влиянием крыла.

Интерференция между крылом и оперением

Для летательных аппаратов, представляющих собой комбинацию тела вращения, крыла и оперения, следует учитывать интерференцию не только между корпусом и крылом, но и между корпусом и оперением, которая по своей физической природе аналогична рассмотренной интерференции между корпусом и крылом. Кроме того, необходимо принимать во внимание влияние скоса потока за крылом на оперение (при переднем расположении на корпусе крыла) или же влияние потока за оперением на крыло (при переднем расположении оперения по так называемой схеме «утка»).

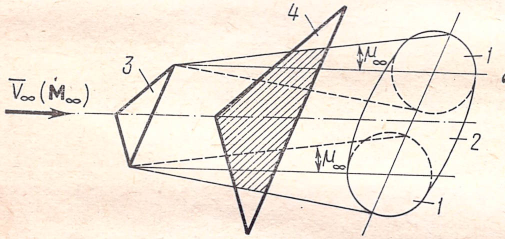


Рис. 11.1.3. Зона влияния крыла на оперение в сверхзвуковом линеаризованном потоке (заштрихованный участок):

1 — конус Маха; *2* — волновая поверхность, построенная для крыла (огибающая конусов Маха); *3* — крыло; *4* — оперение

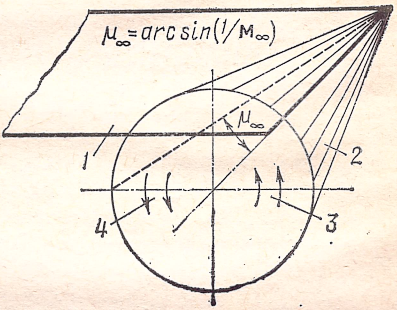


Рис. 11.1.4. Скос потока за прямоугольным крылом:

1 — крыло; *2* — конус возмущений (конус Маха); *3* — скос потока, направленный вверх; *4* — скос потока, направленный вниз

Влияние крыла на хвостовое оперение в сверхзвуковом потоке имеет место в том случае, если оперение располагается внутри конуса Маха (волновой поверхности), построенного для крыла, т. е. если оно попадает в зону скошенного крылом потока (рис. 11.1.3). Этот скос зависит от формы крыла в плане и положения точки, в которой определяются параметры потока, в том числе угол скоса.

В качестве примера рассмотрим крыло прямоугольной формы (рис. 11.1.4). Область возмущенного течения, в которой сказывается влияние боковой кромки на обтекание крыла, ограничена конусом Маха с вершиной в передней точке боковой кромки. Внутри конуса Маха воздух перетекает из области повышенного давления под крылом в область пониженного давления на верхней его стороне. В результате поток закручивается в вихрь, который и вызывает за крылом скос. Этот скос направлен вниз во внутренней области конуса Маха, захватывающей крыло, и в обратную сторону — в волновой зоне, расположенной вне крыла. В соответствии с этим на боковой кромке скос потока равен нулю (рис. 11.1.4).

Если крыло соединено с телом вращения, то скос потока за крылом будет иным, чем у изолированного крыла. В этом случае разность давлений под и над крылом увеличится, перетекание воздуха из области повышенного давления в область пониженного давления станет более интенсивным, а значит, увеличится скос потока как в наружной области, где он направлен вверх, так и во внутренней области, где он направлен вниз.

Если размах оперения меньше, чем размах расположенного перед ним крыла, то оперение будет находиться в области, где скос потока направлен вниз, и эффективный угол атаки оперения уменьшится. Если для данного сечения консоли оперения угол скоса $\varepsilon_{i\text{кр}}$, а установочный угол оперения (угол между хордой оперения и осью корпуса) $\alpha_{\text{оп}}$, то эффективный угол атаки консоли (рис. 11.1.5)

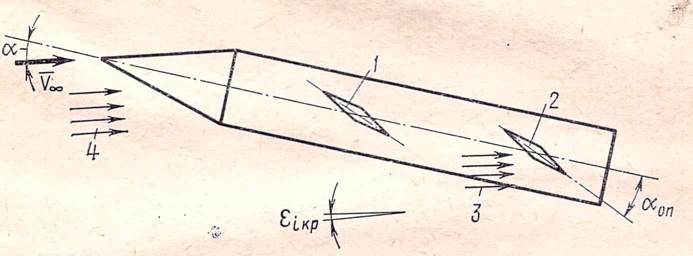


Рис. 11.1.5. Интерференция между крылом и оперением:
1 — крыло; *2* — оперение; *3* — скошенный поток; *4* — набегающий поток

$$\alpha_{\text{э.оп}}=\alpha+\alpha_{\text{оп}}-\varepsilon_{i\,\text{кр}}. \qquad (11.1.7)$$

Уменьшение эффективного угла атаки приводит к снижению подъемной силы и, как следствие, к уменьшению стабилизирующего момента оперения.

В области оперения происходит торможение потока под действием крыла и, как результат, уменьшение скоростного напора по сравнению с невозмущенным течением. Это также необходимо учитывать при определении аэродинамических характеристик обтекания. Если оперение имеет размах, больший, чем крыло, то часть поверхности консоли попадает в область скоса потока, направленного вверх, и этим может быть компенсирован отрицательный эффект от скоса потока вниз, выражающийся в уменьшении подъемной силы.

§ 11.2. ПОДЪЕМНАЯ СИЛА КОМБИНАЦИИ «КОРПУС — ПЛОСКОЕ КРЫЛО»

Понятие о коэффициентах интерференции

Суммарную подъемную силу летательного аппарата, обтекаемого под малым углом атаки при нулевом угле крена и представляющего собой комбинацию тонкого тела вращения и крыла, состоящего из двух консолей в виде пластинок малой толщины (так называемую плоскую комбинацию, рис. 11.2.1), можно определить как сумму подъемных сил для изолированных корпуса и крыла, а также дополнительных сил, называемых интерференционными поправками. Одна из этих поправок обусловлена влиянием корпуса на обтекание крыла, другая — воздействием крыла на поток около корпуса. В соответствии с этим суммарная подъемная сила

$$Y_{\text{т,кр}}=Y_{\text{т}}+Y_{\text{кр}}+\Delta Y_{\text{т(кр)}}+\delta Y_{\text{кр(т)}}, \qquad (11.2.1)$$

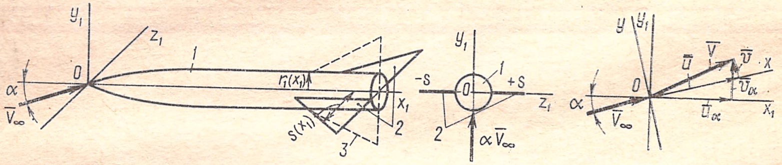


Рис. 11.2.1. Комбинация «корпус — плоское крыло» (плоская комбинация) под малым углом атаки при нулевом угле крена:

1 — корпус (тело вращения); *2* — консоли плоского крыла; *3* — консоли четырехконсольной комбинации

где $Y_{\text{т}}$ — подъемная сила изолированного тела вращения; $Y_{\text{кр}}$ — подъемная сила изолированного крыла; $\Delta Y_{\text{т(кр)}}$ — дополнительная подъемная сила корпуса, обусловленная влиянием крыла; $\delta Y_{\text{кр(т)}}$ — дополнительная подъемная сила крыла, обусловленная влиянием корпуса.

Выражение (11.2.1) можно также представить в виде

$$Y_{\text{т,кр}}=Y_{\text{т}}+\Delta Y_{\text{т(кр)}}+\Delta Y_{\text{кр(т)}}, \qquad (11.2.2)$$

где

$$\Delta Y_{\text{кр(т)}}=Y_{\text{кр}}+\delta Y_{\text{кр(т)}} \qquad (11.2.3)$$

— подъемная сила крыла при наличии корпуса.

Зависимость (11.2.2) для суммарной подъемной силы можно отнести наряду с плоской (двухконсольной) комбинацией также и к летательному аппарату с плюсобразным крылом (четырехконсольной комбинации, рис. 11.2.1). Обтекание этого аппарата без скольжения будет таким, как и при плоской комбинации, так как верхние консоли, имеющие вид очень тонких пластин, не изменяют характера этого обтекания.

Две последние составляющие в (11.2.2) можно записать в более удобной для расчетов форме:

$$\Delta Y_{\text{т(кр)}}=K_{\text{т}}Y_{\text{кр}}; \qquad (11.2.4)$$

$$\Delta Y_{\text{кр(т)}}=K_{\text{кр}}Y_{\text{кр}}, \qquad (11.2.5)$$

где $K_{\text{т}}$, $K_{\text{кр}}$ — коэффициенты интерференции.

В соответствии с (11.2.4), (11.2.5) дополнительная подъемная сила корпуса, вызванная присутствием крыла, и подъемная сила крыла с учетом интерференции с корпусом представляются в виде произведения соответствующих коэффициентов интерференции и подъемной силы крыла.

Под изолированным крылом следует понимать крыло, состоящее из двух консолей, соединенных вместе. В соответствии с (11.2.4) и (11.2.5) подъемная сила плоской комбинации «корпус — крыло».

$$Y_{\text{т,кр}} = Y_{\text{т}} + (K_{\text{т}} + K_{\text{кр}})\, Y_{\text{кр}}. \tag{11.2.6}$$

Если представить подъемную силу корпуса в виде

$$Y_{\text{т}} = K_{\text{т.и}} Y_{\text{кр}}, \tag{11.2.7}$$

где $K_{\text{т.и}}$ — некоторый коэффициент, связывающий подъемные силы изолированных корпуса и крыла, то

$$Y_{\text{т,кр}} = (K_{\text{т.и}} + K_{\text{т}} + K_{\text{кр}})\, Y_{\text{кр}}. \tag{11.2.8}$$

Соответствующий суммарный коэффициент подъемной силы комбинации

$$c_{y\,\text{т,кр}} = Y_{\text{т,кр}}/(q_\infty S_{\text{кр}}) = (K_{\text{т.и}} + K_{\text{т}} + K_{\text{кр}})\, c_{y\,\text{кр}}, \tag{11.2.9}$$

где $q_\infty = \varrho_\infty V_\infty^2/2$ — скоростной напор набегающего потока; $S_{\text{кр}}$ — площадь изолированных консолей крыла.

При линеаризованном обтекании имеет место линейная зависимость подъемной силы от угла атаки, т. е. $c_y = \alpha c_y^\alpha$ (где $c_y^\alpha = \partial c_y/\partial\alpha$). Следовательно,

$$c^\alpha_{y\,\text{т,кр}} = (K_{\text{т.и}} + K_{\text{т}} + K_{\text{кр}})\, c^\alpha_{y\,\text{кр}}. \tag{11.2.10}$$

Коэффициенты $K_{\text{т.и}}$, $K_{\text{т}}$, $K_{\text{кр}}$, входящие в (11.2.9) и (11.2.10), можно рассматривать в виде отношений соответствующих коэффициентов подъемной силы:

$$K_{\text{т.и}} = c_{y\,\text{т}}/c_{y\,\text{кр}},\ K_{\text{т}} = \Delta c_{y\,\text{т(кр)}}/c_{y\,\text{кр}},\ K_{\text{кр}} = \Delta c_{y\,\text{кр(т)}}/c_{y\,\text{кр}} \tag{11.2.11}$$

или отношений производных от соответствующих коэффициентов подъемной силы по углу атаки:

$$K_{\text{т.и}} = c^\alpha_{y\,\text{т}}/c^\alpha_{y\,\text{кр}};\quad K_{\text{т}} = \Delta c^\alpha_{y\,\text{т(кр)}}/c^\alpha_{y\,\text{кр}};\quad K_{\text{кр}} = \Delta c^\alpha_{y\,\text{кр(т)}}/c^\alpha_{y\,\text{кр}}. \tag{11.2.12}$$

Определение потенциала скоростей

В дальнейшем будем рассматривать аэродинамическую интерференцию применительно к летательным аппаратам, представляющим собой различные комбинации из тонких тел (корпус, крыло, оперение), вносящие малые возмущения в обтекающий поток. В современной аэродинамике задачи такого рода наиболее полно решены и их приложение к указанным летательным аппаратам дает достаточно удовлетворительные для практики результаты.

Потенциал φ' скоростей возмущения при обтекании линеаризованным потоком тонких тел удовлетворяет уравнению типа (7.1.4′) для пространственного потока. Введем безразмерные координаты:

$$\bar{x} = x/L,\ \bar{y} = y/l,\ \bar{z} = z/l, \tag{11.2.13}$$

где L и l — характерные длины в направлении осей x и y (например, L — длина всей комбинации, l — размах консоли крыла). Уравнение (7.1.4′), преобразованное к переменным (11.2.13), будет иметь вид

$$(\mathrm{M}_\infty^2 - 1)\, \frac{l^2}{L^2} \cdot \frac{\partial^2\varphi'}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2\varphi'}{\partial \bar{y}^2} - \frac{\partial^2\varphi'}{\partial \bar{z}^2} = 0. \tag{11.2.14}$$

Рассмотрим комбинацию тонкого корпуса и консолей крыла с малым размахом. Для таких комбинаций, вытянутых в направлении оси x, отношение $l^2/L^2 \ll 1$, поэтому первым членом в уравнении (11.2.14) можно пренебречь. В результате дифференциальное уравнение для определения потенциала скоростей возмущения при интерференции между корпусом и плоским крылом будет

$$\partial^2\varphi'/\partial\bar{y}^2 + \partial^2\varphi'/\partial\bar{z}^2 = 0,$$

или после подстановки значений $\bar{y}$ и $\bar{z}$ из (11.2.13)

$$\partial^2\varphi'/\partial y^2 + \partial^2\varphi'/\partial z^2 = 0. \qquad (11.2.15)$$

Это уравнение, как известно, соответствует возмущенному течению несжимаемой жидкости в плоскости yOz. Таким образом, для нахождения поля скоростей потока, вызванного интерференцией, необходимо решить дифференциальное уравнение (11.2.15) относительно функции φ', представляющей собой потенциал скоростей возмущения при поперечном обтекании комбинации плоским несжимаемым потоком со скоростью αV_∞ (рис. 11.2.1). Определить поле скоростей несжимаемого потока около корпуса и соединенного с ним крыла в плоскости yOz можно при помощи метода, основанного на теории конформного преобразования (в дальнейшем будем рассматривать связанные координаты x_1, y_1, z_1, опустив для удобства записи индекс «1»).

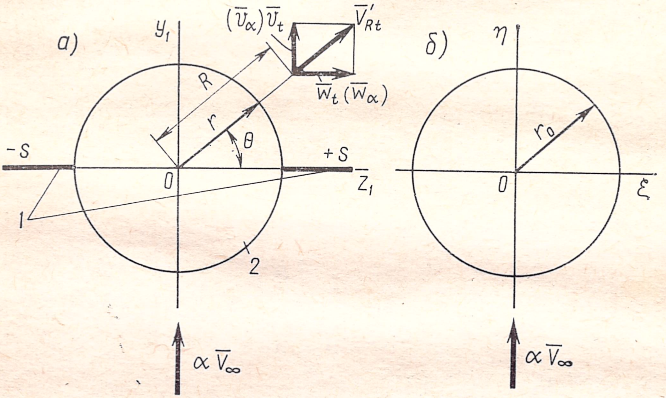


Рис. 11.2.2. Схема конформного преобразования для комбинации «корпус — плоское крыло»:

а — физическая плоскость σ (*1* — крыло; *2* — корпус); *б* — преобразованная плоскость ζ

Плоскость, в которой определяется течение, является физической плоскостью комплексного переменного $\sigma = z + iy$, а плоскость, для которой течение известно как течение около преобразованного круга, будет преобразованной плоскостью комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$ (рис. 11.2.2).

Запишем уравнение, связывающее между собой переменные σ и ζ:

$$\sigma + r^2/\sigma = \zeta + r_0^2/\zeta, \qquad (11.2.16)$$

где

$$r_0 = 0{,}5\,[s + (r^2/s)]; \qquad (11.2.16')$$

s — текущее значение полуразмаха крыла (размах консоли).

Уравнение (11.2.16) является тем соотношением, при помощи которого осуществляется конформное преобразование круга радиуса r_0 на плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ в контур, получающийся в результате пересечения плоскостью yOz корпуса и соединенного с ним тонкого крыла. Очевидно, этот контур на плоскости $\sigma = z + iy$ имеет вид круга радиуса r и пары отрезков прямых линий длиной $s - r_0$ каждый, располагающихся на оси z (рис. 11.2.2). Чтобы убедиться в правильности выбора формулы (11.2.16), обеспечивающей указанное конформное отображение, следует при помощи этой формулы осуществить преобразования, аналогичные тем, которые были проведены в § 6.2 для случая конформного отображения круга в пластинку [см. (6.2.1)].

Решая относительно ζ квадратное уравнение (11.2.16), получим

$$\zeta = 0{,}5\left\{(\sigma + r^2/\sigma) + \left[(\sigma + r^2/\sigma)^2 - 4r_0^2\right]^{1/2}\right\}. \qquad (11.2.17)$$

Знак плюс перед квадратной скобкой указывает на зависимость между комплексными переменными ζ и σ для верхней полуплоскости. При осуществлении преобразования для нижней полуплоскости следует взять знак минус.

Комплексный потенциал при обтекании круглого цилиндра радиуса r_0 в плоскости ζ (рис. 11.2.2, *б*) можно определить по формуле (6.2.4), заменив в ней R на r_0:

$$W = -i\alpha V_\infty\left[\zeta - \left(r_0^2/\zeta\right)\right]. \qquad (11.2.18)$$

Этот комплексный потенциал может быть преобразован в потенциал поперечного потока около плоской комбинации «корпус — крыло» в плоскости $\sigma=z+iy$ путем замены в (11.2.18) комплексной переменной $\zeta=\xi+i\eta$ значением из уравнения преобразования (11.2.17):

$$W = -i\alpha V_\infty\left[(\sigma + r^2/\sigma)^2 - 4r_0^2\right]^{1/2}. \qquad (11.2.19)$$

Чтобы найти полную величину комплексного потенциала W_α, надо добавить к (11.2.19) потенциальную функцию потока, параллельного оси y, равную $i\alpha V_\infty\sigma$. В результате

$$W_\alpha = -i\alpha V_\infty\left\{\left[(\sigma + r^2/\sigma)^2 - 4r_0^2\right]\right\}^{1/2} - \sigma\},$$

или, принимая во внимание значение r_0 из (11.2.16′),

$$W_\alpha = -i\alpha V_\infty\{[(\sigma + r^2/\sigma)^2 - (s + r^2/s)^2]^{1/2} - \sigma\}. \qquad (11.2.20)$$

Комплексный потенциал W_α можно выразить через потенциал скоростей φ_α и функцию тока ψ_α в виде $W_\alpha = \varphi_\alpha + i\psi_\alpha$. Учитывая это и имея в виду, что $\sigma=z+iy$, напишем (11.2.20) в форме

$$\varphi_\alpha + i\psi_\alpha = -i\alpha V_\infty\left\{\left[\left(z + iy + \frac{r^2}{z+iy}\right)^2 - (s + r^2/s)^2\right]^{1/2} - (z+iy)\right\} \qquad (11.2.20')$$

Скорость и давление на корпусе при наличии крыла

Вычислим частные производные по x от левой и правой частей (11.2.20′):

$$\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x} + i\,\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x} = -i\alpha V_\infty\,\frac{2\left(z+iy+\dfrac{r^2}{z+iy}\right)\dfrac{dr}{dx}\cdot\dfrac{r}{z+iy} - }{\left[\left(z+iy+\dfrac{r^2}{z+iy}\right)^2 - \right.}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\frac{-\left(s+\dfrac{r^2}{s}\right)\left(\dfrac{ds}{dx} + \dfrac{2r\,\dfrac{dr}{dx}\,s - r^2\,\dfrac{ds}{dx}}{s^2}\right)}{\left.-\left(s+\dfrac{r^2}{s}\right)^2\right]^{1/2}}. \qquad (11.2.21)$$

Рассматривая поверхность корпуса, для которой $\sigma = z + iy = re^{i\theta}$, и принимая во внимание, что $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$, $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$, получим

$$\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x} + i\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x} =$$

$$= -i\alpha V_\infty \frac{4\cos\theta(\cos\theta - i\sin\theta)\, r\dfrac{dr}{dx} - \left(s + \dfrac{r^2}{s}\right)\left[2\dfrac{r}{s}\cdot\dfrac{dr}{dx} + \dfrac{ds}{dx}\left(1 - \dfrac{r^2}{s^2}\right)\right]}{\left[4r^2\cos^2\theta - \left(s + \dfrac{r^2}{s}\right)^2\right]^{1/2}}.$$

Выделяя из правой части вещественную часть, получим выражение для добавочной осевой составляющей возмущенной скорости:

$$\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x} = u_\alpha =$$

$$= \alpha V_\infty \frac{4r\dfrac{dr}{dx}\cos^2\theta - \left(s + \dfrac{r^2}{s}\right)\left[2\dfrac{r}{s}\cdot\dfrac{dr}{dx} + \dfrac{ds}{dx}\left(1 - \dfrac{r^2}{s^2}\right)\right]}{\left[\left(s + \dfrac{r^2}{s}\right)^2 - 4r^2\cos^2\theta\right]^{1/2}}. \quad (11.2.22)$$

Чтобы получить вертикальную v_α и боковую w_α составляющие возмущенной скорости (рис. 11.2.2, *а*), вычислим производную по σ от комплексного потенциала (11.2.20):

$$\frac{dW_\alpha}{d\sigma} = w_\alpha - v_\alpha i =$$

$$= -i\alpha V_\infty \left\{\frac{(\sigma + r^2/\sigma)(1 - r^2/\sigma^2)}{[(\sigma + r^2/\sigma)^2 - (s + r^2/s)^2]^{1/2}} - 1\right\}. \quad (11.2.23)$$

Для поверхности корпуса при условии, что $\sigma = re^{i\vartheta}$,

$$w_\alpha - v_\alpha i =$$

$$= -i\alpha V_\infty \left\{\frac{2r\cos\theta(1 + i\sin 2\theta - \cos 2\theta)}{[4r^2\cos^2\theta - (s + r^2/s)^2]^{1/2}} - 1\right\}.$$

Разделяя правую часть на вещественную и мнимые величины, найдем:

$$w_\alpha = \frac{4\alpha r V_\infty \cos\theta\sin^2\theta}{[(s + r^2/s)^2 - 4r^2\cos^2\theta]^{1/2}}; \quad (11.2.24)$$

$$v_\alpha = -\alpha V_\infty \left\{\frac{2r\cos\theta\sin 2\theta}{[(s + r^2/s)^2 - 4r^2\cos^2\theta]^{1/2}} + 1\right\}. \quad (11.2.25)$$

Из физических соображений следует, что формулы (11.2.22), (11.2.24) и (11.2.25) дают значения составляющих скорости на нижней поверхности корпуса, т. е.

$$u_{\alpha\text{н}} = u_\alpha, \quad w_{\alpha\text{н}} = w_\alpha, \quad v_{\alpha\text{н}} = v_\alpha. \quad (11.2.26)$$

Из свойства симметрии вытекают следующие соотношения для составляющих скорости на верхней поверхности корпуса:

$$u_{\alpha\text{в}} = -u_{\alpha\text{н}}, \quad w_{\alpha\text{в}} = -w_{\alpha\text{н}}, \quad v_{\alpha\text{в}} = v_{\alpha\text{н}}. \quad (11.2.27)$$

Рассмотрим, как по найденным значениям скоростей возмущения можно определить коэффициент давления. В § 6.1. была получена формула (6.1.5) для этого коэффициента в случае плоского маловозмущенного течения. Как показывают исследования, эта формула требует уточнения, если рассматривается пространственное линеаризованное течение. Для такого течения квадрат полной скорости в некоторой точке пространства

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = (V_\infty + u)^2 + v^2 + w^2 = V_\infty^2 + 2uV_\infty + u^2 + v^2 + w^2.$$

В соответствии с этим формулу (7.1.4″) для отношения давления p/p_∞ перепишем таким образом:

$$\frac{p}{p_\infty} = \left\{1 - \frac{k-1}{k} \cdot \frac{\varrho_\infty}{p_\infty}\left[uV_\infty + \frac{1}{2}\ (u^2 + v^2 + w^2)\right]\right\}^{k/(k-1)}.$$

Вследствие малости добавочных составляющих скорости по сравнению с V_∞ отношение p/p_∞ мало отличается от единицы и, следовательно, написанное выражение для p/p_∞ можно разложить по биному. Сохраняя квадратичный член, получим

$$\frac{p}{p_\infty} = 1 - \frac{\varrho_\infty}{p_\infty}\left[uV_\infty + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\right] +$$

$$+ \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 \frac{k}{k-1}\left(\frac{k}{k-1} - 1\right)\frac{\varrho_\infty^2}{2p_\infty^2}\left[uV_\infty + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\right]^2.$$

Соответствующая зависимость для коэффициента давления имеет вид

$$\bar{p} = \frac{2(p - p_\infty)}{\varrho_\infty V_\infty^2} = -\frac{2u}{V_\infty} - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{V_\infty^2} +$$

$$+ \frac{\varrho_\infty V_\infty^2}{kp_\infty}\left[\frac{u}{V_\infty} + \frac{1}{2V_\infty^2}(u^2 + v^2 + w^2)\right]^2.$$

Сохраняя члены второго порядка малости по сравнению с u/V_∞ и имея в виду, что $kp_\infty/\varrho_\infty = a_\infty^2$ и $V_\infty^2/a_\infty^2 = \mathrm{M}_\infty^2$, найдем

$$\bar{p} = -2u/V_\infty + \left[u^2\left(\mathrm{M}_\infty^2 - 1\right) - v^2 - w^2\right]/V_\infty^2.$$

Пренебрегая членом $u^2\left(\mathrm{M}_\infty^2 - 1\right)$, получим окончательно

$$\bar{p} = -2u/V_\infty - (v^2 + w^2)/V_\infty^2. \qquad (11.2.28)$$

Здесь, хотя течение и слабовозмущенное, сохранены квадратичные члены, что имеет значение при обтекании тонких тел вращения.

Составляющие скорости u, v, w в поточных координатах, входящие в формулу (11.2.28), выразим через составляющие u_α, v_α, w_α в связанной системе координат. Так как тело не имеет крена и связанные оси координат повернуты относительно поперечной оси Oz поточной системы на угол атаки α, то, очевидно, составляющая $w = w_\alpha$. Из рис. 11.2.1 видно, что для других составляющих имеют место соотношения: $u = u_\alpha + \alpha v_\alpha$, $v = v_\alpha - \alpha u_\alpha$. Внося полученные выражения для u, v, w (11.2.28) и отбрасывая члены $\alpha v_\alpha u_\alpha/V_\infty^2$, $\alpha^2 u_\alpha/V_\infty^2$, являющиеся членами более высокого порядка малости, получим

$$\bar{p} = -(2/V_\infty)(u_\alpha + \alpha v_\alpha) - \left(v_\alpha^2 + w_\alpha^2\right)/V_\infty^2. \qquad (11.2.28')$$

На нижней поверхности корпуса

$$\bar{p}_{\text{т(кр)н}} = -2\left[(u_{\alpha\text{н}} + \alpha v_{\alpha\text{н}})/V_\infty + w_{\alpha\text{н}}^2/\left(2V_\infty^2\right) + v_{\alpha\text{н}}^2/\left(2V_\infty^2\right)\right]. \qquad (11.2.29)$$

С учетом свойства симметрии (11.2.27) коэффициент давления на верхней поверхности

$$p_{\text{т(кр)в}} = -2\left[(-u_{\alpha\text{н}} + \alpha v_{\alpha\text{н}})/V_\infty + w^2_{\alpha\text{н}}\big/\left(2V^2_\infty\right) + v^2_{\alpha\text{н}}\big/\left(2V^2_\infty\right)\right]. \quad (11.\,2.\,30)$$

Практически при определении аэродинамических коэффициентов приходится иметь дело с коэффициентами перепада давления, которые вычисляют по соответствующим коэффициентам давления на нижней и верхней поверхностях в виде $\Delta\bar{p} = \bar{p}_\text{н} - \bar{p}_\text{в}$. Для корпуса такой коэффициент

$$\Delta\bar{p}_{\text{т(кр)}} = \bar{p}_{\text{т(кр)н}} - \bar{p}_{\text{т(кр)в}} = -4u_{\alpha\text{н}}/V_\infty. \quad (11.\,2.\,31)$$

Как видно, коэффициент перепада давлений зависит только от продольной составляющей скорости. С учетом (11.2.22)

$$\Delta\bar{p}_{\text{т(кр)}} = \frac{-4\alpha\left\{4r\dfrac{dr}{dx}\cos^2\theta - (s + r^2/s)\left[2\dfrac{r}{s}\cdot\dfrac{dr}{dx} + \dfrac{ds}{dx}(1 - r^2/s^2)\right]\right\}}{[(s + r^2/s)^2 - 4r^2\cos^2\theta]^{1/2}}. \quad (11.\,2.\,32)$$

Так как для точек корпуса координата $z = r\cos\theta$ (рис. 11.2.2), то

$$\bar{\Delta}p_{\text{т(кр)}} = \frac{4\alpha\left[(1 - r^4/s^4)\dfrac{ds}{dx} + 2\dfrac{r}{s}\cdot\dfrac{dr}{dx}(1 + r^2/s^2 - 2z^2/r^2)\right]}{[(1 + r^2/s^2)^2 - 4z^2/s^2]^{1/2}}. \quad (11.\,2.\,33)$$

Скорость и давление на крыле при наличии корпуса

Полагая в формуле (11.2.21) $y = 0$ и учитывая, что правая часть этой формулы является вещественной величиной, найдем следующее выражение для осевой составляющей скорости:

$$\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x} = u_\alpha = \alpha V_\infty\frac{2\dfrac{r}{z}\cdot\dfrac{dr}{dx}(z + r^2/z) - (s + r^2/s)\left[\dfrac{ds}{dx}(1 - r^2/s^2) + 2\dfrac{r}{s}\cdot\dfrac{dr}{dx}\right]}{[(s + r^2/s)^2 - (z + r^2/z)^2]^{1/2}}. \quad (11.\,2.\,34)$$

Принимая в (11.2.23) $\sigma = z$ и разделив правую часть на вещественную и мнимую величины, получим зависимости для боковой w_α и вертикальной v_α составляющих скорости:

$$w_\alpha = \frac{\alpha V_\infty(z + r^2/z)(1 - r^2/z^2)}{[(s + r^2/s)^2 - (z + r^2/z)^2]^{1/2}}; \quad (11.\,2.\,35)$$

$$v_\alpha = -\alpha V_\infty. \quad (11.\,2.\,36)$$

Формулы (11.2.34)—(11.2.36) дают значения составляющих скоростей на нижней поверхности консолей, причем форма записи этих значений такая же, как (11.2.26). Из соображений симметрии следует, что на верхней поверхности крыла составляющие скорости будут определяться выражениями, аналогичными (11.2.27).

Скорость, а следовательно, и давление на корпусе не изменяются при осевом обтекании (угол атаки равен нулю) в присутствии несущих консолей «нулевой» толщины. Однако консоли будут при таком обтекании испытывать влияние поля скоростей и давлений, образующегося около корпуса. Результирующее течение у консолей будет слагаться из поля скоростей, индуцируемого корпусом при осевом обтекании, и поля скоростей, возникающего при поперечном обтекании и обусловленного наличием угла атаки.

Рассмотрим поле скоростей около корпуса, обтекаемого под нулевым углом атаки, используя для этой цели выводы аэродинамической теории тонкого тела (см. § 10.3). Согласно этой теории, добавочная радиальная составляющая скорости при осевом обтекании (обозначим ее $V'_{Rt} = V'_{r1}$, см. рис. 11.2.2) в соответствии с формулой (10.3.10), в которой r заменяем на текущую радиальную координату точки R,

$$V'_{Rt} = -f(x)/R. \tag{11. 2. 37}$$

Из условия безотрывного обтекания (10.2.19), которое ввиду малости φ'_x по сравнению с V_∞ можно написать в виде

$$\varphi'_r = V'_{Rt} = V_\infty\,(dr/dx), \tag{11. 2. 38}$$

получим выражение для функции

$$f(x) = -V_\infty r\,(dr/dx). \tag{11. 2. 39}$$

Следовательно, (11.2.37) можно написать в форме:

$$V'_{Rt} = \frac{V_\infty r}{R} \cdot \frac{dr}{dx}. \tag{11. 2. 40}$$

Из рис. 11.2.2 видно, что поперечная w_t и вертикальная v_t составляющие скорости возмущенного течения, вызванного осевым обтеканием корпуса:

$$w_t = V'_{Rt}\cos\theta = \frac{V_\infty r}{R} \cdot \frac{dr}{dx}\cos\theta; \tag{11. 2. 41}$$

$$v_t = V'_{Rt}\sin\theta = \overset{V_\infty r}{} \cdot \frac{dr}{dx}\sin\theta. \tag{11. 2. 42}$$

Для условий на поверхности консоли $\theta=0$, $R=z$ и, следовательно,

$$w_t = \frac{V_\infty r}{z} \cdot \frac{dr}{dx}; \tag{11. 2. 43}$$

$$v_t = 0. \tag{11. 2. 44}$$

Если выражение (11.2.43) для w_t определяет значение скорости для нижней поверхности $(w_{t\,\text{н}} = w_t)$, то из свойства симметрии следует, что на верхней поверхности

$$w_{t\,\text{в}} = w_{t\,\text{н}}. \tag{11. 2. 45}$$

Для осевой добавочной составляющей скорости u_t, которую не будем здесь приводить в явном виде, действительно равенство $u_{t\,\text{в}} = u_{t\,\text{н}}$, вытекающее из того же свойства симметрии.

Значения составляющих возмущенной скорости на консоли получаются в результате сложения соответствующих составляющих скорости при осевом и поперечном обтекании, т. е.

$$u = u_\alpha + u_t,\ w = w_\alpha + w_t,\ v = v_\alpha + v_t = v_\alpha. \tag{11. 2. 46}$$

Внося эти значения в формулу для коэффициента давления, переписанную по аналогии с (11.2.28) в виде

$$\bar{p} = -2\,[(u + \alpha v)/V_\infty + v^2/(2V_\infty^2) + w^2/(2V_\infty^2)], \tag{11. 2. 47}$$

получим

$$\bar{p}_{\text{кр(т)}} = -2\,[(u_\alpha + u_t + \alpha v)/V_\infty + v_\alpha^2/(2V_\infty^2) + (w_\alpha + w_t)^2/(2V_\infty^2)]. \tag{11. 2. 48}$$

Для нижней поверхности консоли

$$\bar{p}_{\text{кр(т)н}} = -2\,[(u_{\alpha\text{н}} + u_{t\,\text{н}} + \alpha v_{\alpha\text{н}})/V_\infty + v_{\alpha\text{н}}^2/(2V_\infty^2) +$$
$$+ (w_{\alpha\text{н}}^2 + w_{t\,\text{н}}^2)/(2V_\infty^2) + w_{\alpha\text{н}} w_{t\,\text{н}}/V_\infty^2].$$

На верхней поверхности с учетом свойства симметрии [см. (11.2.27) и (11.2.45); $u_{t\text{в}} = u_{t\text{н}}$]

$$\bar{p}_{\text{кр(т)в}} = -2\,[(-u_{\alpha\text{н}} + u_{t\,\text{н}} + \alpha v_{\alpha\text{н}})/V_\infty + v_{\alpha\text{н}}^2/(2V_\infty^2) +$$
$$+ (w_{\alpha\text{н}}^2 + w_{t\,\text{н}}^2)/(2V_\infty^2) - w_{\alpha\text{н}} w_{t\,\text{н}}/V_\infty^2].$$

Коэффициент перепада давления

$$\Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}} = \bar{p}_{\text{кр(т)н}} - \bar{p}_{\text{кр(т)в}} = -4u_{\alpha\text{н}}/V_\infty - 4w_{\alpha\text{н}} w_{t\,\text{н}}/V_\infty^2. \qquad (11.2.49)$$

Формула (11.2.49) для коэффициента перепада давления на консоли имеет в отличие от соответствующей формулы (11.2.31) для корпуса квадратичную форму. Внося в (11.2.49) вместо $u_{\alpha\,\text{н}}$, $w_{\alpha\,\text{н}}$, $w_{t\text{н}}$ соответственно их значения из (11.2.34), (11.2.35), (11.2.43), найдем коэффициент перепада давления на консолях крыла в присутствии корпуса:

$$\Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}} = 4\alpha\left[\left(s + \frac{r^2}{s}\right)^2 - \left(z + \frac{r^2}{z}\right)^2\right]^{-1/2} \times$$
$$\times\left\{s\,\frac{ds}{dx}\left(1 - \frac{r^4}{s^4}\right) + r\,\frac{dr}{dx}\left[2\left(\frac{r^2}{s^2} - 1\right) + \left(1 - \frac{r^2}{z^2}\right)^2\right]\right\}. \qquad (11.2.50)$$

Если корпус является круговым цилиндром, то $dr/dx = 0$ и зависимости (11.2.33), (11.2.50) принимают соответственно вид:

$$\Delta\bar{p}_{\text{т(кр)}} = 4\alpha\,\frac{ds}{dx}\left(1 - \frac{r^4}{s^4}\right)\left[\left(1 + \frac{r^2}{s^2}\right)^2 - 4\,\frac{z^2}{s^2}\right]^{-1/2}; \qquad (11.2.51)$$

$$\Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}} = 4\alpha\,\frac{ds}{dx}\left(1 - \frac{r^4}{s^4}\right)\left[\left(1 + \frac{r^4}{s^4}\right) - \frac{z^2}{s^2}\left(1 + \frac{r^4}{z^4}\right)\right]^{-1/2} \qquad (11.2.52)$$
$$(r \leqslant z \leqslant s).$$

Выражения (11.2.51) и (11.2.52) пригодны для приближенного расчета распределения давления по обтекаемой поверхности и в том случае, когда корпус в месте сопряжения с крылом расширяется и $dr/dx \neq 0$. Это подтверждается расчетами, которые показывают, что влияние расширения корпуса на характер распределения давления невелико. Достаточно удовлетворительные результаты по (11.2.51) и (11.2.52) получаются при условии, в соответствии с которым крыло на корпусе располагается в зоне невозмущенного потока. Как показывают исследования, это условие практически может быть выполнено, если расстояние от начала цилиндрической части тонкого заостренного корпуса до бортовой хорды крыла превышает два-три диаметра корпуса.

Определение коэффициентов интерференции

Рассмотрим зависимости для подъемной силы крыла и корпуса с учетом их взаимного влияния и определим соответствующие коэффициенты интерференции. Условно примем, что консоли крыла, расположенные на цилиндрическом корпусе ($dr/dx = 0$), имеют треугольную форму, для которой $ds/dx = \operatorname{tg}\varepsilon$ (рис. 11.2.3). При этом следует иметь в виду, что полученные результаты для коэффициентов интерференции можно отнести к любой другой форме. Иными словами, найденные теоретические значения этих коэффициентов, приводимые ниже, не будут зависеть от вида консолей в плане.

Известно, что тонкий изолированный цилиндрический корпус при отклонении не создает подъемной силы. Поэтому величину $\Delta Y_{\text{т(кр)}}$ (11.2.4) можно рассматривать как подъемную силу $Y_{\text{т(кр)}}$

на корпусе при наличии крыла. Эта сила может быть вычислена при помощи формулы (10.5.5) для нормальной силы, так как при малых углах атаки и линеаризованном обтекании эти силы с достаточным приближением можно принять одинаковыми. Полагая в (10.5.4) $\cos\beta \approx 1$ и $\cos\gamma = \sin\theta$, получим следующее выражение для

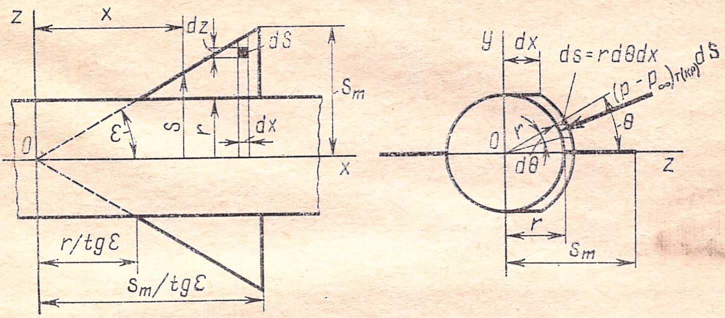


Рис. 11.2.3. Комбинация «цилиндрический корпус — крыло» в виде треугольных консолей

элементарной подъемной силы, действующей на площадку $dS = rd\theta dx$ (рис. 11.2.3):

$$d(\Delta Y_{т(кр)}) = dY_{т(кр)} = -(p-p_\infty)_{т(кр)} r \sin\theta d\theta dx.$$

Подъемная сила участка корпуса, расположенного под крылом,

$$\Delta Y_{т(кр)} = -\int\limits_{r/\operatorname{tg}\varepsilon}^{s_m/\operatorname{tg}\varepsilon} \int\limits_0^{2\pi} (p-p_\infty)_{т(кр)} r \sin\theta d\theta dx$$

Соответствующий коэффициент подъемной силы, отнесенный к площади поперечного сечения корпуса $S = \pi r^2$,

$$\Delta c'_{y\,т(кр)} = \frac{\Delta Y_{т(кр)}}{q_\infty \pi r^2} = -\frac{1}{\pi r} \int\limits_{r/\operatorname{tg}\varepsilon}^{s_m/\operatorname{tg}\varepsilon} dx \int\limits_0^{2\pi} \bar{p}_{т(кр)} \sin\theta d\theta.$$

Учитывая симметричный характер распределения давления по обе стороны нулевой меридиональной плоскости, а также условия, при которых в точках поверхности, определяемых угловыми координатами θ (верхняя поверхность) и $-\theta$ (нижняя поверхность), коэффициенты давления соответственно $\bar{p}$ и $-\bar{p}$, получим зависимость

$$\Delta c'_{y\,т(кр)} = -\frac{2}{\pi r} \int\limits_{r/\operatorname{tg}\varepsilon}^{s_m/\operatorname{tg}\varepsilon} dx \int\limits_0^{\pi/2} \Delta\bar{p}_{т(кр)} \sin\theta d\theta.$$

Внося сюда вместо $\Delta\bar{p}_{т(кр)}$ выражение (11.2.51) и принимая во внимание равенство $z = r\cos\theta$, найдем (по абсолютной величине)

$$\Delta c'_{y\,т(кр)} = \frac{8\alpha \operatorname{tg}\varepsilon}{\pi r^2} \int\limits_{r/\operatorname{tg}\varepsilon}^{s_m/\operatorname{tg}\varepsilon} dx \int\limits_0^{r} \left(1 - \frac{r^4}{s^4}\right)\left[\left(1 + \frac{r^2}{s^2}\right)^2 - 4\frac{z^2}{s^2}\right]^{-1/2} dz.$$

В результате однократного интегрирования получаем

$$\Delta c'_{y\,\text{т(кр)}}=\frac{8\alpha\,\text{tg}\,\varepsilon}{2\pi r^2}\int\limits_{r/\text{tg}\,\varepsilon}^{s_m/\text{tg}\,\varepsilon} s\left(1-\frac{r^4}{s^4}\right)\arcsin\frac{2r/s}{1+(r^2/s^2)}\,dx,$$

или, так как $x=s/\text{tg}\,\varepsilon$ и $dx=ds/\text{tg}\,\varepsilon$,

$$\Delta c'_{y\,\text{т(кр)}}=\frac{4\alpha}{\pi}\int\limits_{1}^{s_m/r}\left(1-\frac{r^4}{s^4}\right)\arcsin\frac{2r/s}{1+(r^2/s^2)}\cdot\frac{s}{r}\,d\left(\frac{s}{r}\right).$$

Это выражение можно написать в виде

$$\Delta c'_{y\,\text{т(кр)}}=\frac{4\alpha}{\pi}\int\limits_{1}^{\bar{s}_m}\frac{\bar{s}^4-1}{\bar{s}^3}\arcsin\frac{2\bar{s}}{\bar{s}^2+1}\,d\bar{s}, \qquad (11.2.53)$$

где $\bar{s}=s/r$, $\bar{s}_m=s_m/r$.

Вводя переменные $\bar{u}=\arcsin\frac{2\bar{s}}{\bar{s}^2+1}$ и $\bar{v}=\frac{1}{2}\left(\bar{s}^2+\frac{1}{\bar{s}^2}\right)$ и интегрируя по частям, получим

$$\Delta c'_{y\text{т(кр)}}=\frac{4\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\bar{s}^2+\frac{1}{\bar{s}^2}\right)\arcsin\frac{2\bar{s}}{\bar{s}^2+1}\bigg|_1^{\bar{s}_m}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{1}^{\bar{s}_m}\left(\bar{s}^2+\frac{1}{\bar{s}^2}\right)(\bar{s}^2+1)^{-1}d\bar{s}\right]=$$

$$=\frac{4\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\bar{s}_m^2+\frac{1}{\bar{s}_m^2}\right)\arcsin\frac{2\bar{s}_m}{\bar{s}_m^2+1}+\frac{\bar{s}_m^2-1}{\bar{s}_m}-2\,\text{arctg}\,\bar{s}_m\right]. \qquad (11.2.53')$$

Соответствующий коэффициент подъемной силы корпуса $\Delta c_{y\text{т(кр)}}$, рассчитанный по площади изолированных консолей

$$S_{\text{кр}}=(s_m-r)^2/\text{tg}\,\varepsilon, \qquad (11.2.54)$$

равен

$$\Delta c_{y\,\text{т(кр)}}=\Delta c'_{y\text{т(кр)}}\frac{\pi r^2}{S_{\text{кр}}}=\frac{\pi\,\text{tg}\,\varepsilon r^2}{(s_m-r)^2}\Delta c'_{y\,\text{т(кр)}}. \qquad (11.2.55)$$

С учетом выражения (8.8.47) для коэффициента $c_{y\text{кр}}$ подъемной силы изолированного крыла, в котором следует принять $\text{ctg}\,\varkappa=\text{tg}\,\varepsilon$, коэффициент интерференции

$$K_{\text{т}}=\Delta c_{y\,\text{т(кр)}}/c_{y\,\text{кр}}=\Delta c'_{y\,\text{т(кр)}}/[2(\bar{s}_m-1)^2\alpha]. \qquad (11.2.56)$$

После подстановки (11.2.53′) получим

$$K_{\text{т}}=\frac{2}{\pi(\bar{s}_m-1)^2}\left[\frac{1}{2}\left(\bar{s}_m^2+\frac{1}{\bar{s}_m^2}\right)\arcsin\frac{2\bar{s}_m}{\bar{s}_m^2+1}+\frac{\bar{s}_m^2-1}{\bar{s}_m}-2\,\text{arctg}\,\bar{s}_m\right].$$

Так как $2\,\text{arctg}\,\bar{s}_m=\pi-\arcsin\frac{2\bar{s}_m}{\bar{s}_m^2+1}$, то

$$K_{\text{т}}=\frac{2}{\pi\,(\bar{s}_m-1)^2}\left[\frac{\bar{s}_m^{\,2}-1}{\bar{s}_m}+\frac{\pi}{2}\left(\bar{s}_m^2+\frac{1}{\bar{s}_m^2}\right)-\frac{(\bar{s}_m^2+1)^2}{\bar{s}_m^2}\operatorname{arctg}\bar{s}_m\right] \tag{11.2.57}$$

Найдем зависимость для коэффициента интерференции $K_{\text{кр}}$ крыла с корпусом. Элементарная величина подъемной силы, действующей на элементарную площадку крыла $dS_{\text{кр}}=dxdz$,

$$d\,(\Delta Y_{\text{кр(т)}})=\Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}}dx\,dz\,q_\infty.$$

Сила $\Delta Y_{\text{кр(т)}}$ двух консолей с учетом выражения (11.2.52)

$$\Delta Y_{\text{кр(т)}}=8\alpha\operatorname{tg}\varepsilon q_\infty\int\limits_{r/\operatorname{tg}\varepsilon}^{s_m/\operatorname{tg}\varepsilon}\left(1-\frac{r^4}{s^4}\right)dx\int\limits_r^s\left[\left(1+\frac{r^4}{s^4}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{z^2}{s^2}\left(1+\frac{r^4}{x^4}\right)\right]^{-1/2}dz. \tag{11.2.52'}$$

Соответствующий коэффициент подъемной силы

$$\Delta c_{y\,\text{кр(т)}}=\frac{\Delta Y_{\text{кр(т)}}}{q_\infty S_{\text{кр}}}=\frac{8\alpha\operatorname{tg}^2\varepsilon}{(s_m-r)^2}\int\limits_{r/\operatorname{tg}\varepsilon}^{s_m/\operatorname{tg}\varepsilon}\left(1-\frac{r^4}{s^4}\right)dx\times$$

$$\times\int\limits_r^s\left[\left(1+\frac{r^4}{s^4}\right)-\frac{z^2}{s^2}\left(1+\frac{r^4}{z^4}\right)\right]^{-1/2}dz.$$

Интегрируя один раз, находим

$$\Delta c_{y\,\text{кр(т)}}=\frac{4\alpha\operatorname{tg}^2\varepsilon}{(s_m-r)^2}\int\limits_{r/\operatorname{tg}\varepsilon}^{s_m/\operatorname{tg}\varepsilon}s\left(1-\frac{r^4}{s^4}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1-r^2/s^2}{1+r^2/s^2}\right)dx;$$

или

$$\Delta c_{y\,\text{кр (т)}}=\frac{4\alpha\operatorname{tg}\varepsilon}{(\bar{s}_m-1)^2}\int\limits_1^{\bar{s}_m}\frac{\bar{s}^4-1}{\bar{s}^3}\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{\bar{s}^2-1}{\bar{s}^2+1}\right)d\bar{s}.$$

Частичное интегрирование дает

$$\Delta c_{y\,\text{кр (т)}}=\frac{4\alpha\operatorname{tg}\varepsilon}{(\bar{s}_m-1)^2}\left[\frac{\pi}{4}\frac{(\bar{s}_m^2-1)^2}{\bar{s}_m^2}+\int\limits_1^{\bar{s}_m}\frac{\bar{s}^4-1}{\bar{s}^3}\arcsin\frac{\bar{s}^2-1}{\bar{s}^2+1}\,d\bar{s}\right].$$

Вводя переменные

$$\bar{u}=\arcsin\left[(\bar{s}^2-1)/(\bar{s}^2+1)\right],\quad \bar{v}=0{,}5\left[\bar{s}^2+(1/\bar{s}^2)\right]$$

и производя интегрирование по частям, найдем

$$\Delta c_{y\,\text{кр (т)}}=\frac{4\alpha\,\mathrm{tg}\,\varepsilon}{(\bar{s}_m-1)^2}\left[\frac{\pi}{4}\,\frac{(\bar{s}_m^2-1)^2}{\bar{s}_m^2}-\frac{\bar{s}_m^2-1}{\bar{s}_m}+2\left(\mathrm{arctg}\,\bar{s}_m-\frac{\pi}{4}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\bar{s}_m^2+\frac{1}{\bar{s}_m^2}\right)\arcsin\frac{\bar{s}_m^2-1}{\bar{s}_m^2+1}\right].$$

Учитывая, что

$$2\left(\mathrm{arctg}\,\bar{s}_m-\frac{\pi}{4}\right)=\arcsin\frac{\bar{s}_m^2-1}{\bar{s}_m^2+1}, \qquad (11.2.58)$$

получим

$$\Delta c_{y\,\text{кр(т)}}=\frac{4\alpha\,\mathrm{tg}\,\varepsilon}{(\bar{s}_m-1)^2}\left[\frac{\pi}{4}\cdot\frac{(\bar{s}_m^2-1)^2}{\bar{s}_m^2}-\frac{\bar{s}_m^2-1}{\bar{s}_m}+\frac{(\bar{s}_m^2+1)^2}{2\bar{s}_m^2}\cdot\arcsin\frac{\bar{s}_m^2-1}{\bar{s}_m^2+1}\right]. \qquad (11.2.59)$$

Коэффициент интерференции с учетом (8.8.47) для $c_{y\,\text{кр}}$

$$K_{\text{кр}}=\frac{\Delta c_{y\,\text{кр (т)}}}{c_{y\,\text{кр}}}=\frac{2}{\pi\,(\bar{s}_m-1)^2}\left[\frac{\pi}{4}\cdot\frac{(\bar{s}_m^2-1)^2}{\bar{s}_m^2}-\frac{\bar{s}_m^2-1}{\bar{s}_m}+\right.$$

$$\left.+\frac{(\bar{s}_m^2+1)^2}{2\bar{s}_m^2}\arcsin\frac{\bar{s}_m^2-1}{\bar{s}_m^2+1}\right]. \qquad (11.2.60)$$

Сравним эту величину с коэффициентом интерференции $K_{\text{т}}$ (11.2.57), преобразованным с учетом значения

$$\mathrm{arctg}\,\bar{s}_m=\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{\bar{s}_m^2-1}{\bar{s}_m^2+1}+\frac{\pi}{2}\right),$$

полученного из (11.2.58), к выражению

$$K_{\text{т}}=\frac{2}{\pi\,(\bar{s}_m-1)^2}\left[\frac{\pi}{4}\,\frac{(\bar{s}_m^2-1)^2}{\bar{s}_m^2}+\frac{\bar{s}_m^2-1}{\bar{s}_m}-\frac{(\bar{s}_m^2+1)^2}{2\bar{s}_m^2}\arcsin\frac{\bar{s}_m^2-1}{\bar{s}_m^2+1}\right]. \qquad (11.2.57')$$

Сложив (11.2.60) и (11.2.57′), получим

$$K_{\text{кр}}+K_{\text{т}}=(\bar{s}_m+1)^2/\bar{s}_m^2 \quad \text{или} \quad K_{\text{кр}}+K_{\text{т}}=(1+r_m)^2, \qquad (11.2.61)$$

где $r_m=r/s_m$.

Из выражений (11.2.60) и (11.2.57′) следует, что коэффициенты интерференции являются функциями только отношения r/s_m. Таким образом, этот параметр (или обратная величина s_m/r) представляет собой основной критерий при оценке взаимного влияния корпуса и крыла на подъемную силу. Величины $K_{\text{кр}}$ и $K_{\text{т}}$ в зависимости от значения $1/\bar{s}_m=r/s_m$ приведены на рис. 11.2.4 и в табл. 11.2.1.

Таблица 11.2.1

r/s_m	$K_{\text{кр}}$	$K_{\text{т}}$	$(c_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{кр(т)}}$	$(c_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{т(кр)}}$	$(\bar{z}_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{кр(т)}}$
0	1,000	1	0,667	0,500	0,424
0,1	1,077	0,133	0,657	0,521	0,421
0,2	1,162	0,278	0,650	0,542	0,419
0,3	1,253	0,437	0,647	0,563	0,418
0,4	1,349	0,611	0,646	0,581	0,417
0,5	1,450	0,800	0,647	0,598	0,417
0,6	1,555	1,005	0,650	0,613	0,416
0,7	1,663	1,227	0,654	0,628	0,418
0,8	1,774	1,467	0,658	0,641	0,420
0,9	1,887	1,725	0,662	0,654	0,422
1,0	2,000	2,000	0,667	0,667	0,424

Если отношение $r/s_m=0$ (корпус отсутствует), то очевидно, $K_{\text{кр}}=1$, а $K_{\text{т}}=0$. Предположим, что радиус корпуса возрастает и несущие консоли становятся малыми, т.е. параметр r/s_m, отличный от нуля, возрастает. Из (11.1.6′) следует, что эффективный угол атаки консолей возрастает. При $(R/l)\to\to 1[(r/s_m)\to 1]$ корпус индуцирует вдоль своей боковой поверхности местный угол атаки $\alpha_{\text{э.кц}}\to 2\alpha$. Поэтому консоли при наличии корпуса развивают подъемную силу, в два раза большую, чем изолированное крыло, и, следовательно, $K_{\text{кр}}=2$.

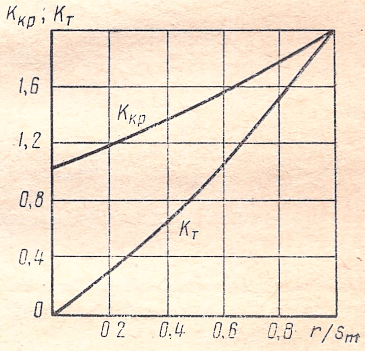


Рис. 11.2.4. Коэффициенты интерференции для плоской комбинации «корпус — крыло» при отсутствии крена

Чем меньше размеры консоли, тем все большая часть подъемной силы крыла переносится на корпус. Когда значение параметра $r/s_m\to 1$, на корпусе индуцируется наибольшая величина подъемной силы и $K_{\text{т}}=2$.

Центр давления

Координата центра давления подъемной силы, индуцированной корпусом на крыле,

$$(x_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{кр(т)}}=-\Delta M_{z\text{кр(т)}}/\Delta Y_{\text{кр(т)}}, \qquad (11.2.62)$$

где $\Delta M_{z\text{кр(т)}}$ — момент тангажа относительно носка бортового сечения консоли от сил, обусловленных влиянием корпуса на крыло:

$$\Delta M_{z\text{кр(т)}}=-\int\limits_{0}^{(s_m-r)/\text{tg}\,\varepsilon}\int\limits_{r}^{s}\Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}}q_\infty x\,dx\,dz. \qquad (11.2.63)$$

Координаты x и $(x_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{кр(т)}}$ отсчитываются от носка бортового сечения консоли (рис. 11.2.5). С учетом значения $\Delta Y_{\text{кр(т)}}$ координата

$$(x_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{кр(т)}} = \int\limits_0^{(s_m-r)/\text{tg}\,\varepsilon} \int\limits_r^s \Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}} q_\infty x\,dx\,dz \Bigg/ \int\limits_0^{(s_m-r)/\text{tg}\,\varepsilon} \int\limits_r^s \Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}} q_\infty\,dx\,dz. \tag{11.2.62$'$}$$

Координата центра давления подъемной силы, индуцируемой крылом на корпусе,

$$(x_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{т(кр)}} = -\Delta M_{z\text{т(кр)}} / \Delta Y_{\text{т(кр)}}, \tag{11.2.64}$$

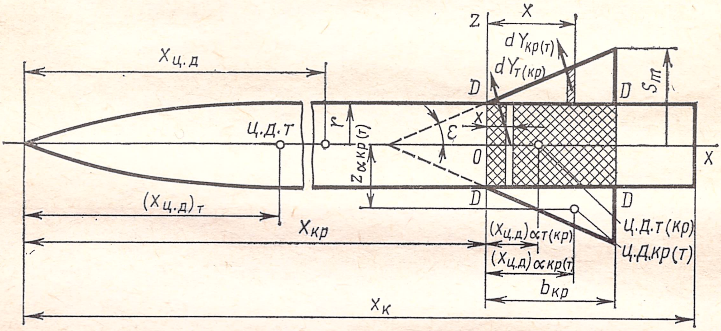


Рис. 11.2.5. К определению положения центра давления корпуса и крыла с учетом влияния интерференции (площадь, на которую переносится подъемная сила от консолей, заштрихована)

где $\Delta M_{z\text{т(кр)}}$ — момент тангажа относительно носка бортового сечения консоли, обусловленный влиянием крыла (рис. 11.2.5):

$$\Delta M_{z\text{т(кр)}} = -\int\limits_0^{(s_m-r)/\text{tg}\,\varepsilon} \int\limits_0^r \Delta\bar{p}_{\text{т(кр)}} q_\infty x\,dx\,dz; \tag{11.2.65}$$

$\Delta Y_{\text{т(кр)}}$ — подъемная сила участка корпуса, расположенного под консолями, обусловленная влиянием крыла.

С учетом значения $\Delta Y_{\text{т(кр)}}$ координата

$$(x_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{т(кр)}} = \int\limits_0^{(s_m-r)/\text{tg}\,\varepsilon} \int\limits_0^r \Delta\bar{p}_{\text{т(кр)}} q_\infty x\,dx\,dz \Bigg/ \int\limits_0^{(s_m-r)/\text{tg}\,\varepsilon} \int\limits_0^r \Delta\bar{p}_{\text{т(кр)}} q_\infty\,dx\,dz. \tag{11.2.64$'$}$$

Из (11.2.62′) и (11.2.64′) можно определить соответствующие коэффициенты центров давления:

$$(c_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{кр(т)}} = (x_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{кр(т)}} / b_{\text{кр}}; \; (c_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{т(кр)}} = (x_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{т(кр)}} / b_{\text{кр}}, \tag{11.2.66}$$

где $b_{\text{кр}}$ — длина бортовой хорды консоли (рис. 11.2.5).

В соответствии с этими значениями можно определить коэффициент момента тангажа комбинации «тело вращения — крыло» относительно носовой части:

$$m_{z\text{т,кр}}=\frac{M_{z\text{т,кр}}}{q_\infty S_\text{кр}x_\text{к}}=-c_{y\text{т,кр}}c_\text{ц.д}=-[c_{y\text{т}}+c_{y\text{кр}}(K_\text{т}+K_\text{кр})]c_\text{ц.д}=$$

$$=-\left[(c_\text{ц.д})_\text{т}c_{y\text{т}}+(c'_\text{ц.д})_{\alpha\text{т(кр)}}\Delta c_{y\text{т(кр)}}+(c'_\text{ц.д})_{\alpha\text{кр(т)}}\Delta c_{y\text{кр(т)}}\right], \qquad (11.2.67)$$

где

$$\left.\begin{aligned}(c'_\text{ц.д})_{\alpha\text{т(кр)}}&=\frac{x_\text{кр}}{x_\text{к}}+(c_\text{ц.д})_{\alpha\text{т(кр)}}\frac{b_\text{кр}}{x_\text{к}};\\(c'_\text{ц.д})_{\alpha\text{кр(т)}}&=\frac{x_\text{кр}}{x_\text{к}}+(c_\text{ц.д})_{\alpha\text{кр(т)}}\frac{b_\text{кр}}{x_\text{к}}.\end{aligned}\right\} \qquad (11.2.68)$$

Здесь $c_\text{ц.д}=x_\text{ц.д}/x_\text{к}$ — коэффициент центра давления всей комбинации, $(c_\text{ц.д})_\text{т}=(x_\text{ц.д})_\text{т}/x_\text{к}$ и $c_{y\text{т}}$ — соответственно коэффициенты центра давления и подъемной силы изолированного корпуса. Все геометрические размеры показаны на рис. 11.2.5

Боковая координата центра давления подъемной силы $\Delta Y_{\text{кр(т)}}$ для консолей крыла, обусловленной влиянием корпуса (рис. 11.2.5),

$$(z_\text{ц.д})_{\alpha\text{кр(т)}}=-\Delta M_{x\text{кр(т)}}/\Delta Y_{\text{кр(т)}}, \qquad (11.2.69)$$

где $\Delta M_{x\text{кр(т)}}$ — момент крена, вызванный действием подъемной силы $\Delta Y_{\text{кр(т)}}$ и определяемый относительно продольной оси x:

$$\Delta M_{x\text{кр(т)}}=-\int\limits_0^{(s_m-r)/\operatorname{tg}\varepsilon}\int\limits_r^s \Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}}q_\infty z\,dx\,dz. \qquad (11.2.70)$$

С учетом значения $\Delta Y_{\text{кр(т)}}$ координата центра давления

$$(z_\text{ц.д})_{\alpha\text{кр(т)}}=\int\limits_0^{(s_m-r)/\operatorname{tg}\varepsilon}\int\limits_r^s \Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}}q_\infty z\,dx\,dz\Bigg/\int\limits_0^{(s_m-r)/\operatorname{tg}\varepsilon}\int\limits_r^s \Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}}q_\infty\,dx\,dz. \qquad (11.2.71)$$

Из (11.2.71) можно найти координату центра давления, отсчитанную вдоль размаха консоли от бортовой хорды на корпусе и отнесенную к ширине консоли s_m-r, т. е. величину

$$(\bar{z}_\text{ц.д})_{\alpha\text{кр(т)}}=[(z_\text{ц.д})_{\alpha\text{кр(т)}}-r]/(s_m-r).$$

Эта величина, а также значения коэффициентов центра давления (11.2.66), вычисленные для треугольных консолей [в (11.2.51) и (11.2.52) соответственно для $\Delta\bar{p}_{\text{т(кр)}}$ и $\Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}}$ производная ds/dx принимается равной $\operatorname{tg}\varepsilon$], приведены в табл. 11.2.1 в зависимости от параметра $r/s_m=1/\bar{s}_m$, из которой следует, что коэффициент центра давления $(c_\text{ц.д})_{\alpha\text{кр(т)}}$ мало отличается от величины $^2/_3$, соответствующей изолированному треугольному крылу. Отношение $(\bar{z}_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{кр(т)}}$ близко к значению $4/(3\pi)$, имеющему место при эллиптическом распределении подъемной силы по размаху изолированного крыла. Оба эти результата показывают, что интерференция крыла с корпусом не оказывает существенного влияния на положение центра давления несущих консолей как по размаху, так и по хорде. Поэтому в практических случаях, когда аэродинамические расчеты основаны на применении аэродинамической теории тонкого тела, влиянием интерференции на положение центра давления крыльев можно пренебречь. При этом следует иметь в виду принципиальную особенность, заключающуюся в том, что согласно аэродинамической теории тонкого тела значение $(\bar{z}_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{кр(т)}}$ не зависит от формы крыла в плане, в то время как положение центра давления консолей в продольном направлени зависит от этой формы. В частности, расчеты по аэродинамической теории тонкого тела показывают, что центр давления прямоугольных крыльев размещается на их передней кромке.

Влияние интерференции на положение центра давления корпуса, как видно из табл. 11.2.1, существенно. При условии $r/s_m=0$, означающем, что корпус отсутствует (точнее говоря, корпус вырождается в бесконечно тонкий цилиндр, совпадающий с корневой хордой консоли), получаем очевидный результат $(c_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{т(кр)}}={}^1/_2$. При очень малых размерах консолей по сравнению с радиусом корпуса, т. е. при значениях $r/s_m\to 1$, на корпус переносится практически вся подъемная сила крыла (коэффициент интерференции $K_{\text{т}}\to 2$) и в соответствии с этим коэффициент центра давления близок к значению для изолированного крыла, т. е. $(c_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{т(кр)}}\to {}^2/_3$.

Изменение коэффициентов интерференции под воздействием некоторых факторов [13]

Экспериментальными исследованиями установлено, что теоретические формулы (11.2.60) и (11.2.57′) дают возможность получить хорошие результаты для коэффициентов интерференции $K_{\text{кр}}$, $K_{\text{т}}$ в случае крыла с консолями прямоугольной формы в плане, для которых сужение $\eta_{\text{кр}}=b_{\text{кр}}/b_{\text{кц}}=1$ ($b_{\text{кр}}$, $b_{\text{кц}}$ — соответственно корневая и концевая хорды крыла). При этом из физических соображений должно быть ясно, что переход к консолям с увеличенным сужением ($\eta_{\text{кр}}>1$) обусловливает повышение коэффициентов интерференции. Действительно, у таких консолей бо́льшая часть площади примыкает к корпусу, поэтому они испытывают повышенное интерференционное воздействие и в свою очередь значительнее влияют на обтекание корпуса. Указанное увеличение коэффициентов интерференции можно учесть введением поправочных множителей

$$\nu_{\text{т}\eta}=K_{\text{т}}/(K_{\text{т}})_{\text{теор}};\ \nu_{\text{кр}\eta}=K_{\text{кр}}/(K_{\text{кр}})_{\text{теор}}, \qquad (11.2.72)$$

где индекс «теор» обозначает теоретические параметры (11.2.57′), (11.2.60). Как показывают эксперименты, эти множители практически одинаковы и могут быть приняты равными:

$$\nu_{\text{т}\eta}=\nu_{\text{кр}\eta}=\nu_\eta=1+\frac{r_m(1-r_m)}{(1+r_m)^2}\left(1-\frac{1}{\eta_{\text{кр}}}\right). \qquad (11.2.73)$$

В случае прямоугольных консолей, для которых $\eta_{\text{кр}}=1$, значение $\nu_\eta=1$ и коэффициенты интерференций совпадают с их соответствующими теоретическими величинами.

Из опытных данных следует, что на коэффициенты интерференции оказывает влияние пограничный слой корпуса. Такое влияние находит свое выражение в изменении эффективного радиуса корпуса в месте расположения консолей на величину толщины вытеснения пограничного слоя δ^* (см. гл. XII). В соответствии с этим значением радиуса $r'=r+\delta^*$ определяется по параметру $r_m'=r'/s_m$ уточненный коэффициент интерференции (рис. 11.2.6). По его величине могут быть вычислены поправочные множители:

$$\nu'_{\text{т.п.с}}=K_{\text{т}}/(K_{\text{т}})_{\text{теор}};\ \nu'_{\text{кр.п.с}}=K_{\text{кр}}/(K_{\text{кр}})_{\text{теор}}. \qquad (11.2.74)$$

Так как коэффициенты интерференции в числителе находятся по увеличенному параметру $r_m'>r_m$, то, следовательно, поправочные множители будут больше единицы. Соответствующий физический эффект проявляется в возникновении дополнительной подъемной силы, вызванной усилением интерференции с корпусом вследствие возрастания его толщины. Вместе с тем пограничный слой оказывает и отрицательное воздействие, вызывая снижение подъемной силы за счет уменьшения площади консолей, находящихся во внешнем потоке ($S_{\text{кр}}'$, рис. 11.2.6).

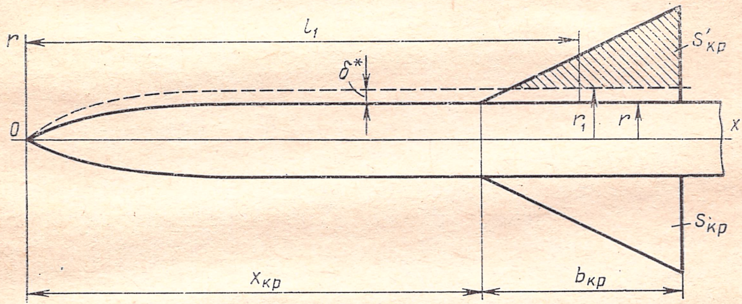


Рис. 11.2.6. Схема влияния пограничного слоя на интерференцию

Полагая значения (11.2.74) одинаковыми, т. е. $\nu'_{\text{т.п.с}}=\nu'_{\text{кр.п.с.}}=\nu'_{\text{п.с}}$, соответствующее суммарное изменение подъемной силы можно учесть при помощи коэффициента

$$\nu_{\text{п.с}}=\nu'_{\text{п.с}}S'_{\text{кр}}/S_{\text{кр}}. \qquad (11.2.75)$$

Исследования показывают, что

$$\nu_{\text{п·с}}\approx 1-r_m\left(1+r_m^2\right)\left[r_m+\eta_{\text{кр}}(1+3r_m)-1\right]\frac{\overline{\delta^*}}{\eta_{\text{кр}}+1}, \qquad (11.2.76)$$

где $\overline{\delta^*}=\delta^*/r$.

Как видно, значение (11.2.76) всегда меньше единицы, что указывает на более значительный эффект снижения подъемной силы от уменьшения площади крыла, чем ее увеличения за счет возрастания толщины корпуса.

Относительная толщина вытеснения $\overline{\delta^*}=\delta^*/r$ в (11.2.76) может определяться при помощи зависимостей (12.4.65) и (12.4.58) для пограничного слоя, начинающегося от носовой части корпуса. При этом в качестве расчетной принимается толщина δ^* в точке с координатой $l_1=x_{\text{кр}}+0{,}5b_{\text{кр}}$, т. е. в средней части бортовой хорды крыла. В соответствии с этим в (12.4.58) необходимо принять $x=l_1$, а $\text{Re}_x=V_\infty l_1/\nu_\infty$.

Для коэффициентов интерференции (11.2.57′) и (11.2.60) теоретические зависимости получены в предположении, что крыло, расположенное на тонком цилиндрическом корпусе, достаточно удалено от головной части и поэтому ее влияние (вместе с цилиндрическим участком) практически не сказывается на обтекании крыла. Иными словами, крыло будет находиться на участке обтекающего потока, скорость которого соответствует невозмущенному течению. При малом удалении крыла влияние части корпуса, расположенной перед ним, может оказаться существенным. Исследования показывают, что коэффициенты интерференции при этом снижаются в соответствии с зависимостью

$$\nu_l = K_т/(K_т)_{теор} = K_{кр}/(K_{кр})_{теор} = [0{,}6 + (1 + 0{,}2\overline{l}_1)^2]/[1 + (1 + 0{,}2\overline{l}_1)^2], \tag{11.2.77}$$

где $\overline{l}_1 = l_1/r$ (рис. 11.2.6).

Для крыла, расположенного на большом удалении от носовой части комбинации $[\overline{l}_1 > (15 \div 20)]$, коэффициент $\nu_l \approx 1$, т. е. практически коэффициенты интерференции не изменяются. Однако для летательного аппарата, выполненного по схеме «утка», такое изменение может оказаться существенным, так как расстояния l_1 до несущей поверхности (управляющего оперения) будут относительно небольшими.

В соответствии с полученными результатами коэффициенты интерференции целесообразно вычислять при помощи следующих зависимостей:

$$K_{кр} = (K_{кр})_{теор}\nu_\eta\nu_{п.с}\nu_l; \quad K_т = (K_т)_{теор}\nu_\eta\nu_{п.с}\nu_l. \tag{11.2.78}$$

Подъемная сила комбинации «корпус — крыло»

Для определения полной подъемной силы $Y_{т,\,кр}$ используем формулу (11.2.6). Подъемную силу $Y_т$ изолированного тонкого корпуса, входящую в эту формулу, определим следующим образом. Рассмотрим тонкий корпус в виде конуса с весьма малым углом при вершине $\beta_к$. Для тонкого конуса при малых углах атаки, как следует из (10.5.29), коэффициент подъемной силы можно принять равным $c_y = 2\alpha$. Распространяя эту формулу на тонкое тело вращения произвольной формы, получим

$$Y_т = 2\alpha\pi r^2 q_\infty, \tag{11.2.79}$$

где r — радиус миделева сечения корпуса.

Согласно этой формуле, подъемная сила тонкого тела вращения определяется при заданном угле атаки лишь диаметром наибольшего поперечного сечения.

Подъемная сила изолированного крыла

$$Y_{кр} = c_{yкр}S_{кр}q_\infty,$$

где в соответствии с формулой (8.8.47), в которой принято $\mathrm{ctg}\,\varkappa = \mathrm{tg}\,\varepsilon$; $c_{yкр} = 2\alpha\pi\,\mathrm{tg}\,\varepsilon$. Так как $S_{кр}$ находится из (11.2.54), то

$$Y_{кр} = 2\alpha\pi\,(s_m - r)^2 q_\infty. \tag{11.2.80}$$

Принимая во внимание, что сумма теоретических коэффициентов интерференции $K_т + K_{кр}$ определяется формулой (11.2.61), и учитывая полученные значения $Y_т$ и $Y_{кр}$, найдем для полной подъемной силы

$$Y_{т,кр} = 2\alpha\pi s_m^2\left(1 - r_m^2 + r_m^4\right) q_\infty. \tag{11.2.81}$$

Соответствующий коэффициент подъемной силы $c_{yт,\,кр} = Y_{т,\,кр}/(q_\infty S_{кр})$ будет равен согласно значению (11.2.54) для $S_{кр}$

следующей величине:

$$c_{y\,\text{т,кр}} = \frac{c_{y\,\text{кр}}}{(1-r_m)^2}\left(1-r_m^2+r_m^4\right). \qquad (11.2.82)$$

Полная подъемная сила не зависит от формы консолей и той части корпуса, которая расположена перед сечением с максимальным полуразмахом s_m. Из формулы (11.2.81) также вытекает, что если даже за этим сечением имеется некоторая площадь крыла, то она не будет влиять на несущие свойства комбинации «корпус—крыло».

Коэффициент подъемной силы (11.2.82) можно уточнить, вычислив коэффициенты интерференции с учетом влияния сужения крыла, пограничного слоя и места расположения консолей. Согласно (11.2.78), сумма коэффициентов

$$K_\text{т}+K_\text{кр} = (K_\text{т}+K_\text{кр})_\text{теор}\nu_\eta\nu_\text{п.с}\nu_l,$$

или с учетом (11.2.61)

$$K_\text{т}+K_\text{кр} = (1+r_m)^2\nu_\eta\nu_\text{п.с}\nu_l. \qquad (11.2.83)$$

Согласно (11.2.83), подъемная сила

$$Y_\text{т,кр} = Y_\text{т}+(K_\text{т}+K_\text{кр})Y_\text{кр} = 2\alpha\pi s_m^2\left[r_m^2+\left(1-r_m^2\right)^2\nu_\eta\nu_\text{п.с}\nu_l\right]q_\infty, \qquad (11.2.84)$$

а коэффициент этой силы

$$c_{y\,\text{т,кр}} = \frac{Y_\text{т,кр}}{q_\infty S_\text{кр}} = \frac{c_{y\,\text{кр}}}{(1-r_m)^2}\left[r_m^2+\left(1-r_m^2\right)^2\nu_\eta\nu_\text{п.с}\nu_l\right]. \qquad (11.2.85)$$

При значениях сомножителей в правой части, меньших единицы, т. е. при учете влияния на коэффициенты интерференции сужения, пограничного слоя и места расположения крыла, суммарная подъемная сила снижается.

§ 11.3. ВЛИЯНИЕ УГЛА КРЕНА НА ИНТЕРФЕРЕНЦИЮ МЕЖДУ КОРПУСОМ И ПЛОСКИМ КРЫЛОМ

Общее соотношение для коэффициента давления

Комбинация «корпус — плоское крыло», повернутая на угол крена φ, показана на рис. 11.3.1. Наряду с углом φ обтекание этой комбинации и, следовательно, интерференция между корпусом и консолями крыла зависят также от угла $\alpha_\text{с}$, образуемого продольной осью и направлением скорости набегающего потока. Этот угол (рис. 11.3.1) определяется в плоскости $x'Oy'$, образуемой связанными осями Ox' и Oy', построенными для ненакрененной комбинации. Рассматриваемое течение эквивалентно потоку, возникающему при наличии угла атаки α и угла скольжения β. Угол атаки α отсчитывается в вертикальной плоскости y_1Ox_1 в связанных осях координат Oy_1 и Ox_1, построенных для накрененного тела, и определяется как угол между проекцией V_∞'' вектора $\overline{V}_\infty$ на эту плоскость и осью Ox_1.

В соответствии с рис. 11.3.1 малый угол α равен отношению вертикальной $V_{y1\infty}$ и горизонтальной $V_{x1\infty}$ составляющих скорости невозмущенного потока, т. е.

$$\alpha = V_{y_1\infty}/V_{x_1\infty}. \qquad (11.3.1)$$

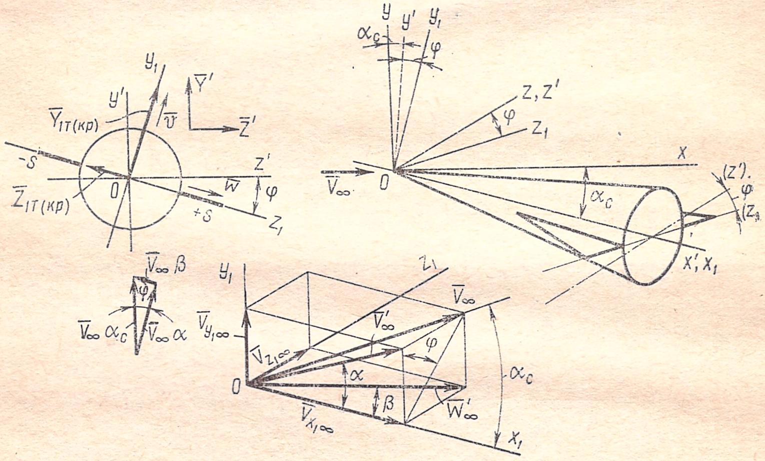
Угол скольжения β находится в поперечной плоскости z_1Ox_1 той же связанной системы координат как угол между проекцией $\overline{W}'_\infty$ вектора $\overline{V}_\infty$ на эту плоскость и продольной осью Ox_1. Из рис. 11.3.1 видно, что

$$\beta = V_{z_1\infty}/V_{x_1\infty}, \tag{11.3.2}$$

где $V_{z_1\infty}$ — поперечная составляющая невозмущенной скорости.

Из рис. 11.3.1 видно, что

$$\left.\begin{aligned} &V_{x_1\infty} = V_\infty \cos\alpha_c;\ V_{y_1\infty} = V_\infty \sin\alpha_c \cos\varphi,\\ &V_{z_1\infty} = V_\infty \sin\alpha_c \sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{11.3.3}$$



y_1
y'
$\overline{Y}'$
$\overline{Y}_{1T(кр)}$
$\overline{v}$
$\overline{Z}'$
$-S$
Z'
0
$\overline{w}$
φ
$\overline{Z}_{1T(кр)}$
$+S$
Z_1
y
y'
y_1
α_c
φ
Z, Z'
φ
Z_1
x
$\overline{V}_\infty$
0
α_c
(Z')
φ
(Z_1)
x', x_1
$\overline{V}_\infty\beta$
φ
$\overline{V}_\infty\alpha_c$
$\overline{V}_\infty\alpha$
y_1
Z_1
$\overline{V}_\infty$
$\overline{V}_{y_1\infty}$
$\overline{V}'_\infty$
$\overline{V}_{Z_1\infty}$
φ
α
α_c
0
β
$\overline{W}'_\infty$
$V_{X_1\infty}$
x_1

Рис. 11.3.1. Комбинация «корпус — плоское крыло» под углом крена

Для малых α_c

$$V_{x_1\infty} = V_\infty,\ V_{y_1\infty} = \alpha_c V_\infty \cos\varphi,\quad V_{z_1\infty} = \alpha_c V_\infty \sin\varphi. \tag{11.3.3'}$$

В соответствии с этим

$$\alpha = \alpha_c \cos\varphi; \tag{11.3.1'}$$

$$\beta = \alpha_c \sin\varphi. \tag{11.3.2'}$$

Учитывая линеаризованный характер обтекания, полную потенциальную функцию можно определить в виде суммы:

$$\varphi' = \varphi'_t + \varphi'_\alpha + \varphi'_\beta, \tag{11.3.4}$$

где φ'_t — потенциал осесимметричного обтекания со скоростью $V_{x_1\infty} = V_\infty$; φ'_α и φ'_β — соответственно добавочные потенциалы обтекания в направлении α со скоростью $V_{y_1\infty} = \alpha V_\infty = \alpha_c V_\infty \cos\varphi$ и в направлении β со скоростью $V_{z_1\infty} = \beta V_\infty = \alpha_c V_\infty \sin\varphi$.

В соответствии с (11.3.4) составляющие скорости:

$$u_1 = u_t + u_\alpha + u_\beta;\quad v_1 = v_t + v_\alpha + v_\beta;\ w_1 = w_t + w_\alpha + w_\beta. \tag{11.3.5}$$

Общее выражение для коэффициента давления на корпусе, определяемое с учетом интерференции, получим при помощи формулы (11.2.28′), в которой заменим составляющие возмущенной скорости в поточных координатах x, y, z на соответствующие значения u_1, v_1, w_1 в связанных координатах x_1, y_1, z_1. Осуществляя указанную замену, исходим из того, что в соответствии с рис. 11.3.1 связанные оси получаются путем поворота поточных осей вначале на угол α_c относительно оси Oz, затем на угол φ в направлении часовой стрелки относительно нового положения продольной оси Ox_1. Направляющие косинусы углов между осями x, y, z и x_1, y_1, z_1 приведены в табл. 11.3.1.

Таблица 11.3.1

Координаты	x	y	z
x_1	$\cos\alpha_c$	$-\sin\alpha_c$	0
y_1	$\sin\alpha_c\cos\varphi$	$\cos\alpha_c\cos\varphi$	$\sin\varphi$
z_1	$-\sin\alpha_c\sin\varphi$	$-\cos\alpha_c\sin\varphi$	$\cos\varphi$

В соответствии с данными табл. 11.3.1 и с учетом малости угла α_c для составляющих возмущенной скорости в поточных координатах напишем выражения:

$$\left.\begin{aligned} u &= u_1 + v_1\alpha_c\cos\varphi - w_1\alpha_c\sin\varphi;\\ v &= -u_1\alpha_c + v_1\cos\varphi - w_1\sin\varphi;\\ w &= v_1\sin\varphi + w_1\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (11.3.6)$$

Подставив найденные выражения для составляющих скорости в (11.2.28′) и отбросив малые величины $u_1^2\alpha_c^2$, $u_1v_1\alpha_c\sin\varphi$, $u_1v_1\alpha_c\cos\varphi$, найдем

$$\overline{p} = -(2/V_\infty)(u_1 + v_1\alpha - w_1\beta) - \left(v_1^2 + w_1^2\right)/V_\infty^2. \qquad (11.3.7)$$

Давление на корпусе

На нижней части корпуса коэффициент давления с учетом (11.3.5)

$$\overline{p}_{\text{т(кр)н}} = -(2/V_\infty)[u_{t\text{н}} + u_{\alpha\text{н}} + u_{\beta\text{н}} + \alpha\,(v_{t\text{н}} + v_{\alpha\text{н}} + v_{\beta\text{н}}) - \beta\,(w_{t\text{н}} + w_{\alpha\text{н}} + w_{\beta\text{н}})] - \left(1/V_\infty^2\right)[(v_{t\text{н}} + v_{\alpha\text{н}} + v_{\beta\text{н}})^2 + (w_{t\text{н}} + w_{\alpha\text{н}} + w_{\beta\text{н}})^2]. \qquad (11.3.8)$$

Аналогично записывается выражение для верхней поверхности. Это выражение можно представить в несколько иной форме, если воспользоваться свойством симметрии, которым обладают составляющие скорости на корпусе. Из свойства симметрии обтекания корпуса в направлении α вытекают записанные ранее соотношения (11.2.27). Аналогично можно представить выражения, соответствующие свойству симметрии обтекания в направлении β:

$$u_{\beta\text{в}} = u_{\beta\text{н}},\ v_{\beta\text{в}} = -v_{\beta\text{н}},\ w_{\beta\text{н}} = w_{\beta\text{н}}. \qquad (11.3.9)$$

С учетом свойства симметрии, выраженного соотношениями (11.2.27), (11.3.9) и зависимостями

$$u_{t\text{н}} = u_{t\text{в}},\ v_{t\text{н}} = -v_{t\text{в}},\ w_{t\text{н}} = w_{t\text{в}}, \qquad (11.3.9')$$

коэффициент давления на верхней поверхности корпуса

$$\bar{p}_{\text{т(кр)в}} = -(2/V_\infty)[u_{t\text{н}} - u_{\alpha\text{н}} + u_{\beta\text{н}} + \alpha(-v_{t\text{н}} + v_{\alpha\text{н}} - v_{\beta\text{н}}) -$$

$$-\beta(w_{t\text{н}} - w_{\alpha\text{н}} + w_{\beta\text{н}})] - \left(1/V_\infty^2\right)[(-v_{t\text{н}} + v_{\alpha\text{н}} - v_{\beta\text{н}})^2 + (w_{t\text{н}} - w_{\alpha\text{н}} + w_{\beta\text{н}})^2]. \tag{11.3.10}$$

Коэффициент перепада давления получается как разница значений (11.3.8) и (11.3.10), т. е.

$$\Delta\bar{p}_{\text{т(кр)}} = \bar{p}_{\text{т(кр)н}} - \bar{p}_{\text{т(кр)в}} = -(4/V_\infty)\,u_{\alpha\text{н}} - (4\alpha/V_\infty)(v_{t\text{н}} + v_{\beta\text{н}}) +$$

$$+(4\beta/V_\infty)\,w_{\alpha\text{н}} - \left(4/V_\infty^2\right)(v_{t\text{н}}v_{\alpha\text{н}} + v_{\alpha\text{н}}v_{\beta\text{н}}) - \left(4/V_\infty^2\right)(w_{t\text{н}}w_{\alpha\text{н}} + w_{\alpha\text{н}}w_{\beta\text{н}}). \tag{11.3.11}$$

Рассмотрим произвольную точку на нижней поверхности корпуса. Для этой точки вектор скорости возмущения в поперечной плоскости, обусловленного продольным обтеканием корпуса конечной толщины, $\bar{V}_{t\text{н}} = w_{t\text{н}}i + v_{t\text{н}}j$. Для этой же точки вектор скорости возмущения, вызванного наличием угла атаки, $\bar{V}_{\alpha\text{н}} = w_{\alpha\text{н}}i + (v_{\alpha\text{н}} + \alpha V_\infty)\,j$. Вектор $\bar{V}_{t\text{н}}$ в соответствии с (11.2.42) совпадает с радиальным направлением и расположен в меридиональной плоскости. Второй вектор $\bar{V}_{\alpha\text{н}}$ в соответствии с условием безотрывного обтекания совпадает с направлением касательной к контуру в рассматриваемой точке. Следовательно, векторы $\bar{V}_{t\text{н}}$ и $\bar{V}_{\alpha\text{н}}$ перпендикулярны и их скалярное произведение равно нулю, т. е.

$$(w_{t\text{н}}i + v_{t\text{н}}j)[w_{\alpha\text{н}}i + (v_{\alpha\text{н}} + \alpha V_\infty)\,j] = w_{t\text{н}}w_{\alpha\text{н}} + v_{t\text{н}}(v_{\alpha\text{н}} + \alpha V_\infty) = 0. \tag{11.3.12}$$

С учетом этого значения выражение (11.3.11) принимает вид

$$\Delta\bar{p}_{\text{т(кр)}} = -(4/V_\infty)\,u_{\alpha\text{н}} - (4/V_\infty)(v_{\beta\text{н}}\alpha - w_{\alpha\text{н}}\beta) - \left(4/V_\infty^2\right)(v_{\alpha\text{н}}v_{\beta\text{н}} + w_{\alpha\text{н}}w_{\beta\text{н}}). \tag{11.3.13}$$

По сравнению с (11.2.31) в выражении (11.3.13) появились слагаемые $v_{\beta\text{н}}\alpha$, $w_{\alpha\text{н}}\beta$, $v_{\alpha\text{н}}v_{\beta\text{н}}$, $w_{\alpha\text{н}}w_{\beta\text{н}}$, характеризующие влияние угла крена, — так называемые члены взаимодействия. Составляющие скорости $u_{\alpha\text{н}}$, $w_{\alpha\text{н}}$ и $v_{\alpha\text{н}}$ даны соответственно выражениями (11.2.22), (11.2.24) и (11.2.25). Компоненты $w_{\beta\text{н}}$ и $v_{\beta\text{н}}$ могут быть получены при помощи формулы для комплексного потенциала поперечного обтекания корпуса в направлении отрицательной оси Oz со скоростью набегающего потока βV_∞. По аналогии с (11.2.18) этот потенциал

$$W = -\beta V_\infty[\sigma + (r^2/\sigma)]. \tag{11.3.14}$$

Поле скоростей возмущений получим, если на поток с потенциалом (11.3.14) наложить параллельное течение в направлении положительной оси Oz со скоростью βV_∞ и соответствующим потенциалом $\beta V_\infty\sigma$. В результате комплексный потенциал скоростей возмущений

$$W_\beta = -\beta V_\infty(r^2/\sigma). \tag{11.3.15}$$

Отсюда комплексная скорость возмущений

$$dW_\beta/d\sigma = w_\beta - v_\beta i = \beta V_\infty(r^2/\sigma^2). \tag{11.3.16}$$

Для поверхности корпуса при условии, что $\sigma = re^{i\theta}$, получим

$$w_\beta - v_\beta i = \beta V_\infty e^{-2i\theta} = \beta V_\infty(\cos 2\theta - i\sin 2\theta). \tag{11.3.17}$$

Относя это выражение к нижней поверхности, получим для составляющих скорости:

$$w_{\beta \text{н}} = \beta V_\infty \cos 2\theta;\ v_{\beta \text{н}} = \beta V_\infty \sin 2\theta. \qquad (11.3.18)$$

Внося (11.2.22), (11.2.24), (11.2.25) и (11.3.18) в (11.3.13), найдем зависимость для коэффициента перепада давления на корпусе:

$$\Delta \overline{p}_{\text{т(кр)}} = \frac{4\alpha\left[\left(1-\frac{r^4}{s^4}\right)\frac{ds}{dx}+2\frac{r}{s}\cdot\frac{dr}{dx}\left(1+\frac{r^2}{s^2}-2\frac{z^2}{r^2}\right)\right]}{\left[\left(1+\frac{r^2}{s^2}\right)^2-4\frac{z^2}{s^2}\right]^{1/2}}+$$

$$+\frac{32\alpha\beta\,(r/s)\cos\theta\sin^2\theta}{\left[\left(1+\frac{r^2}{s^2}\right)^2-4\frac{z^2}{s^2}\right]^{1/2}}. \qquad (11.3.19)$$

При отсутствии крена второе слагаемое с сомножителем $\alpha\beta$, характеризующее взаимодействие крыла и корпуса, обусловленное наличием угла скольжения, равно нулю, т. е. приходим к зависимости (11.2.33) для комбинации «корпус — плоское крыло», обтекаемой без скольжения.

Первое слагаемое в (11.3.19) содержит производные ds/dx и dr/dx, что указывает на зависимость интерференции (в случае отсутствия крена) от изменения полуразмаха консоли и диаметра корпуса. В то же время эти производные отсутствуют во втором слагаемом и, следовательно, не влияют на взаимодействие корпуса и крыла при скольжении.

Давление на крыле

Используя (11.3.8) и (11.3.5), запишем зависимость для коэффициента давления на нижней поверхности консоли крыла с учетом интерференции:

$$\overline{p}_{\text{кр(т)н}} = -(2/V_\infty)[u_{t\text{н}}+u_{\alpha\text{н}}+u_{\beta\text{н}}+\alpha(v_{t\text{н}}+v_{\alpha\text{н}}+v_{\beta\text{н}})-\beta(w_{t\text{н}}+w_{\alpha\text{н}}+$$

$$+w_{\beta\text{н}})]-\left(1/V_\infty^2\right)[(v_{t\text{н}}+v_{\alpha\text{н}}+v_{\beta\text{н}})^2+(w_{t\text{н}}+w_{\alpha\text{н}}+w_{\beta\text{н}})^2]. \qquad (11.3.20)$$

Для верхней поверхности коэффициент давления можно представить формулой (11.3.20) с заменой в ней индекса «н» на «в». Полученное соотношение можно преобразовать при помощи зависимостей, связывающих между собой составляющие скорости на верхней и нижней поверхностях и вытекающих из соображений симметрии.

Для условий на нижней и верхней поверхностях правой консоли эти зависимости имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &u_{t\text{н}}=u_{t\text{в}},\ w_{t\text{н}}=w_{t\text{в}},\ v_{t\text{н}}=-v_{t\text{в}};\\ &u_{\alpha\text{н}}=-u_{\alpha\text{в}},\ w_{\alpha\text{н}}=-w_{\alpha\text{в}},\ v_{\alpha\text{н}}=v_{\alpha\text{в}};\\ &u_{\beta\text{н}}=u_{\beta\text{в}},\ w_{\beta\text{н}}=w_{\beta\text{в}},\ v_{\beta\text{н}}=-v_{\beta\text{в}}.\end{aligned}\right\} \qquad (11.3.21)$$

Записывая (11.3.20) применительно к условиям на верхней поверхности и производя замену членов с индексом «в» соответствующими значениями, представленными (11.3.21), найдем

$$\overline{p}_{\text{кр(т)в}} = -(2/V_\infty)[u_{t\text{н}}-u_{\alpha\text{н}}+u_{\beta\text{н}}-\alpha(-v_{t\text{н}}+v_{\alpha\text{н}}-v_{\beta\text{н}})-$$

$$-\beta(w_{t\text{н}}-w_{\alpha\text{н}}+w_{\beta\text{н}})]-\left(1/V_\infty^2\right)[(-v_{t\text{н}}+v_{\alpha\text{н}}-v_{\beta\text{н}})^2+(w_{t\text{н}}-w_{\alpha\text{н}}+w_{\beta\text{н}})^2]$$

$$(11.3.22)$$

Коэффициент перепада давления

$$\Delta\overline{p}_{кр(т)}=\overline{p}_{кр(т)н}-\overline{p}_{кр(т)в}=-(4/V_\infty)\,u_{\alpha н}-(4/V_\infty)[(v_{tн}+v_{\beta н})\,\alpha-w_{\alpha н}\beta]-$$

$$-\left(4/V_\infty^2\right)(v_{tн}v_{\alpha н}+v_{\alpha н}v_{\beta н}+w_{tн}w_{\alpha н}+w_{\alpha н}w_{\beta н}).$$

Принимая во внимание зависимость (11.2.44) $v_t=0$, а также условие безотрывного обтекания крыла в поперечном направлении $v_\beta=0$, получим

$$\Delta\overline{p}_{кр(т)}=-(4/V_\infty)\,u_{\alpha н}+(4/V_\infty)\,w_{\alpha н}\beta-\left(4/V_\infty^2\right)(w_{tн}w_{\alpha н}+w_{\alpha н}w_{\beta н}). \qquad (11.3.23)$$

Составляющие скорости $u_{\alpha н}$, $w_{\alpha н}$, $w_{tн}$ были определены выражениями (11.2.34), (11.2.35) и (11.2.43). Составляющую $w_{\beta\, н}$ найдем из уравнения (11.3.16), положив в нем $\sigma=z$:

$$w_{\beta н}=\beta V_\infty\,(r^2/z^2). \qquad (11.3.24)$$

После соответствующих подстановок в (11.3.23) найдем

$$\Delta\overline{p}_{кр(т)}=\frac{4\alpha\left\{\dfrac{r}{s}\cdot\dfrac{dr}{dx}\left[\left(1-\dfrac{r^2}{z^2}\right)^2+2\left(\dfrac{r^2}{s^2}-1\right)\right]+\dfrac{ds}{dx}\left(1-\dfrac{r^4}{s^4}\right)\right\}}{\left[\left(1+\dfrac{r^2}{s^2}\right)^2-\dfrac{z^2}{s^2}\left(1+\dfrac{r^2}{z^2}\right)^2\right]^{1/2}}+$$

$$+\frac{4\alpha\beta\,\dfrac{z}{s}\left(1+\dfrac{r^2}{z^2}\right)\left(1-\dfrac{r^2}{z^2}\right)^2}{\left[\left(1+\dfrac{r^2}{s^2}\right)^2-\dfrac{z^2}{s^2}\left(1+\dfrac{r^2}{z^2}\right)^2\right]^{1/2}}. \qquad (11.3.25)$$

В выражении (11.3.25) слагаемое с сомножителем $\alpha\beta$ характеризует взаимодействие крыла и корпуса, обусловленное скольжением. Это слагаемое асимметрично для левой и правой консолей, так как угол β для левой консоли будет отрицательным, а для правой — положительным.

Подъемная сила и центр давления

Взаимодействие между крылом и корпусом при наличии угла скольжения приводит к тому, что подъемная сила правой консоли возрастает с увеличением угла крена φ, а левой консоли убывает на ту же величину. Поэтому суммарная подъемная сила комбинации не изменяется и сохраняется по величине такой, как при отсутствии скольжения.

Подъемная сила в направлении оси y_1 (см. рис. 11.3.1) равна в соответствии с (11.2.81)

$$Y_{1т,кр}=2\alpha_c\cos\varphi\pi s_m^2\left(1-r_m^2+r_m^4\right)q_\infty. \qquad (11.3.26)$$

Боковая сила в направлении оси z_1 создается только корпусом в результате его обтекания поперечным потоком со скоростью $-\beta V_\infty$ и не зависит от присутствия крыла нулевой толщины, которое не оказывает влияния на это обтекание. Согласно (11.2.79),

$$Z_{1т,кр}=Z_{1т}=-2\beta\pi r^2q_\infty=-2\alpha_c\pi r^2\sin\varphi q_\infty. \qquad (11.3.27)$$

Подъемная сила в направлении оси y (см. рис. 11.3.1; система связанных осей $x'Oy'$ повернута относительно оси Oz на угол атаки α_ε; угол φ для этой системы равен нулю)

$$Y = Y_{1\text{т,кр}} \cos\varphi - Z_{1\text{т}} \sin\varphi = 2\alpha_c \pi s_m^2 \left[(1-r_m^2)^2 \cos^2\varphi + r_m^2\right] q_\infty. \tag{11.3.28}$$

Боковая сила в направлении оси z'

$$Z = Y_{1\text{т, кр}} \sin\varphi + Z_{1\text{т}} \cos\varphi = 2\alpha_c \pi s_m^2 \sin\varphi \cos\varphi \,(1-r_m^2)\, q_\infty. \tag{11.3.29}$$

Рассмотрим подъемную силу и центр давления несущей консоли, обусловленные креном. Для правой треугольной консоли величина этой подъемной силы, определяемая вторым слагаемым в (11.3.25), которое обозначим $[\Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}}]_\varphi$, равна

$$\Delta Y_{\text{кр(т)}} = q_\infty \iint\limits_{(S_{\text{кр}})} [\Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}}]_\varphi \, dS_{\text{кр}}. \tag{11.3.30}$$

Из рис. 11.2.3 видно, что элементарная площадь консоли

$$dS_{\text{кр}} = dz\,dx = dz\,ds/\mathrm{tg}\,\varepsilon.$$

В соответствии с этим значением и с учетом (11.3.25) для второго слагаемого напишем

$$\Delta Y_{\text{кр(т)}} = \frac{q_\infty}{\mathrm{tg}\,\varepsilon} \int\limits_r^{s_m} dz \int\limits_z^{s_m} [\Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}}]_\varphi \, ds = \frac{4\alpha\beta q_\infty}{\mathrm{tg}\,\varepsilon} \int\limits_r^{s_m} z\left(1+\frac{r^2}{z^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{z^2}\right)^2 \times$$

$$\times\, dz \int\limits_z^{s_m} ds \Bigg/ \left\{ s\left[\left(1+\frac{r^2}{s^2}\right)^2 - \frac{z^2}{s^2}\left(1+\frac{r^2}{z^2}\right)^2\right]^{1/2}\right\}.$$

Производя вычисление второго интеграла, получим

$$\Delta Y_{\text{кр(т)}} = \frac{2\alpha\beta q_\infty}{\mathrm{tg}\,\varepsilon} \int\limits_r^{s_m} z\left(1+\frac{r^2}{z^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{z^2}\right)^2 \mathrm{arch}\, \frac{2s_m^2 - (z^2 + r^4/z^2)}{z^2 - r^4/z^2} \, dz. \tag{11.3.30'}$$

Дальнейшее интегрирование осуществляется численным методом. Введем коэффициент интерференции, вычисляемый в виде

$$K_\varphi = \Delta Y_{\text{кр(т)}} \,\mathrm{tg}\,\varepsilon / (Y_{\text{кр}} \beta), \tag{11.3.31}$$

где $Y_{\text{кр}}$ — подъемная сила одной треугольной изолированной консоли.

В соответствии с (11.2.80)

$$Y_{\text{кр}} = \alpha\pi (s_m - r)^2 q_\infty.$$

С учетом приведенных выражений коэффициент

$$K_\varphi = \frac{2}{\pi (s_m - r)^2} \int\limits_r^{s_m} z\left(1 + \frac{r^2}{z^2}\right)\left(1 - \frac{r^2}{z^2}\right)^2 \operatorname{arch} \frac{2s_m^2 - (z^2 + r^4/z^2)}{z^2 - r^4/z^2}\, dz. \qquad (11.3.32)$$

Как показывают расчеты, коэффициент K_φ можно принять одинаковым для консолей различной формы и рассматривать функцией только отношения r/s_m. Эти значения, полученные численным интегрированием, представлены в табл. 11.3.2 и на рис. 11.3.2 в функции отношения r/s_m. Сила, характеризуемая коэффициентом K_φ, зависит, как видно из (11.3.23), от суммарного воздействия поля скоростей w_α и w_β, вызванных наличием углов атаки и скольжения. Согласно (11.3.31), величина этой силы

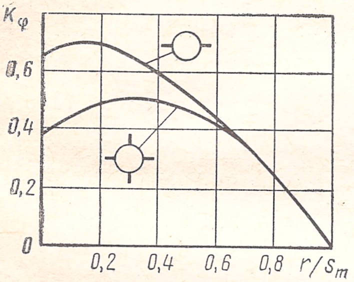


Рис. 11.3.2. Коэффициенты интерференции при крене для плоской и крестообразной комбинаций

$$\Delta Y_{\text{кр(т)}} = K_\varphi Y_{\text{кр}} \beta / \operatorname{tg} \varepsilon, \qquad (11.3.33)$$

а соответствующий коэффициент

$$\Delta c_{y\text{кр(т)}} = \Delta Y_{\text{кр(т)}} / (q_\infty S_{\text{кр}}) = K_\varphi c^\alpha_{y\text{кр}} \alpha\beta / \operatorname{tg} \varepsilon. \qquad (11.3.33')$$

Продольная координата центра давления консоли, отсчитываемая от носка бортовой хорды, определяется из условия

$$(x_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{кр(т)}} = -\Delta M_{z\text{кр(т)}} / \Delta Y_{\text{кр(т)}}, \qquad (11.3.34)$$

где дополнительный момент тангажа, обусловленный креном,

$$\Delta M_{z\text{кр(т)}} = \frac{-q_\infty}{\operatorname{tg}^2 \varepsilon} \int\limits_r^{s_m} dz \int\limits_z^{s_m} [\Delta \bar{p}_{\text{кр(т)}}]_\varphi s\, ds. \qquad (11.3.35)$$

Расстояние от оси симметрии корпуса до центра давления в поперечном направлении вычисляется из выражения

$$(z_{\text{ц.д}})_{\varphi\text{кр(т)}} = -\Delta M_{x\text{кр(т)}} / \Delta Y_{\text{кр(т)}}, \qquad (11.3.36)$$

где дополнительная величина момента крена при скольжении

$$\Delta M_{x\text{кр(т)}} = \frac{-q_\infty}{\operatorname{tg} \varepsilon} \int\limits_r^{s_m} z\, dz \int\limits_z^{s_m} [\Delta \bar{p}_{\text{кр(т)}}]_\varphi\, ds. \qquad (11.3.37)$$

По значениям обеих координат центра давления, найденным в результате численного интегрирования, подсчитаны коэффициенты центра давления:

$$\left.\begin{aligned} (c_{\text{ц.д}})_{\varphi\text{кр(т)}} &= [(x_{\text{ц.д}})_{\varphi\text{кр(т)}}] / b_{\text{кр}}; \\ (\bar{z}_{\text{ц.д}})_{\varphi\text{кр(т)}} &= [(z_{\text{ц.д}})_{\varphi\text{кр(т)}} - r] / (s_m - r). \end{aligned}\right\} \qquad (11.3.38)$$

Таблица 11.3.2

$\frac{r}{s_m}$	Плоская комбинация			Крестообразная комбинация		
	K_φ	$(c_{\text{ц.д}})_{\varphi\text{кр(т)}}$	$(\bar{z}_{\text{ц.д}})_{\varphi\text{кр(т)}}$	K_φ	$(c_{\text{ц.д}})_{\varphi\text{кр(т)}}$	$(\bar{z}_{\text{ц.д}})_{\varphi\text{кр(т)}}$
0	0,637	0,667	0,524	0,382	0,667	0,556
0,1	0,687	0,667	0,518	0,447	0,654	0,532
0,2	0,681	0,677	0,531	0,490	0,660	0,530
0,3	0,649	0,688	0,546	0,508	0,673	0,540
0,4	0,597	0,699	0,560	0,502	0,687	0,554
0,5	0,529	0,709	0,575	0,471	0,700	0,569
0,6	0,447	0,719	0,588	0,417	0,714	0,585
0,7	0,352	0,729	0,601	0,342	0,725	0,598
0,8	0,246	0,736	0,614	0,244	0,734	0,612
0,9	0,128	0,744	0,616	0,127	0,743	0,625
1,0	0	0,750	0,637	0	0,750	0,637

Эти коэффициенты приведены в табл. 11.3.2. Они могут быть использованы для определения момента крена, изгибающего момента в корневом сечении консоли в зависимости от угла крена. Здесь не рассматриваются нагрузки, действующие на корпус при крене. Эти нагрузки, имеющие, как и для крыла, асимметричный характер, практически не оказывают влияния на подъемную силу, момент и, следовательно, на положение центра давления комбинации.

Общие соотношения для сил и моментов плоской комбинации при крене

Коэффициент продольного момента (иначе, коэффициент шарнирного момента), определяемый относительно поперечной оси, проходящей через вершину консоли (точки D на рис. 11.2.5),

$$m_{\text{ш.кс}} = -0{,}5 c^{\alpha}_{y\,\text{кр}} \alpha \bar{b}_{\text{кр}} \left[(c_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{кр(т)}} + \frac{K_\varphi \beta}{\operatorname{tg} \varepsilon} (c_{\text{ц.д}})_{\varphi\text{кр(т)}} \right], \qquad (11.3.39)$$

где $\alpha = \alpha_c \cos\varphi$, $\bar{b}_{\text{кр}} = b_{\text{кр}}/x_{\text{к}}$.

Так как при крене дополнительная подъемная сила от обоих консолей не возникает, то, очевидно, суммарный коэффициент подъемной силы (в направлении оси y_1, рис. 11.3.3)

$$c_{y\,1\text{т,кр}} = \frac{Y_{1\text{т,кр}}}{q_\infty S_{\text{кр}}} = c_{y1\text{т}} + c^{\alpha}_{y\text{кр}} (K_{\text{т}} + K_{\text{кр}}) \alpha. \qquad (11.3.40)$$

С учетом этого значения коэффициент момента тангажа, рассчитанного относительно носка корпуса,

$$m_{z1\text{т, кр}} = m_{z1\text{т}} - \{K_{\text{т}} [(c_{\text{ц.д}})_{\alpha\,\text{т(кр)}} \bar{b}_{\text{кр}} + \bar{x}_{\text{кр}}] + \\ + K_{\text{кр}} [(c_{\text{ц.д}})_{\alpha\,\text{кр(т)}} \bar{b}_{\text{кр}} + \bar{x}_{\text{кр}}]\} c^{\alpha}_{y\text{кр}} \alpha, \qquad (11.3.41)$$

где $m_{z1т}$ — коэффициент момента тангажа корпуса, рассчитанный в плоскости угла атаки α по площади консолей $S_{кр}$ и длине $x_к$; $\bar{b}_{кр}=b_{кр}/x_к$; $\bar{x}_{кр}=x_{кр}/x_к$ (см. рис. 11.2.5).

В соответствии с (11.3.40) и (11.3.41) вычисляется коэффициент центра давления, являющегося точкой приложения суммарной подъемной силы $Y_{1т,\,кр}$:

$$(c_{ц.д})_\alpha=(x_{ц.д})_\alpha/x_к=-m_{z\,1т,кр}/c_{y\,1т,кр}. \qquad (11.3.42)$$

Коэффициент боковой силы (в направлении оси z_1) находится при условии, что эта сила создается только корпусом в результате его обтекания со скоростью $-V_\infty\beta$ и не зависит от присутствия крыла нулевой толщины, которое не оказывает влияния на это обтекание. В соответствии с этим

$$c_{z\,1т,кр}=c_{z1т}. \qquad (11.3.43)$$

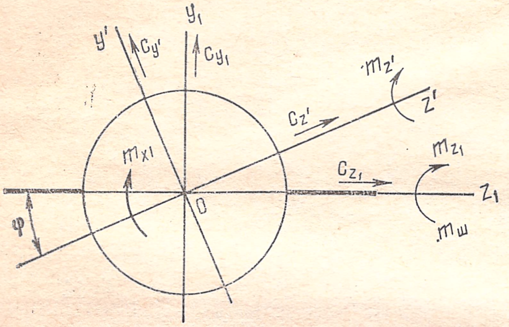


Рис. 11.3.3. Коэффициенты сил и моментов, действующих на плоскую комбинацию при крене

Так же, как и боковая сила, момент рыскания в плоскости угла скольжения создается только корпусом. Коэффициент этого момента

$$m_{y\,1т,кр}=m^\beta_{y\,т}\beta, \qquad (11.3.44)$$

где производная $m^\beta_{yт}=-m^\alpha_{zт}$.

Очевидно, для рассматриваемой комбинации коэффициент центра давления боковой силы будет таким, как для изолированного корпуса, т. е.

$$(c_{ц.д})_\beta=(x_{ц.д})_\beta/x_к=-m_{y1т}/c_{z1т}. \qquad (11.3.45)$$

Увеличение подъемной силы и ее снижение на ту же величину соответственно на правой и левой консолях при скольжении вызывает момент крена, коэффициент которого

$$m_{x1т,кр}=-\frac{K_\varphi}{\mathrm{tg}\,\varepsilon}c^\alpha_{y кр}\alpha\beta\left[(\bar{z}_{ц.д})_{\varphi кр(т)}+\frac{1}{\bar{s}_m-1}\right]\frac{s_m-r}{x_к}. \qquad (11.3.46)$$

Зная аэродинамические характеристики относительно осей y_1 и z_1, можно определить соответствующие их значения относительно осей y' и z'. Согласно рис. 11.3.3, коэффициент подъемной силы, действующей в направлении оси y',

$$c_{y'т,\,кр}=c_{y1т,\,кр}\cos\varphi-c_{z1т}\sin\varphi. \qquad (11.3.47)$$

В этом выражении в соответствии с (11.3.40) можно принять

$$c_{y1\text{т, кр}} = c^{\alpha}_{y\text{т}} \alpha_{\text{с}} \cos\varphi + c^{\alpha}_{y\text{кр}} (K_{\text{т}} + K_{\text{кр}}) \alpha \cos\varphi. \qquad (11.3.48)$$

Полагая также, что

$$c_{z1\text{т}} = -c^{\alpha}_{y\text{т}} \beta = -c^{\alpha}_{y\text{т}} \alpha_{\text{с}} \sin\varphi, \qquad (11.3.49)$$

получим из (11.3.47)

$$c_{y'\text{т, кр}} = c^{\alpha}_{y\text{т}} \alpha_{\text{с}} + c^{\alpha}_{y\text{кр}} (K_{\text{т}} + K_{\text{кр}}) \alpha_{\text{с}} \cos^2\varphi. \qquad (11.3.47')$$

Коэффициент боковой силы в направлении оси z'

$$c_{z'\text{т, кр}} = c_{y1\text{т, кр}} \sin\varphi + c_{z1\text{т}} \cos\varphi. \qquad (11.3.50)$$

Внося сюда значения $c_{y1\text{т, кр}}$ и $c_{z1\text{т}}$ из (11.3.48) и (11.3.49), найдем

$$c_{z'\text{т, кр}} = c^{\alpha}_{y\text{кр}} (K_{\text{т}} + K_{\text{кр}}) \alpha_{\text{с}} \sin\varphi \cos\varphi. \qquad (11.3.50')$$

Имея коэффициенты подъемной и боковой сил (11.3.47′), (11.3.50′) и зная расположение соответствующих центров давления для консолей и корпуса, можно найти коэффициенты продольного момента и момента рыскания относительно поперечных осей y' и z', проходящих через носовую часть.

Коэффициенты сил $c_{y1\text{т}}$ и $c_{z1\text{т}}$ и момента $m_{z1\text{т}}$, создаваемых носовой частью корпуса, вычисляются по линеаризованной теории для изолированного корпуса.

§ 11.4. КРЕСТООБРАЗНАЯ КОМБИНАЦИЯ

Давление и подъемная сила

Рассмотрим аэродинамические коэффициенты крестообразной комбинации в виде кругового цилиндра и плоских консолей нулевой толщины, обтекаемой слабовозмущенным (линеаризованным) сверхзвуковым потоком (рис. 11.4.1). Примем, что вертикальные консоли имеют такую же форму в в плане и полуразмах, как и горизонтальные. Одновременно будем исходить из предположения, что наличие вертикальных консолей не влияет на картину обтекания комбинации в продольной плоскости x_1Oy_1 под углом атаки $\alpha = \alpha_{\text{с}} \cos\varphi$, так же как присутствие

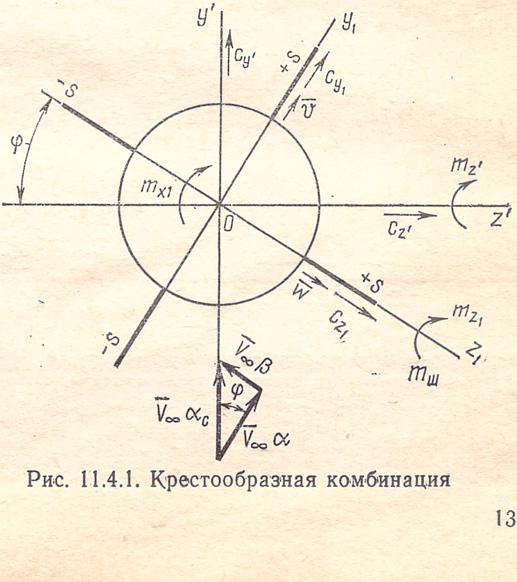


Рис. 11.4.1. Крестообразная комбинация

горизонтальных консолей не оказывает влияния на аэродинамический спектр обтекания, получаемый при изменении угла скольжения $\beta=\alpha_c \sin\varphi$.

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к решению двух самостоятельных задач, одна из которых связана с отысканием поля скоростей для плоской комбинации «корпус — вертикальное крыло», установленной под углом α, другая — с определением поля скоростей плоской комбинации «корпус — горизонтальное крыло», имеющей угол β. В результате сложения полей получается суммарный поток около крестообразной комбинации, повернутой на угол тангажа α_c и угол крена φ.

В соответствии с этим суммарные значения скоростей возмущения определяются формулами (11.3.5), а коэффициент давления — соотношением (11.3.7). Коэффициент перепада давления на корпусе находится из выражения (11.3.13), в котором составляющие $u_{\alpha н}$, $w_{\alpha н}$, $v_{\alpha н}$ определяются соответственно по формулам (11.2.22), (11.2.24), (11.2.25), полученным для плоской комбинации при условии, что в этих формулах $\alpha=\alpha_c\cos\varphi$.

Для определения составляющих w_β и v_β воспользуемся выражением для комплексного потенциала плоской комбинации, обтекаемой в поперечном направлении со скоростью βV_∞. Это выражение находим следующим образом. По аналогии с (11.2.18) напишем формулу для комплексного потенциала при обтекании круглого цилиндра радиуса r_0 в плоскости $\zeta=\xi+i\eta$:

$$W = -\beta V_\infty \left[\zeta + \left(r_0^2/\zeta\right)\right]. \qquad (11.4.1)$$

Далее по аналогии с (11.2.16) напишем уравнение

$$\sigma - r^2/\sigma = \zeta - r_0^2/\zeta, \qquad (11.4.2)$$

в котором $r_0=0{,}5[s+(r^2/s)]$.

Можно убедиться в том, что при помощи этого уравнения осуществляется конформное преобразование круга радиуса r_0 в контур, состоящий из круга радиуса r и пары вертикальных консолей с размахом $\pm s$ и получающийся в результате пересечения комбинации «корпус — крыло» с плоскостью yOz.

Решая относительно ζ квадратное уравнение (11.4.2), получим

$$\zeta = 0{,}5\left[(\sigma - r^2/\sigma) + \sqrt{(\sigma - r^2/\sigma)^2 + 4r_0^2}\right]. \qquad (11.4.3)$$

В результате подстановки этой величины в (11.4.1) находим комплексный потенциал:

$$W = -\beta V_\infty \left[(\sigma - r^2/\sigma)^2 + 4r_0^2\right]^{1/2} \qquad (11.4.4)$$

Чтобы найти полную величину комплексного потенциала, надо прибавить к (11.4.4) потенциальную функцию потока, параллельного оси z, равную $\beta V_\infty \sigma$. В результате полный комплексный потенциал

$$W_\beta = -\beta V_\infty \left\{\left[(\sigma - r^2/\sigma)^2 + 4r_0^2\right]^{1/2} - \sigma\right\}. \qquad (11.4.5)$$

Продифференцируем это выражение по σ:

$$\frac{dW_\beta}{d\sigma} = w_\beta - iv_\beta = -\beta V_\infty \left\{\frac{(\sigma - r^2/\sigma)(1 + r^2/\sigma^2)}{\left[(\sigma - r^2/\sigma)^2 + 4r_0^2\right]^{1/2}} - 1\right\}. \qquad (11.4.6)$$

Для поверхности корпуса при условии, что $\sigma = re^{i\vartheta}$,

$$w_\beta - iv_\beta = -\beta V_\infty \left[\frac{2r \sin\theta\,(1 + \cos 2\theta - i \sin 2\theta)\, i}{\left(4r_0^2 - 4r^2 \sin^2\theta\right)^{1/2}} - 1 \right]. \qquad (11.4.7)$$

Отсюда находим:

$$w_\beta = -\beta V_\infty \left\{ \frac{2r \sin\theta \sin 2\theta}{[(s + r^2/s)^2 - 4r^2 \sin^2\theta]^{1/2}} - 1 \right\}; \qquad (11.4.8)$$

$$v_\beta = \frac{2\beta r V_\infty \sin\theta\,(1 + \cos 2\theta)}{[(s + r^2/s)^2 - 4r^2 \sin^2\theta]^{1/2}}. \qquad (11.4.9)$$

Подставим (11.4.8) и (11.4.9), а также (11.2.22), (11.2.24), (11.2.25) в формулу (11.3.13) для коэффициента перепада давления на корпусе. Имея в виду при этом, что $r \cos\theta = z$, найдем

$$\Delta\bar{p}_{\text{т(кр)}} = -4\alpha \frac{4\dfrac{z^2}{r^2}\dfrac{dr}{dx}\dfrac{r}{s} - \left(1 + \dfrac{r^2}{s^2}\right)\left[2\dfrac{r}{s}\dfrac{dr}{dx} + \dfrac{ds}{dx}\left(1 - \dfrac{r^2}{s^2}\right)\right]}{\left[\left(1 + \dfrac{r^2}{s^2}\right)^2 - 4\left(\dfrac{z^2}{s^2}\right)\right]^{1/2}} +$$

$$+ \frac{64\alpha\beta\dfrac{z^2}{s^2}\left(1 - \dfrac{z^2}{r^2}\right)}{\left[\left(1 + \dfrac{r^2}{s^2}\right)^2 - 4\dfrac{z^2}{s^2}\right]^{1/2}\left[\left(1 - \dfrac{r^2}{s^2}\right)^2 + 4\dfrac{z^2}{s^2}\right]^{1/2}}. \qquad (11.4.10)$$

Первое слагаемое содержит члены, пропорциональные производным dr/dx и ds/dx, которые характеризуют соответственно влияние изменения радиуса корпуса и полуразмаха консолей. Однако обе эти производные не оказывают влияния на второе слагаемое, обусловленное скольжением и движением тангажа. Этот член взаимодействия, пропорциональный произведению $\alpha\beta$, определяет возрастание коэффициента перепада давления на правой половине корпуса. Величина этого коэффициента уменьшается на такую же величину на левой половине корпуса. Это следует из формулы (11.3.13), в которой составляющую $v_{\beta\,\text{н}}$ надо взять для левой половины корпуса с обратным знаком, что приведет к появлению отрицательного знака перед вторым слагаемым в (11.4.10).

Для определения коэффициента перепада давления на правой горизонтальной консоли воспользуемся формулой (11.3.23), в которой составляющие скорости $u_{\alpha\,\text{н}}$, $w_{\alpha\,\text{н}}$ и $w_{t\,\text{н}}$ находятся соответственно из выражений (11.2.34), (11.2.35) и (11.2.43). Составляющую $w_{\beta\text{н}}$ найдем из соотношения (11.4.6), приняв в нем $\sigma = z$:

$$w_\beta = -\beta V_\infty \left\{ \frac{z\,(1 - r^4/z^4)}{[(z - r^2/z)^2 + (s + r^2/s)^2]^{1/2}} - 1 \right\} \qquad (11.4.11)$$

В результате соответствующих подстановок находим

$$\Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}} = 4\alpha \frac{\dfrac{r}{s}\dfrac{dr}{dx}\left[\left(1 - \dfrac{r^2}{z^2}\right)^2 + 2\left(\dfrac{r^2}{s^2} - 1\right)\right] + \dfrac{ds}{dx}\left(1 - \dfrac{r^4}{s^4}\right)}{\left[1 + \dfrac{r^4}{s^4} - \dfrac{z^2}{s^2}\left(1 + \dfrac{r^4}{z^4}\right)\right]^{1/2}} +$$

$$+ \frac{4\dfrac{z^2}{s^2}\alpha\beta\left(1 - \dfrac{r^4}{z^4}\right)^2}{\left[\left(1 + \dfrac{r^4}{s^4}\right)^2 - \dfrac{z^4}{s^4}\left(1 + \dfrac{r^4}{z^4}\right)^2\right]^{1/2}}. \qquad (11.4.12)$$

В соответствии с этой формулой избыточное давление на правой консоли при ее движении вниз возрастает, а на левой консоли убывает на ту же величину.

Коэффициент перепада давления на верхней и нижней консолях можно определить из соображений симметрии, используя зависимость (11.4.12), в которой следует заменить z на y и осуществить перестановку углов α и β. В соответствии с этим для нижней консоли

$$\Delta\overline{p}_{\text{кр(т)}} = 4\beta\,\frac{\dfrac{r}{s}\,\dfrac{dr}{dx}\left[\left(1-\dfrac{r^2}{y^2}\right)^2+2\left(\dfrac{r^2}{s^2}-1\right)\right]+\dfrac{ds}{dx}\left(1-\dfrac{r^4}{s^4}\right)}{\left[1+\dfrac{r^4}{s^4}-\dfrac{y^2}{s^2}\left(1+\dfrac{r^4}{s^4}\right)\right]^{1/2}}+$$

$$+\frac{4\,\dfrac{y^2}{s^2}\,\alpha\beta\left(1-\dfrac{r^4}{y^4}\right)^2}{\left[\left(1+\dfrac{r^4}{s^4}\right)^2-\dfrac{y^4}{s^4}\left(1+\dfrac{r^4}{y^4}\right)^2\right]^{1/2}}. \qquad (11.4.13)$$

Углы α и β принимаются положительными. Давление на верхней консоли будет определяться по той же формуле (11.4.13) с той разницей, что угол β принимается положительным, а α — отрицательным. Второй член с $\alpha\beta$ (член взаимодействия) асимметричен для нижней и верхней консолей. Наличие асимметричного члена в (11.4.12) и (11.4.13) приводит к тому, что хотя подъемная сила на консолях и возникает, однако вследствие асимметричности нагрузки дополнительная подъемная сила не создается.

Имея в виду, что суммарные подъемные силы на консолях не зависят от членов взаимодействия, полную подъемную силу, действующую на комбинацию «корпус — крестообразное крыло» при наличии скольжения, можно найти путем суммирования сил, действующих на две плоские комбинации «корпус — крыло», установленные в потоке под соответствующими углами

$$\alpha = \alpha_c \cos\varphi \text{ и } \beta = \alpha_c \sin\varphi.$$

По аналогии с (11.3.26) подъемная сила в направлении оси y_1, действующая на комбинацию «корпус — горизонтальные консоли»,

$$Y_{1\text{т, кр}} = 2\alpha\pi s_m^2\left(1-r_m^2+r_m^4\right)q_\infty. \qquad (11.4.14)$$

Подъемная (боковая) сила, действующая на комбинацию «корпус — вертикальное оперение» в направлении, обратном положительному направлению оси z_1,

$$Z_{1\text{т, кр}} = -2\beta\pi s_m^2\left(1-r_m^2+r_m^4\right)q_\infty. \qquad (11.4.15)$$

Подъемная сила в направлении оси y' (см. рис. 11.3.1)

$$Y = Y_{1\text{т, кр}}\cos\varphi - Z_{1\text{т, кр}}\sin\varphi = 2\alpha_c\pi s_m^2 q_\infty\left(1-r_m^2+r_m^4\right)\cos^2\varphi +$$

$$+2\alpha_c\pi s_m^2 q_\infty\left(1-r_m^2+r_m^4\right)\sin^2\varphi = 2\alpha_c\pi s_m^2\left(1-r_m^2+r_m^4\right)q_\infty. \qquad (11.4.16)$$

Подъемная (боковая сила) в направлении оси z' равна нулю. Действительно,

$$Z = Y_{1\text{т, кр}}\sin\varphi + Z_{1\text{т, кр}}\cos\varphi = \left[2\alpha_c\pi\, s_m^2 q_\infty\left(1-r_m^2+r_m^4\right)-\right.$$

$$\left.-\,2\alpha_c\pi s_m^2 q_\infty\left(1-r_m^2+r_m^4\right)\right]\sin\varphi\cos\varphi = 0. \qquad (11.4.17)$$

Полученные результаты указывают на одно важное свойство крестообразной комбинации: при повороте летательного аппарата, т. е. при наличии скольжения, подъемная сила в вертикальной плоскости, параллельной набегающему потоку и проходящей через продольную ось аппарата, не изменяется.

Коэффициенты интерференции и центра давления

Вычислим подъемную силу и центр давления консоли, обусловленные креном. В соответствии с выражением (11.3.30), в котором $[\Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}}]_\varphi$ определяется вторым слагаемым в (11.4.12), получим

$$\Delta Y_{\text{кр(т)}}=\frac{q_\infty}{\operatorname{tg}\varepsilon}\int\limits_r^{s_m} dz\int\limits_z^{s_m}[\Delta\bar{p}_{\text{кр(т)}}]_\varphi ds=\frac{4\alpha_c^2\sin\varphi\cos\varphi q_\infty}{\operatorname{tg}\varepsilon}\times$$

$$\times\int\limits_r^{s_m} z^2\left(1-\frac{r^4}{z^4}\right)^2 dz\int\limits_z^{s_m}\frac{ds}{s^2\left[\left(1+\frac{r^4}{s^4}\right)^2-\frac{z^4}{s^4}\left(1+\frac{r^4}{z^4}\right)^2\right]^{1/2}}.$$

Введем обозначения:

$$\bar{s}=s^2/r^2,\ \bar{z}=z^2/r^2. \tag{11.4.18}$$

В соответствии с этими обозначениями

$$\Delta Y_{\text{кр(т)}}=\frac{\alpha_c^2 r^2 q_\infty\sin\varphi\cos\varphi}{\operatorname{tg}\varepsilon}\int\limits_1^{\bar{z}_m}\frac{(\bar{z}^2-1)^2 d\bar{z}}{\bar{z}^{5/2}}\int\limits_{\bar{s}}^{\bar{s}_m}\frac{\bar{s}^{1/2}d\bar{s}}{\sqrt{(\bar{s}^2-\bar{z}^2)(\bar{z}^2\bar{s}^2-1)}}, \tag{11.4.19}$$

где $\bar{z}_m=\bar{s}_m=s_m^2/r^2$.

Интегрирование по $\bar{s}$ в (11.4.19) приводит к выражению

$$\int\limits_{\bar{s}}^{\bar{s}_m}\frac{\bar{s}^{1/2}d\bar{s}}{\sqrt{(\bar{s}^2-\bar{z}^2)(\bar{z}^2\bar{s}^2-1)}}=\frac{1}{\sqrt{2\bar{z}(\bar{z}^2-1)}}\,[F_1(\psi_1,\ k_1)+F_2(\psi_2,\ k_2)], \tag{11.4.20}$$

где F_1 и F_2 — эллиптические интегралы второго рода:

$$F(\psi,\ k)=\int\limits_0^\psi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}},$$

вычисляемые при условии, что

$$\left.\begin{aligned}\sin\psi_1&=\sqrt{1-\frac{\bar{s}_m^2(\bar{z}-1)^2}{(\bar{s}_m^2-1)^2\bar{z}}}, & k_1&=\frac{\bar{z}+1}{\sqrt{2(\bar{z}^2+1)}};\\ \sin\psi_2&=\sqrt{1-\frac{\bar{s}_m^2(\bar{z}+1)^2}{(\bar{s}_m^2+1)^2\bar{z}}}, & k_2&=\frac{\bar{z}-1}{\sqrt{2(\bar{z}^2+1)}}.\end{aligned}\right\}\qquad(11.4.21)$$

В соответствии с полученным результатом

$$\Delta Y_{\text{кр(т)}}=\frac{\alpha_c^2 r^2 q_\infty\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{2}\,\operatorname{tg}\varepsilon}\int_1^{\bar{s}_m}\frac{(\bar{z}^2-1)^{3/2}}{\bar{z}^3}\left[F_1(\psi_1,\ k_1)+F_2(\psi_2,\ k_2)\right]d\bar{z}.\qquad(11.4.22)$$

Для определения подъемной силы по (11.4.22) необходимо применить численное интегрирование. По найденному значению подъемной силы можно вычислить коэффициент интерференции, используя зависимость (11.3.31):

$$K_\varphi=\frac{\Delta Y_{\text{кр(т)}}\operatorname{tg}\varepsilon}{Y_{\text{кр}\beta}}=\frac{1}{\pi\sqrt{2}(\bar{s}_m-1)^2}\int_1^{\bar{s}_m}\frac{(\bar{z}^2-1)^{3/2}}{\bar{z}^3}\left[F_1(\psi_1,\ k_1)+\right.$$
$$\left.+F_2(\psi_2,\ k_2)\right]d\bar{z}.\qquad(11.4.23)$$

Результаты расчета величины K_φ приведены в табл. 11.3.2 и на графике (см. рис. 11.3.2). По таблице или графику можно найти разность между значениями K_φ для плоской и крестообразной комбинаций, которая характеризует взаимную интерференцию несущих консолей. Наличие вертикальных консолей в крестообразной комбинации снижает эффект интерференции по сравнению с плоской комбинацией и уменьшает коэффициент K_φ.

Используя формулы (11.3.34)—(11.3.38), можно определить положение центра давления на консолях крестообразной комбинации. Соответствующие результаты приведены в табл. 11.3.2. Из сравнения данных для плоской и крестообразной комбинаций видно, что практически центры давлений в обоих случаях совпадают.

Сравнение данных с результатами, полученными при отсутствии крена (см. табл. 11.2.1), показывает, что для сил, вызванных креном, имеет место бо́льшее смещение центра давления, чем для интерференционных сил, возникающих при $\alpha\neq0$, $\beta=0\,(\varphi=0)$.

Полученные зависимости для коэффициентов интерференции и и центров давления позволяют рассчитать коэффициенты сил и моментов, действующих на крестообразную комбинацию (рис. 11.4.1).

При исследовании влияния крена на интерференцию между корпусом и крылом было установлено, что угол крена создает дополнительные асимметричные нагрузки на правую и левую половины корпуса, а также на противоположные консоли и не вызывает, следовательно, дополнительной подъемной боковой силы. Поэтому обтекание корпуса можно рассматривать как результат сложения потоков, получаемых при углах $\alpha=\alpha_c\cos\varphi$ и $\beta=\alpha_c\sin\varphi$. Возникающие при этом силы также суммируются.

В соответствии с этим коэффициент подъемной силы $c_{y\,\text{т},\,\text{кр}}$ (в плоскости угла α) определяется формулой (11.3.40), а коэффициент боковой силы (в плоскости угла β) — аналогичным выражением

$$c_{z1\text{т},\,\text{кр}}=z_{1\text{т},\,\text{кр}}/(q_\infty S_{\text{кр}})=c_{z1\text{т}}+c^{\beta}_{z\text{кр}}(K_{\text{т}}+K_{\text{кр}})\beta, \qquad (11.4.24)$$

где $c_{z1\text{т}}=-c^{\alpha}_{y\text{т}}\beta$, $c^{\beta}_{z\text{кр}}=-c^{\alpha}_{y\text{кр}}$.

Коэффициент момента тангажа в плоскости угла α находят по формуле (11.3.41), а коэффициент момента рыскания (в плоскости угла β) — по аналогичной зависимости

$$m_{y1\text{т},\,\text{кр}}=m_{y1\text{т}}-\{K_{\text{т}}[(c_{\text{ц.д}})_{\beta\text{т}(\text{кр})}\bar{b}_{\text{кр}}+\bar{x}_{\text{кр}}]+$$
$$+K_{\text{кр}}[(c_{\text{ц.д}})_{\beta\text{кр}(\text{т})}\bar{b}_{\text{кр}}+\bar{x}_{\text{кр}}]\}\,c^{\beta}_{z\text{кр}}\beta, \qquad (11.4.25)$$

в которой $m_{y1\text{т}}=-m^{\alpha}_{z\text{т}}\beta$; $(c_{\text{ц.д}})_{\beta\text{т}(\text{кр})}=(c_{\text{ц.д}})_{\alpha\,\text{т}(\text{кр})}$; $(c_{\text{ц.д}})_{\beta\text{кр}(\text{т})}=$ $=(c_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{кр}(\text{т})}$; $c^{\beta}_{z\text{кр}}=-c^{\alpha}_{y\text{кр}}$.

Определив моменты и подъемные силы, можно вычислить соответствующие коэффициенты центра давления для условий обтекания в плоскостях α и β. В рассматриваемом случае аэродинамически симметричной крестообразной комбинации эти коэффициенты одинаковы и будут такими, как для плоской комбинации.

Из сравнения данных для плоской и крестообразной комбинации видно, что практически центры давления дополнительных сил, вызванных креном, в обоих случаях совпадают. Сопоставление с результатами, полученными при отсутствии крена, показывает, что при скольжении имеет место большее смещение центра давления.

Рассмотрим коэффициент подъемной силы в плоскости угла α_c. На основании формул (11.3.47)—(11.3.49), (11.4.24) и значения $c^{\beta}_{z\text{кр}}=-c^{\alpha}_{y\text{кр}}$ получим

$$c_{y'\text{т},\text{кр}}=c^{\alpha}_{y\,\text{кр}}(K_{\text{т}}+K_{\text{кр}})\alpha_{\text{c}}. \qquad (11.4.26)$$

Коэффициент боковой силы $c_{z'\text{т},\,\text{кр}}$ в соответствии с (11.4.17) равен нулю. Суммарный момент крена крестообразной комбинации также равен нулю, так как вертикальные консоли создают такой же по величине момент крена, как и горизонтальные, но обратный по направлению.

Напомним, что рассматриваемые в данной главе задачи решаются в рамках линеаризованной теории для тонких тел, аэродинамические характеристики которых не зависят от числа M_∞, и, кроме того, не учитывается эффект от вязкого обтекания. Если же исследуются «нетонкие» тела даже в рамках указанной теории или учитываются вязкие свойства, приводящие к отрыву потока, то будут возникать боковая (подъемная) сила и момент крена, обусловленные перераспределением давления.

Крылья или оперение могут располагаться на корпусе таким образом, что за ними сохраняется хвостовой участок корпуса некоторой длины. В связи с этим необходимо отметить, что для тонких комбинаций длина корпуса за крылом не оказывает влияния на подъемную силу и положение центра давления корпуса. Это объясняется тем, что согласно аэродинамической теории тонкого тела нагрузка, индуцируемая крылом, распространяется на корпус в направлении диаметра DD (см. рис. 11.2.5) и, следовательно, площадь, на которую переносится подъемная сила, расположена непосредственно под консолями (на рис. 11.2.5) заштрихованный участок).

Влияние сжимаемости

Результаты расчета коэффициентов интерференции для комбинаций, включающих тонкие корпуса и консоли, могут быть положены в основу метода определения подъемной силы летательных аппаратов, состоящих из «нетонких» элементов. Этот метод состоит в том, что аэродинамический коэффициент для таких конфигураций вычисляют по коэффициенту интерференции, найденному из теории тонкого тела (см. табл. 11.2.1 и 11.3.2), и аэродинамическому коэффициенту изолированного крыла, взятому по линеаризованной теории. В соответствии с этим методом добавочные коэффициенты подъемной силы, обусловленные интерференцией,

$$\Delta c_{y\,\text{кр(т)}} = K_{\text{кр}} c_{y\,\text{кр}}; \quad \Delta c_{y\,\text{т(кр)}} = K_{\text{т}} c_{y\,\text{кр}}. \qquad (11.4.27)$$

Здесь $c_{y\text{кр}}$ определяется с учетом влияния числа M_∞ по линеаризованной теории обтекания крыла.

Коэффициенты интерференции можно вычислять до значений $M_\infty \approx 1 \div 1{,}5$ по приведенным выше соотношениям без учета сжимаемости, принимая во внимание их изменение в зависимости от сужения консолей крыла, толщины пограничного слоя и места расположения по длине корпуса.

По мере возрастания скоростей обтекания все в большей мере проявляется зависимость интерференции от сжимаемости. Эта зависимость может быть выражена, в частности, через изменение толщины вытеснения пограничного слоя $\bar{\delta}^*$ в (11.2.76) от числа M_∞ в соответствии с (12.6.23′).

На коэффициент интерференции также оказывает непосредственное влияние сжимаемость, которую можно учесть при помощи поправочного множителя

$$\nu_{м} = K_{кр}/(K_{кр})_{теор} = K_{т}/(K_{т})_{теор} = e^{0,05(1-\mathbf{M}_{\infty})}, \qquad (11.4.28)$$

пригодного для $\mathbf{M}_{\infty} \leqslant 5$. При помощи (11.4.28) уточняются значения коэффициентов интерференции (11.2.78):

$$K_{кр} = (K_{кр})_{теор}\nu_{\eta}\nu_{п.с}\nu_{l}\nu_{м};\ K_{т} = (K_{т})_{теор}\nu_{\eta}\nu_{п.с}\nu_{l}\nu_{м}. \qquad (11.4.29)$$

Ранее было отмечено, что для тонких комбинаций длина корпуса за крылом не оказывает влияния на подъемную силу и положение центра давления. Однако для «нетонких» комбинаций такое влияние может оказаться существенным.

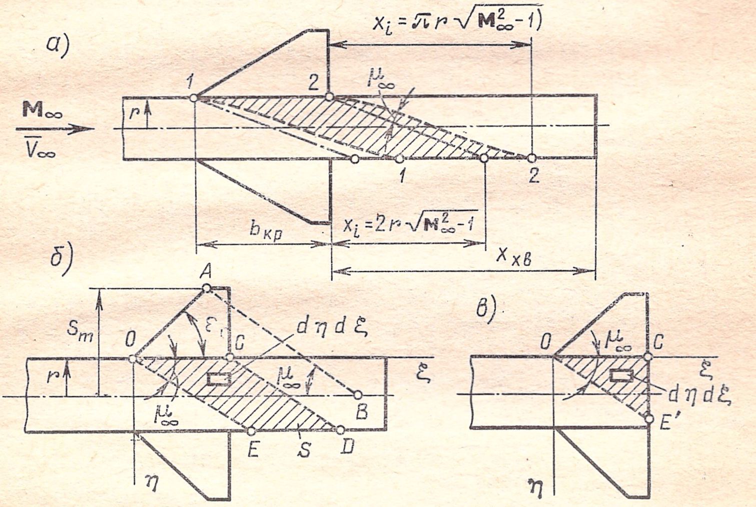

а)
$x_i = \pi r\sqrt{\mathbf{M}_{\infty}^2 - 1)}$
1
2
μ_{∞}
$\mathbf{M}_{\infty}$
$\overline{V_{\infty}}$
r
1
2
$b_{кр}$
$x_i = 2r\sqrt{\mathbf{M}_{\infty}^2 - 1}$
$x_{хв}$
б)
A
S_m
0
ε
C
$d\eta\, d\xi$
r
μ_{∞}
ξ
μ_{∞}
B
E
S
D
η
в)
0
μ_{∞}
C
ξ
$d\eta\, d\xi$
E'
η

Рис. 11.4.2. Область влияния крыла на корпус в случае «нетонкой» конфигурации, обтекаемой сверхзвуковым линеаризованным потоком:

а, б — плоские модели конфигураций с хвостовой частью соответственно с кривыми (спиральными) и прямыми линиями Маха; *в* — модель без хвостовой части с прямыми линиями Маха

В отличие от тонкой конфигурации, для которой нагрузка, индуцируемая крылом, распространяется на участок корпуса, расположенный непосредственно под крылом, в случае «нетонкого» тела волны возмущения, идущие от крыла, распространяются на некоторую область корпуса за этим крылом. Для каждой консоли эта область расположена между винтовыми линиями *1—1* и *2—2*, выходящими из начала и конца бортовой хорды и пересекающими образующие корпуса под углом Маха $\mu_{\infty} = \operatorname{arcctg}\sqrt{\mathbf{M}_{\infty}^2 - 1}$ (рис. 11.4.2). Упрощенно такую область можно рассматривать как участок плоской поверхности, ограниченной на корпусе прямыми линиями Маха, выходящими из точек передней и задней кромок крыла (на рис. 11.4.2 *а* линии *1—1*, *2—2*). Если длина корпуса $x_{\text{хв}}$ за крылом достаточно велика $\left(x_{\text{хв}} > x_i = 2r\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}\right)$, то эффект интерференции будет наибольшим и, следовательно, индуцируемая крылом подъемная сила переносится на корпус полностью. В случае короткого хвостового участка $(x_{\text{хв}} < x_i)$ часть этой силы не реализуется, так как размеры области переноса подъемной силы на корпусе сокращаются. В результате коэффициент интерференции $K_{\text{т}}$ уменьшается. Его значение можно вычислить при помощи формулы

$$K_{\text{т}} = (K_{\text{т}})_{\text{теор}} \nu_\eta \nu_{\text{п.с}} \nu_l \nu_{\text{м}} F, \tag{11.4.30}$$

где

$$F = 1 - d\,[\Phi_1(z_1) - \Phi_2(z_2)], \tag{11.4.31}$$

а $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ — функции Лапласа—Гаусса, определяемые из соответствующих таблиц по аргументам:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{b_{\text{кр}} + x_{\text{хв}}}{x_i}\left[2\left(4 + 1/\eta_{\text{кр}}\right)\left(1 + 8r_m^2\right)\right]^{1/2}, \\ z_2 &= z_1 \frac{x_{\text{хв}}}{b_{\text{кр}} + x_{\text{хв}}}. \end{aligned}\right\} \tag{11.4.32}$$

Параметр d в (11.4.31)

$$d = 0{,}866\left[\left(\frac{b_{\text{кр}}}{x_i}\right)^2 \left(4 + 1/\eta_{\text{кр}}\right)\left(1 + 8r_m^2\right)\right]^{-1/2}. \tag{11.4.32$'$}$$

В приведенных зависимостях величина x_i может выбираться равной $x_i = 2r\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}$ или (для несколько большей точности расчетов) $x_i = \pi r\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}$ (в предположении спиральной линии Маха).

Коэффициент интерференции $K_{\text{т}}$, координату центра давления на корпусе с учетом влияния сжимаемости, длину хвостового участка корпуса и сужение консоли можно определить непосредственно, если рассмотреть область переноса подъемной силы в виде участка плоской поверхности (рис. 11.4.2).

Здесь течение рассчитывают, как поток около изолированного треугольного крыла полубесконечного размаха. В соответствии с (8.3.31) перепад коэффициента давления, индуцированного крылом со сверхзвуковой передней кромкой на участке между линиями Маха, исходящими из начала и конца корневой хорды (рис. 11.4.3, заштрихованная область), равен

$$\Delta\bar{p} = \bar{p}_{\text{н}} - \bar{p}_{\text{в}} = \frac{4\alpha_{\text{кр}} \operatorname{tg}\varepsilon}{\pi\sqrt{\alpha'^2 \operatorname{tg}^2\varepsilon - 1}} \arccos\frac{1 + \alpha'^2(\eta/\xi)\operatorname{tg}\varepsilon}{\alpha'\left[\operatorname{tg}\varepsilon + (\eta/\xi)\right]}, \tag{11.4.33}$$

где $\alpha_{\text{кр}}$ — угол атаки крыла; η, ξ — обозначения координат, показанных на рис. 11.4.2 и 11.4.3.

Перепад коэффициента давления, индуцированного крылом с дозвуковой передней кромкой, имеет вид [48]

$$\Delta\bar{p}=\bar{p}_{\text{н}}-\bar{p}_{\text{в}}=\frac{8\alpha_{\text{кр}}(\alpha'\,\text{tg}\,\varepsilon)^{3/2}}{\pi\alpha'(\alpha'\,\text{tg}\,\varepsilon+1)}\cdot\sqrt{\frac{1-(\alpha'\eta)/\xi}{\alpha'[\text{tg}\,\varepsilon+(\eta/\xi)]}}\,. \qquad (11.4.34)$$

Формулы (11.4.33) и (11.4.34) пригодны для условий, при которых линия Маха, выходящая из точки A боковой кромки, проходит за точкой C задней кромки, расположенной на корпусе, т. е. боковая кромка не оказывает влияния на область переноса подъемной силы. Эти условия выполняются (рис. 11.4.3), если

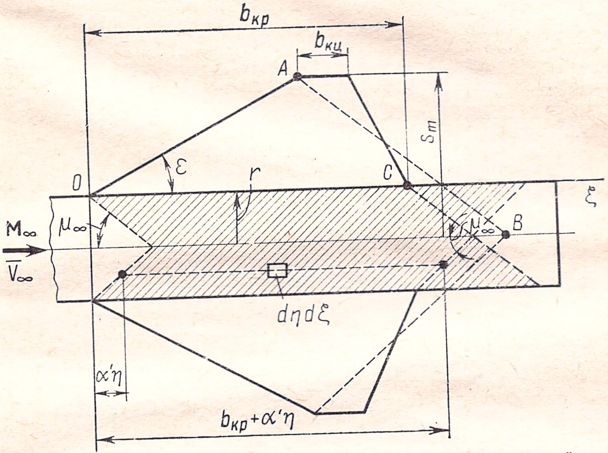


Рис. 11.4.3. Плоская модель для расчета подъемной силы с учетом интерференции между крылом и корпусом

$$\frac{\alpha'(s_m-r)}{b_{\text{кр}}}\left(1+\frac{1}{\alpha'\,\text{tg}\,\varepsilon}\right)\geqslant 1. \qquad (11.4.35)$$

Для комбинации с хвостовым участком элементарная подъемная сила, действующая на участок корпуса под крылом,

$$dY=\Delta\bar{p}q_\infty d\eta d\xi, \qquad (11.4.36)$$

где $d\eta d\xi$ — элементарная площадь участка корпуса (рис. 11.4.3).

Коэффициент подъемной силы, отнесенный к площади двух изолированных консолей, будет равен:

для сверхзвуковой стреловидной кромки

$$\Delta c_{y\text{т(кр)}}=\frac{Y}{q_\infty S_{\text{кр}}}=\frac{2\iint\limits_{(S)}\Delta\bar{p}d\eta d\xi}{(s_m-r)(b_{\text{кр}}+b_{\text{кц}})}=$$

$$=\frac{8\alpha_{\text{кр}}\,\text{tg}\,\varepsilon}{\pi\sqrt{\alpha'^2\,\text{tg}^2\,\varepsilon-1}\,(\bar{s}_m-1)[1+(b_{\text{кц}}/b_{\text{кр}})]\,rb_{\text{кр}}}\times$$

$$\times\int\limits_0^r d\eta\int\limits_{\alpha'\eta}^{b_{\text{кр}}+\alpha'\eta}\arccos\frac{1+(\eta/\xi)\alpha'^2\,\text{tg}\,\varepsilon}{\alpha'[\text{tg}\,\varepsilon+(\eta/\xi)]}d\xi; \qquad (11.3.37)$$

для дозвуковой стреловидной кромки

$$\Delta c_{y\text{т(кр)}} = \frac{16(\alpha'\,\mathrm{tg}\,\varepsilon)^{3/2}\alpha_{\text{кр}}}{(\bar{s}_m - 1)\,[1+(b_{\text{кц}}/b_{\text{кр}})]\,(\alpha'\,\mathrm{tg}\,\varepsilon+1)\,\pi\alpha' r b_{\text{кр}}} \times$$

$$\times \int\limits_0^r d\eta \int\limits_{\alpha'\eta}^{b_{\text{кр}}+\alpha'\eta} \sqrt{\frac{1-\alpha'(\eta/\xi)}{\alpha'[\mathrm{tg}\,\varepsilon+(\eta/\xi)]}}\,d\xi. \qquad (11.4.38)$$

Для конфигурации без хвостовой части корпуса за крылом подъемную силу следует рассчитывать при помощи тех же формул (11.4.37), (11.4.38), но с условием, что в качестве верхнего предела второго интеграла следует брать вместо $b_{\text{кр}}+\alpha'\eta$ значение $b_{\text{кр}}$.

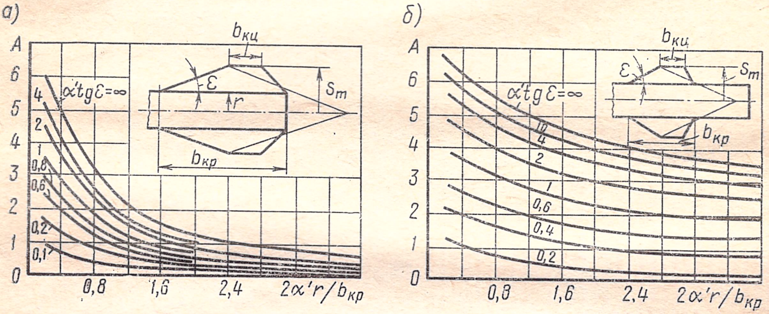


Рис. 11.4.4. Кривые, характеризующие коэффициент интерференции $K_{\text{т}}$, рассчитанный для плоской конфигурации «корпус — крыло» при условии, что $[\alpha'(s_m - r)/b_{\text{кр}}][1+(\alpha'\mathrm{tg}\varepsilon)^{-1}] \geqslant 1$:

а — корпус без хвостовой части; *б* — корпус с хвостовой частью

Коэффициент интерференции $K_{\text{т}}$ для рассматриваемой плоской модели вычисляют по формуле (11.2.11), в которой $c_{y\text{кр}}$ определяют по линеаризованной теории для изолированного крыла (см. § 8.1).

По аналогии с определением подъемной силы можно вычислить продольный момент сил, индуцированных крылом на корпусе, относительно оси, проходящей через вершину консоли, а затем найти соответствующую координату центра давления:

$$(x_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{т(кр)}} = -\frac{\Delta M_{z\text{т(кр)}}}{\Delta Y_{\text{т(кр)}}} = \frac{\int\limits_0^r d\eta \int\limits_{\alpha'\eta}^{b_{\text{кр}}+\alpha'\eta} \xi\Delta\bar{p}\,d\xi}{\int\limits_0^r d\eta \int\limits_{\alpha'\eta}^{b_{\text{кр}}+\alpha'\eta} \Delta\bar{p}\,d\xi}. \qquad (11.4.39)$$

По этой координате определяют коэффициент центра давления:

$$(c_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{т(кр)}} = (x_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{т(кр)}}/b_{\text{кр}}.$$

Соответствующие вычисления произведены для летательных аппаратов с участком корпуса за крылом и без него (см. рис. 11.4.2). Результаты этих вычислений, приведенные на графиках, изображенных на рис. 11.4.4 и 11.4.5, указывают на увеличение коэффициентов интерференции $K_т$ у летательного аппарата с участком корпуса за крылом. Наличие этого участка приводит также к смещению центра давления в более заднее положение, которое слабо зависит от угла стреловидности консоли.

Данные, приведенные на рис. 11.4.4, *а* и 11.4.5, *а*, относятся к комбинации «корпус — крыло» без хвостовой части ($x_{хв}=0$), а на рис. 11.4.4, *б* и 11.4.5, *б* — с участком корпуса, длина которого не меньше x_i $\left(\text{т. е. } x_{хв} \geqslant x_i = 2r\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}\right)$. Для более короткого участка ($x_{хв} < x_i$) коэффициенты интерференции и центра давления могут быть определены при помощи линейной интерполяции:

$$K_т = K_{т0} + (K_{тi} - K_{т0})\frac{x_{хв}}{x_i}; \qquad (11.4.40)$$

$$(c_{ц.д})_{ат(кр)} = (c_{ц.д})_{ат(кр)0} + [(c_{ч.д})_{ат(кр)i} - (c_{ц.д})_{ат(кр)0}]\frac{x_{хв}}{x_i}, \qquad (11.4.41)$$

где индексы «0» и «*i*» обозначают параметры, соответствующие длинам хвостового участка корпуса $x_{хв}=0$ и $x_{хв}=x_i=2r\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2-1}$; коэффициенты интерференции определяются из общего выражения

$$K = A[\alpha' c^{\alpha}_{y\,кр}(1 + 1/\eta_{кр})(\bar{s}_m - 1)]^{-1}, \qquad (11.4.42)$$

где A находят из графиков (рис. 11.4.4, 11.4.5). Согласно этим графикам с увеличением $\alpha' \mathrm{tg}\,\varepsilon$ возрастает коэффициент интерференции. Противоположный эффект наблюдают при возрастании величины $2\alpha' r/b_{кр}$.

Влияние хвостовой части усиливается по мере роста числа M_∞, так как вследствие увеличения угла конусов Маха все большая площадь переноса оказывается расположенной внутри этих конусов, вершины которых совпадают с точками пересечения задней кромки оперения и образующей корпуса.

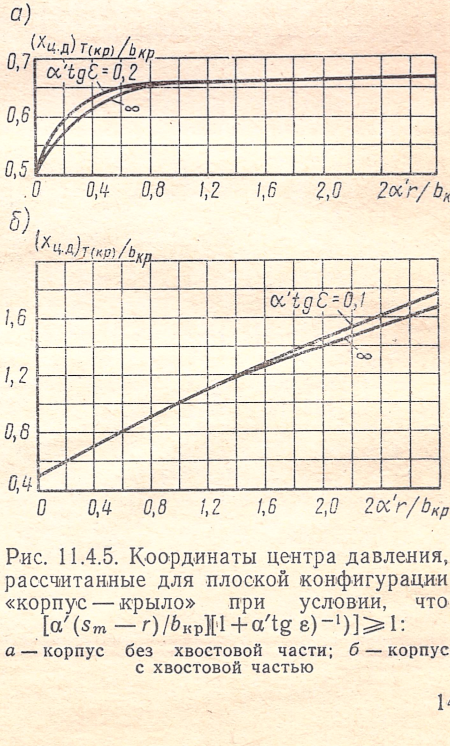


Рис. 11.4.5. Координаты центра давления, рассчитанные для плоской конфигурации «корпус — крыло» при условии, что $[\alpha'(s_m - r)/b_{кр}][1+\alpha'\mathrm{tg}\,\varepsilon)^{-1})] \geqslant 1$:

а — корпус без хвостовой части; *б* — корпус с хвостовой частью

Торможение потока. Аэродинамические расчеты комбинации «корпус — оперение», рассмотренные выше, осуществлялись в предположении, что крыло находится в условиях обтекания потоком, практически не отличающимся от невозмущенного. Соответствующий скоростной напор вычислялся по параметрам этого потока, т. е.

$q = q_\infty = kp_\infty \mathrm{M}_\infty^2/2$. Такому значению скоростного напора соответствовали все аэродинамические коэффициенты.

Действительное обтекание характеризуется торможением потока перед крылом, которое необходимо учитывать при определении аэродинамических параметров. Степень такого торможения можно охарактеризовать средним коэффициентом торможения $k_1 = q/q_\infty$, для которого скоростной напор $q = kp\mathrm{M}_1^2/2$ находят по некоторой осредненной величине числа M_1 возмущенного потока перед крылом. Полагая давления в возмущенном и невозмущенном потоках одинаковыми $(p = p_\infty)$, средний коэффициент торможения можно выразить зависимостью $k_1 = \mathrm{M}_1^2/\mathrm{M}_\infty^2$. Изменение этого коэффициента пренебрежимо мало при дозвуковых скоростях и оказывается существенным в случае обтекания с большими числами M_∞. При этом величина k_1 зависит от характера и интенсивности скачков уплотнения, возникающих перед головной частью.

Если крыло находится на расстоянии $x_{\text{кр}} > (1{,}5 \div 2)x_{\text{мид}}$ от носка головной части, имеющей вид конуса с полууглом при вершине $\beta_{\text{к}} < \beta_{\text{к.кр}}$ (где $\beta_{\text{к.кр}}$ — критическая величина полуугла), то k_1 можно определить из условия, что давление перед крылом $p = p_\infty$. Этому давлению соответствует величина квадрата числа Маха

$$\mathrm{M}_1^2 = \frac{2}{k-1}\left[\left(\frac{p_0'}{p_\infty}\right)^{(k-1)/k} - 1\right], \tag{11.4.43}$$

где p_0' — давление торможения за косым скачком. Отношение p_0'/p_∞ можно принять равным $(p'_0/p_0)(p_0/p_\infty)$, выразив его, как видно, через давление изэнтропического торможения. Обозначив $\nu_0 = p'_0/p_0$, можно написать

$$\frac{p_0'}{p_\infty} = \nu_0\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_\infty^2\right)^{k/(k-1)}.$$

В соответствии с этим

$$k_1 = \frac{\mathrm{M}_1^2}{\mathrm{M}_\infty^2} = \frac{2}{\mathrm{M}_\infty^2 (k-1)} \cdot \left[\nu_0^{(k-1)/k}\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_\infty^2\right) - 1\right]. \tag{11.4.44}$$

Отношение давлений торможения находят при помощи формулы (9.2.26) или приближенного соотношения [13]:

$$\nu_0 = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{(k+1)/(k-1)}\left(\frac{x^2}{1 + [(k-1)/2]\,x^2}\right)^{k/(k-1)}\left(kx^2 - \frac{k-1}{2}\right)^{-k/(k-1)}, \tag{11.4.45}$$

в котором

$$x = 1 - \cos\beta_{\text{к}} + \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}_\infty^2 \sin^2\beta_{\text{к}}\right)^{1/2}. \tag{11.4.46}$$

Если головная часть отличается от конической, то коэффициент торможения можно рассчитывать следующим образом. Вначале находят для заданной головной части по соответствующим аэродинамическим зависимостям коэффициент волнового сопротивления $c_{x\text{в}}$, затем при помощи аппроксимирующей формулы (9.2.31) вычисляют соответствующий угол полураствора $\beta_{\text{к}}$ условной конической поверхности, которой заменяют заданную головную часть. Далее подсчитывают величину $\mathrm{M}_\infty \sin\beta_{\text{к}}$, по которой находят параметры x, ν_0 и коэффициент k_1. Этот коэффициент позволяет уточнить аэродинамические характеристики, вычисляемые с учетом интерференции. Например, коэффициент подъемной силы комбинации «корпус — крыло» будет определяться в виде

$$c_{y\,\text{т,кр}} = c_{y\,\text{т}} + (K_{\text{т}} + K_{\text{кр}})\,c_{y\,\text{кр}}k_1, \tag{11.4.47}$$

где $c_{y\text{кр}}$ целесообразно вычислять по линеаризованной теории. При этом такое вычисление можно производить не по числу M_∞, а по уточненному значению $\mathrm{M}_1 < \mathrm{M}_\infty$.

§ 11.5. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ МЕЖДУ КРЫЛОМ И ОПЕРЕНИЕМ

Общие определения

Если перед оперением, расположенным на корпусе, отсутствуют другие несущие или управляющие поверхности, то интерференцию для оперения и корпуса рассчитывают так же, как и для комбинации «корпус — крыло». В том случае, когда на корпусе перед оперением имеется крыло, при определении аэродинамических характеристик как оперения, так и корпуса следует учитывать дополнительное влияние крыла. Сказанное в одинаковой мере будет относиться и к тому случаю, когда рассматривается схема «утка», при которой впереди крыла находится оперение.

Рассмотрим физическую природу интерференции между оперением и впереди расположенным крылом. Вихревая пелена, сбегающая с крыла и проходящая вблизи оперения, вызывает скос потока, в результате чего уменьшается угол атаки и, как следствие, снижается подъемная сила консолей оперения.

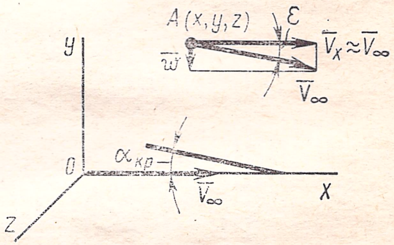


Рис. 11.5.1. Схема образования скоса потока за крылом

Скос потока в любой точке пространства за крылом определяется углом $\varepsilon = -w/V_\infty$, вычисляемым по вертикальной составляющей скорости w, индуцируемой вихревой пеленой, сходящей с крыла (рис. 11.5.1). В гл. VI было показано, что для изолированного крыла угол ε в рассматриваемой точке пространства зависит от геометрических и аэродинамических характеристик крыла. Для комбинации «крыло — корпус» при определении этого угла необходимо учитывать также влияние интерференции. Благодаря ее воздействию крыло, присоединенное к корпусу, сильнее скашивает поток. Такое крыло вследствие интерференции с корпусом обладает большей, чем изолированное крыло, подъемной силой. При возросшем ее значении интенсивнее будет сбегающая с крыла вихревая пелена, индуцирующая за ним бо́льшие скорости и сильнее скашивающая поток.

Предположим, что участок корпуса за крылом имеет постоянный диаметр, поэтому вихревая пелена располагается в плоскости крыла. Как показывают экспериментальные исследования, это предположение может быть с известным приближением отнесено к весьма тонкой комбинации корпуса и крыла. При этих условиях поток за крылом будет параллелен хорде оперения, если крыло и оперение расположены на корпусе вдоль одной образующей и под одинаковыми установочными углами (рис. 11.5.2).

Таким образом, участки оперения с размахом, равным размаху крыла, не будут иметь подъемной силы. Оставшуюся часть консоли оперения с размахом $(s_m)_{\text{оп}}-(s_m)_{\text{кр}}$[$(s_m)_{\text{кр}}$ — размах консоли крыла] следует рассматривать вместе с консолью крыла как единую несущую поверхность с размахом $(s_m)_{\text{оп}}$ (на рис. 11.5.2 поверхности ABF и CDE).

В соответствии со сказанным и согласно (11.4.14) подъемную силу комбинации «корпус — крыло — оперение», включая подъемную силу носовой части корпуса, можно выразить в виде

$$Y_{\text{т,кр,оп}}=2\alpha\pi(s_m^2)_{\text{оп}}q_\infty[1-(r_m^2)_{\text{оп}}+(r_m^4)_{\text{оп}}], \tag{11.5.1}$$

где $(r_m)_{\text{оп}}=r/(s_m)_{\text{оп}}$; $(s_m)_{\text{оп}}>(s_m)_{\text{кр}}$ — полуразмах оперения.

Для оценки влияния интерференции на подъемную силу оперения введем коэффициент эффективности оперения

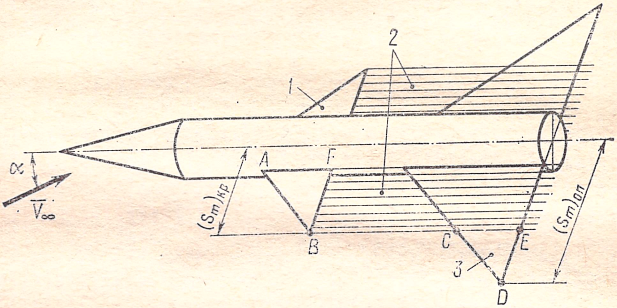


Рис. 11.5.2. Интерференция между оперением и крылом для тонкой комбинации:

1 — крыло; *2* — вихревая пелена; *3* — оперение

$\eta_{\text{оп}}$, определяемый как отношение приращения подъемной силы при установке хвостового оперения на комбинацию «крыло — корпус» к приращению подъемной силы при установке хвостового оперения на изолированный корпус:

$$\eta_{\text{оп}}=(Y_{\text{т,кр,оп}}-Y_{\text{т,кр}})/(Y_{\text{т,оп}}-Y_{\text{т}}), \tag{11.5.2}$$

где в соответствии с (11.4.14)

$$Y_{\text{т,кр}}=2\alpha\pi(s_m^2)_{\text{кр}}q_\infty[1-(r_m^2)_{\text{кр}}+(r_m^4)_{\text{кр}}]. \tag{11.5.3}$$

Принимая во внимание, что подъемная сила комбинации «корпус — оперение» $Y_{\text{т,оп}}$ в (11.5.2) определяется, как и $Y_{\text{т,кр,оп}}$, по формуле (11.5.1), а величина $Y_{\text{т}}=2\pi r^2\alpha q_\infty$, коэффициент эффективности оперения

$$\eta_{\text{оп}}=\frac{(r_m^{-2})_{\text{оп}}[1+(r_m^4)_{\text{оп}}]-(r_m^{-2})_{\text{кр}}[1+(r_m^4)_{\text{кр}}]}{(r_m^{-2})_{\text{оп}}[1-(r_m^2)_{\text{оп}}]^2}. \tag{11.5.4}$$

Согласно принятой гипотезе, в том случае, когда размах оперения меньше или равен размаху крыла, подъемная сила оперения в результате интерференции исчезает, а коэффициент эффективности равен нулю.

Найденный коэффициент эффективности можно рассматривать как предельное значение, соответствующее наиболее неблагоприятному случаю обтекания, когда вихревая пелена, сбегающая с задней кромки крыла, является плоской и совпадающей с плоскостью консолей и их подъемная сила по этой причине является наименьшей. Однако в практических случаях такой неблагоприятный эффект интерференции будет меньше, так как, во-первых, вихревая пелена не будет плоской, а сворачивается в вихревые жгуты при подходе к оперению, во-вторых, направление вихрей ближе к направлению скорости набегающего потока, чем к направлению плоскости хорд оперения, поэтому вихри, как правило, не лежат в этой плоскости, а располагаются в зависимости от знака угла атаки выше или ниже оперения.

Дозвуковые скорости

При расчетах интерференции между крылом и оперением принимают с известным приближением угол скоса потока постоянным по размаху и равным его среднему значению, определяемому по (6.4.23).

Скос потока за крылом, имеющим такой же установочный угол, как и оперение, обусловливает уменьшение эффективного угла атаки оперения, который вычисляется по выражению

$$\alpha_{\text{э.г.о}} = \alpha - \varepsilon. \qquad (11.5.5)$$

В соответствии с этим коэффициент подъемной силы оперения

$$c_{y\,\text{г.о}} = c^{\alpha}_{y\,\text{г.о}}\,(\alpha - \varepsilon), \qquad (11.5.6)$$

где $c^{\alpha}_{y\,\text{г.о}} = (\partial c_y/\partial\alpha)_{\text{г.о}}$ — производная по углу атаки α от коэффициента $c_{y\text{г.о}}$ изолированного горизонтального оперения.

При установке крыльев и оперения на корпусе необходимо учесть изменение их подъемной силы вследствие интерференции между корпусом. Коэффициент подъемной силы крыла c_y в (6.4.23) следует определять с учетом изменения под влиянием интерференции с корпусом эффективного угла атаки сечений согласно (11.1.6). Для упрощения расчетов можно воспользоваться понятием о среднем по размаху крыла значении эффективного угла атаки, который определяется в соответствии с правилом осреднения по формуле

$$\overline{\alpha}_{\text{э.кр}} = \frac{\alpha}{(l_{\text{кр}}/2) - r}\int\limits_{r}^{l_{\text{кр}}/2}(1 + r^2/z^2)\,dz = \alpha\,(1 + 2r/l_{\text{кр}}). \qquad (11.5.7)$$

Соответственно для оперения

$$\overline{\alpha}_{\text{э.оп}} = \alpha\,[1 + (2r/l_{\text{оп}})]. \qquad (11.5.7')$$

Таким образом, коэффициент подъемной силы оперения в соответствии с (11.5.7′)

$$c_{y\,\text{г.о}} = c^{\alpha}_{y\,\text{г.о}}\,(\overline{\alpha}_{\text{э.оп}} - \varepsilon); \qquad (11.5.6')$$

здесь $\varepsilon = \varepsilon_{\text{ср}}$ определяется из выражения (6.4.23), в котором $c_y = c_{y\,\text{кр}} = c^{\alpha}_{y\,\text{кр}} \alpha_{\text{э.кр}}$, где $c^{\alpha}_{y\,\text{кр}} = (\partial c_y / \partial \alpha)_{\text{кр}}$ — производная от коэффициента подъемной силы изолированного крыла по углу атаки.

Сверхзвуковые скорости

При исследовании интерференции оперения с крылом можно исходить из упрощенной вихревой модели комбинации «корпус — крыло» (рис. 11.5.3). Согласно этой модели, каждая из консолей заменена присоединенным вихрем интенсивностью Γ_0 и свободным вихрем той же интенсивности, сбегающим с задней кромки консоли. Так как корпус обладает несущей способностью, то он также должен быть заменен участком присоединенного вихря и вихрем, сбегающим вниз по потоку. Эти вихри с интенсивностью Γ_0 называют **сопряженными**. Расположение сопряженных свободных вихрей соответствует **правилу сопряженных радиусов** [31], согласно которому

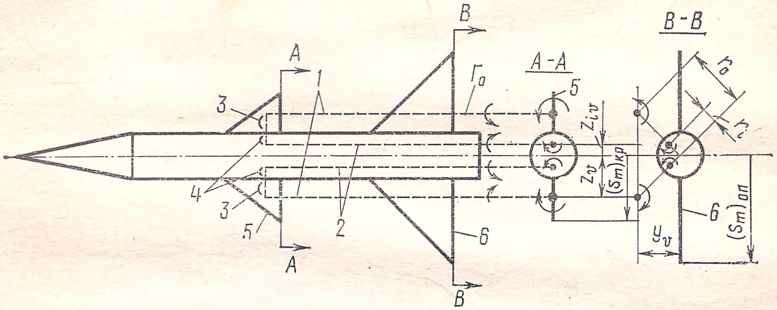


Рис. 11.5.3. Вихревая модель комбинации «корпус — крыло»:

1 — сбегающие (свободные) вихри для консоли; *2* — сбегающие (сопряженные) вихри для корпуса; *3* — присоединенные вихри для консоли; *4* — присоединенные (сопряженные) вихри для корпуса; *5* — крыло; *6* — оперение

$$r_i = r^2 / r_0. \tag{11.5.8}$$

Правый сопряженный вихрь имеет равную с правым свободным (внешним) вихрем величину интенсивности Γ_0, но обратное направление вращения; то же относится и к левым вихрям. Таким образом, рассматриваемая вихревая модель комбинации «корпус — крыло» включает в себя две пары П-образных вихрей с интенсивностью Γ_0.

Согласно формуле Жуковского (6.3.22), подъемная сила консолей при наличии корпуса

$$\Delta Y_{\text{кр(т)}} = 2\rho_\infty V_\infty \Gamma_0 (z_v - r), \tag{11.5.9}$$

а подъемная сила корпуса при наличии крыла

$$Y_{\text{т}} + \Delta Y_{\text{т(кр)}} = 2\rho_\infty V_\infty \Gamma_0 (r - z_{iv}), \tag{11.5.10}$$

где z_v — поперечная координата свободного (свернувшегося) вихря, совпадающая с центром тяжести вихревой пелены; z_{iv} — координата сопряженного вихря; в соответствии с (11.5.8)

$$z_{iv} = r^2/z_v; \tag{11.5.11}$$

величина $z_v - r$ определяет длину присоединенного вихря (несущей вихревой линии) на консоли; $r - z_{iv}$ — длина участка сопряженного присоединенного вихря внутри корпуса.

Подъемная сила комбинации «корпус — крыло» (без подъемной силы носовой части корпуса)

$$Y_{\text{т,кр}} - Y_{\text{т}} = \Delta Y_{\text{т(кр)}} + \Delta Y_{\text{кр(т)}} = 2\rho_\infty V_\infty \Gamma_0 (z_v - r^2/z_v). \tag{11.5.12}$$

Эта подъемная сила определяется также по (11.5.3) без учета подъемной силы корпуса $2\pi\alpha r^2 q_\infty$. Следовательно,

$$2\rho_\infty V_\infty \Gamma_0 (z_v - r^2/z_v) = 2\pi\alpha (s_m^2)_{\text{кр}} q_\infty [1 - (r_m^2)_{\text{кр}} + (r_m^4)_{\text{кр}}] - 2\pi\alpha r^2 q_\infty =$$
$$= 2\pi\alpha (s_m^2)_{\text{кр}} [1 - (r_m^2)_{\text{кр}}]^2 q_\infty. \tag{11.5.13}$$

Рассмотрим выражение (11.5.2). Входящие в него значения подъемной силы можно представить в следующем виде:

$$Y_{\text{т,кр,оп}} = Y_{\text{т}} + \Delta Y_{\text{т(кр)}} + \Delta Y_{\text{кр(т)}} + \Delta Y_{\text{т(оп)}} + \Delta Y_{\text{оп(т)}} + \Delta Y_{\text{т(оп)в}} + \Delta Y_{\text{оп(т)в}}$$

(две последние составляющие с индексом «в» обусловлены влиянием вихрей). Также можно написать:

$$Y_{\text{т,кр}} = Y_{\text{т}} + \Delta Y_{\text{т(кр)}} + \Delta Y_{\text{кр(т)}}; \quad Y_{\text{т,оп}} = Y_{\text{т}} + \Delta Y_{\text{т(оп)}} + \Delta Y_{\text{оп(т)}}.$$

Поэтому

$$\eta_{\text{оп}} = 1 + (\Delta Y_{\text{т(оп)в}} + \Delta Y_{\text{оп(т)в}})/(\Delta Y_{\text{т(оп)}} + \Delta Y_{\text{оп(т)}}); \tag{11.5.14}$$

отсюда

$$\Delta Y_{\text{т(оп)в}} + \Delta Y_{\text{оп(т)в}} = \Delta Y_{\text{(т,оп)в}} = [\Delta Y_{\text{т(оп)}} + \Delta Y_{\text{оп(т)}}](\eta_{\text{оп}} - 1),$$

или

$$\Delta Y_{\text{(т,оп)в}} = Y_{\text{оп}} (K_{\text{кр}} + K_{\text{т}})(\eta_{\text{оп}} - 1). \tag{11.5.15}$$

Разность $\eta_{\text{оп}} - 1$ получим из выражения (11.5.4) в следующем виде:

$$\eta_{\text{оп}} - 1 = -\frac{(\bar{s}_m^2)_{\text{кр}}}{(\bar{s}_m^2)_{\text{оп}}} \frac{[1 - (r_m^2)_{\text{кр}}]^2}{[1 - (r_m^2)_{\text{оп}}]^2}. \tag{11.5.16}$$

С учетом (11.5.13)

$$\eta_{\text{оп}} - 1 = -\frac{2\Gamma_0 [(z_v/r) - (r/z_v)]}{\pi\alpha r V_\infty (\bar{s}_m^2)_{\text{оп}} [1 - (r_m^2)_{\text{оп}}]^2}. \tag{11.5.17}$$

После подстановки (11.5.17) и (11.5.15) и замены $K_{\text{кр}} + K_{\text{т}}$ величиной $[(\bar{s}_m)_{\text{оп}} + 1]^2/(\bar{s}_m^2)_{\text{оп}}$ [см. (11.2.61)] получим

$$\Delta Y_{\text{(т,оп)в}} = -\frac{2\Gamma_0 [z_v - (r^2/z_v)] Y_{\text{оп}}}{\pi\alpha V_\infty [(s_m)_{\text{оп}} - r]^2}. \tag{11.5.18}$$

В числителе и знаменателе этой формулы радиусы r следует принять равными их значениям соответственно в окрестности крыла и оперения, т. е. $r = r_{кр}$ и $r = r_{оп}$. Вспомним, что эта формула получена исходя из предположения, что вихревая пелена, сбегающая с крыльев, и соответствующие свободные вихри расположены в плоскости оперения и участок этого оперения, покрытый сбегающей вихревой пеленой, полностью теряет свои несущие свойства, т. е. подъемная сила на этом участке равна нулю. В действительности это предположение, как уже указывалось, не является полностью оправданным, и, следовательно, формулу (11.5.18) надо рассматривать как зависимость, определяющую лишь порядок величины $\Delta Y_{(т,\,оп)в}$. Чтобы уточнить зависимость (11.5.18), введем в нее поправочный коэффициент $\varphi(y_v)$, учитывающий влияние на подъемную силу $\Delta Y_{(т,оп)в}$ вертикальной координаты y_v свободного вихря (рис. 11.5.3). С учетом этого коэффициента

$$\Delta Y_{(т,оп)в} = -\frac{4\varphi(y_v)\,[z_v - (r^2/z_v)]}{(s_m)_{оп} - r} \cdot \frac{\Gamma_0}{2\pi V_\infty\,[(s_m)_{оп} - r]} \cdot \frac{Y_{оп}}{\alpha}.$$

Здесь второй сомножитель определяет в безразмерной форме интенсивность вихря, а третий — подъемную силу изолированного оперения, приходящуюся на градус угла атаки. Первый сомножитель, включающий коэффициент $\varphi(y_v)$, зависит от положения вихря и не зависит от его интенсивности. Этот сомножитель называют коэффициентом интерференции и обозначают $i_{оп}$.

Вводя этот коэффициент и переходя от r к радиусу корпуса оперения $r_{оп}$, напишем

$$\Delta Y_{(т,оп)в} = i_{оп}\,\frac{\Gamma_0}{2\pi V_\infty\,[(s_m)_{оп} - r_{оп}]} \cdot \frac{Y_{оп}}{\alpha}. \qquad (11.5.19)$$

В соответствии с (11.5.9) циркуляция

$$\Gamma_0 = \Delta Y_{кр(т)}/[2\rho_\infty V_\infty (z_v - r_{кр})]. \qquad (11.5.20)$$

Заменяя здесь $\Delta Y_{кр(т)}$ в соответствии с (11.2.5), получим

$$\Gamma_0 = K_{кр} Y_{кр}/[2\rho_\infty V_\infty (z_v - r_{кр})].$$

Так как

$$Y_{кр} = (\partial c_y/\partial\alpha)_{кр}\,\alpha\,(\rho_\infty V_\infty^2/2)\,S_{кр},$$

то

$$\Gamma_0 = K_{кр}\,(\partial c_y/\partial\alpha)_{кр}\,\alpha S_{кр} V_\infty/[4(z_v - r_{кр})]. \qquad (11.5.21)$$

Примем в (11.5.19)

$$\Delta Y_{(т,оп)в} = (\Delta c_y)_{(т,оп)в}\, q_\infty S,\quad Y_{оп} = (\partial c_y/\partial\alpha)_{оп}\,\alpha q_\infty S_{оп}, \qquad (11.5.22)$$

где S — некоторая характерная площадь, $S_{оп}$ — площадь в плане изолированного оперения, которая связана с удлинением $\lambda_{оп}$ формулой

$$\lambda_{оп} = 4\,[(s_m)_{оп} - r_{оп}]^2/S_{оп}. \qquad (11.5.23)$$

С учетом (11.5.21)—(11.5.23) зависимость (11.5.19) преобразуется к выражению, определяющему коэффициент подъемной силы хвостового участка:

$$(\Delta c_y)_{(\text{т,оп})\text{в}} = i_{\text{оп}} \frac{K_{\text{кр}}\alpha\,(\partial c_y/\partial\alpha)_{\text{кр}}\,(\partial c_y/\partial\alpha)_{\text{оп}}\,[(s_m)_{\text{оп}} - r_{\text{оп}}]\,(S_{\text{кр}}/S)}{2\pi\lambda_{\text{оп}}\,(z_v - r_{\text{кр}})}. \qquad (11.5.24)$$

Чтобы применить формулу (11.5.24), следует знать горизонтальную координату z_v свободного вихря и, кроме того, его вертикальную координату y_v (рис. 11.5.4). Обе эти координаты определяют коэффициент интерференции $i_{\text{оп}}$.

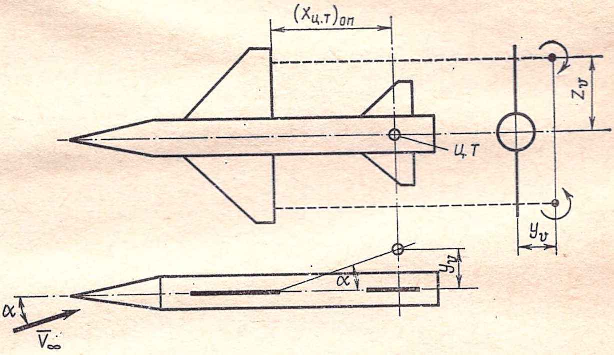


Рис. 11.5.4. К определению расположения сбегающего свободного вихря

Для определения координаты z_v свернувшегося (свободного) вихря воспользуемся вихревой моделью комбинации «корпус — крыло». Рассмотрим вихревую пелену, сбегающую с консолей крыла, и вычислим циркуляцию по элементарному контуру в виде прямоугольника $ABCD$ с измерениями δ_y и δ_z, выбранному у задней кромки крыла. Из рис. 11.5.5 видно, что

$$\delta\Gamma_{ABCD} = \delta\Gamma_{AB} + \delta\Gamma_{BC} + \delta\Gamma_{CD} + \delta\Gamma_{DA} = v\delta y - w_{\text{в}}\delta z - v\delta y + w_{\text{н}}\delta z = (-w_{\text{в}} + w_{\text{н}})\,\delta z.$$

Циркуляция принята положительной для вихря, имеющего вращение против часовой стрелки. Пусть потенциал на верхней стороне будет $\varphi_{\text{в}}$, а на нижней $\varphi_{\text{н}}$. Тогда

$$\delta\Gamma_{ABCD} = [(\partial\varphi_{\text{н}}/\partial z) - (\partial\varphi_{\text{в}}/\partial z)]\,\delta z.$$

Так как потенциалы $\varphi_{\text{н}}$ и $\varphi_{\text{в}}$ у задней кромки определяются для условий $y=0$ и, следовательно, зависят только от z, то можно перейти к полным производным и написать

$$d\Gamma/dz = d\,(\varphi_{\text{н}} - \varphi_{\text{в}})/dz, \qquad (11.5.25)$$

откуда распределение циркуляции

$$\Gamma = \varphi_{\text{н}} - \varphi_{\text{в}}. \qquad (11.5.26)$$

Здесь индекс $ABCD$ опущен. Таким образом, зная потенциал скоростей вдоль задней кромки консолей, можно рассчитать интенсивность вихревой пелены на единицу размаха, т. е. производную $d\Gamma/dz$, а также распределение циркуляции. Этот потенциал можно определить из выражения (11.2.20′), приняв в нем $y=0$:

$$\varphi_\alpha=\varphi_{\text{в,н}}=\pm V_\infty\alpha\left[(s_m+r^2/s_m)^2-(z+r^2/z)^2\right]^{1/2}, \qquad (11.5.27)$$

где знак «+» соответствует потенциалу $\varphi_\text{в}$ на верхней поверхности, а знак «—» — потенциалу $\varphi_\text{н}$ на нижней поверхности.

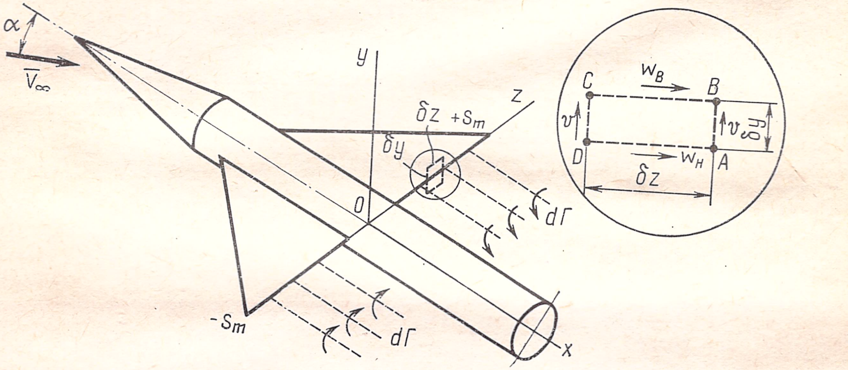


Рис. 11.5.5. Схема образования вихревой пелены, сбегающей с консоли крыла

В соответствии с (11.5.26)

$$\Gamma=2\alpha V_\infty\left[(s_m+r^2/s_m)^2-(z+r^2/z)^2\right]^{1/2}. \qquad (11.5.28)$$

Циркуляцию в корневом сечении получим при $z=r$:

$$\Gamma_0=2\alpha V_\infty\left[(s_m+r^2/s_m)^2-4r^2\right]^{1/2}. \qquad (11.5.29)$$

Отношение циркуляций

$$\Gamma/\Gamma_0=\left[\left(s_m^2z^2-r^4\right)\left(s_m^2-z^2\right)\right]^{1/2}/\left[z\left(s_m^2-r^2\right)\right]. \qquad (11.5.30)$$

Если принять, что вихревая пелена заменена вихрем с интенсивностью, равной циркуляции Γ_0 в корневом сечении, то

$$\int_r^{s_m}\Gamma dz=\Gamma_0(z_v-r), \qquad (11.5.31)$$

где интеграл представляет собой площадь, ограниченную кривой циркуляции для консолей, а $\Gamma_0\,(z_v—r)$ — величина, равная этой площади.

Внося в (11.5.31) значение Γ из (11.5.30), получим

$$\int_r^{s_m}\left[\left(s_m^2z^2-r^4\right)\left(s_m^2-z^2\right)\right]^{1/2}dz/\left[z\left(s_m^2-r^2\right)\right]=z_v-r. \qquad (11.5.32)$$

Введем безразмерный параметр:

$$(z_v - r)/(s_m - r) = \int\limits_{r_s}^{1} \left[\left(\bar{z}^2 - r_s^4\right)\left(1 - \bar{z}^2\right)\right]^{1/2} \bar{z}^{-1} d\bar{z} / \left[(1 - r_s)^2 (1 + r_s)\right], \tag{11.5.33}$$

где $\bar{z} = z/s_m$, $r_m = r/s_m$.

Интеграл определяется численными методами. Результаты численного интегрирования следующие:

$r_m = r/s_m$ . . .	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$(z_v - r)/(s_m - r)$	0,786	0,769	0,760	0,757	0,757	0,759	0,763	0,768	0,774	0,780	0,786

По этим данным, параметр $(z_v - r)/(s_m - r)$ находится в функции $r_m = r/s_m$. При этом размах консоли и радиус корпуса принимают равными соответственно $s_m = (s_m)_{\text{кр}}$ и $r = r_{\text{кр}}$.

Полученные координаты z_v определяют боковое положение вихря на крыле. Исследования показывают, что аналогичная координата вихря у оперения отличается от найденного значения z_v на крыле. Однако это различе невелико, так как вихри весьма незначительно смещаются в боковом направлении. Поэтому с достаточной степенью точности в расчетах интерференции значение z_v у оперения берется таким, как на крыле. Это позволяет более точно учесть влияние на координату z_v числа M_∞, сужения $\eta_{\text{кр}} = b_{\text{кр}}/b_{\text{кц}}$, удлинения $\lambda_{\text{кр}} = 2(s_m - r)_{\text{кр}}/b_{\text{ср}}$ и угла стреловидности (обычно принимается угол стреловидности $\varkappa_{1/2}$ прямой, соединяющей середины хорд). Как показывают расчеты, полученные результаты более соответствуют данным аэродинамической теории тонкого тела для консоли, у которой $\eta_{\text{кр}} = 2$, $\lambda_{\text{кр}} \operatorname{tg} \varkappa_{1/2} = 0$ и $2/3$.

Для определения поперечной координаты y_v сбегающих вихрей у оперения будем основываться на допущении, что эти вихри совпадают с направлением потока. Если также принять, что координата расположена над центром тяжести площади оперения, рассчитанной с учетом части площади, занятой корпусом, то в соответствии с рис. 11.5.4

$$y_v = \alpha (x_{\text{ц.т}})_{\text{оп}}, \tag{11.5.34}$$

где $(x_{\text{ц.т}})_{\text{оп}}$ — расстояние от задней кромки крыла до центра тяжести площади оперения.

Коэффициент интерференции

Рассмотрим вопрос об определении коэффициента интерференции. Из (11.5.19) следует, что

$$i_{\text{оп}} = \frac{\Delta Y_{(\text{т,оп})\text{в}}}{Y_{\text{оп}}} \cdot \frac{2\pi\alpha V_\infty \left[(s_m)_{\text{оп}} - r_{\text{оп}}\right]}{\Gamma_0}. \tag{11.5.35}$$

В соответствии с этим выражением коэффициент интерференции можно рассматривать как отношение двух безразмерных величин, одна из которых представляет собой отношение подъемных сил $\Delta Y_{(\text{т,оп})\text{в}}/Y_{\text{оп}}$, а другая — безразмерную циркуляцию, характеризующую интенсивность сбегающего вихря. Тот факт, что коэффициент $i_{\text{оп}}$ зависит от отношения подъемных сил, позволяет применить простейшие методы для определения $i_{\text{оп}}$, даже если эти методы не дают точных величин абсолютных значений $\Delta Y_{(\text{т,оп})\text{в}}$ или $Y_{\text{оп}}$, а позволяют найти правильное их отношение. Здесь имеем известную аналогию между коэффициентами интерференции $K_{\text{кр}}$, $K_{\text{т}}$, с одной стороны, и коэффициентом $i_{\text{оп}}$ — с другой. Как уже указывалось, коэффициенты $K_{\text{кр}}$, $K_{\text{т}}$, представляющие собой отношения соответствующих подъемных сил, с хорошей точностью определяются по аэродинамической теории тонкого тела, что дало возможность вычислять абсолютные величины подъемной силы с учетом интерференции некоторых комбинаций.

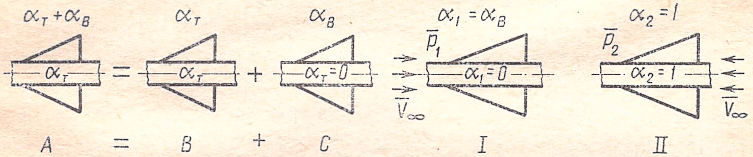


Рис. 11.5.6. К расчету эффективности оперения по методу обратимости для комбинации «корпус — оперение»:

I — комбинация в прямом потоке; *II* — комбинация в обращенном потоке

Имея в виду сказанное, воспользуемся выводами аэродинамической теории обтекания тонких тел для определения отношения $\Delta Y_{(\text{т,оп})\text{в}}/Y_{\text{оп}}$ и соответствующего коэффициента $i_{\text{оп}}$ с тем, чтобы использовать полученные данные для вычисления интерференции хвостовой части, принадлежащей нетонкой комбинации.

Для определения подъемной силы $\Delta Y_{(\text{т,оп})\text{в}}$ применим **метод обратимости потока**, который уже был рассмотрен на примере исследования обтекания тонкого крыла прямым и обратным потоками. В данном случае при помощи основного соотношения этого метода, найденного в § 8.13, устанавливается зависимость между аэродинамическими характеристиками комбинации «корпус—крыло—оперение» при ее обтекании в противоположных направлениях.

Пусть оперение установлено по отношению к оси корпуса под нулевым углом атаки, а комбинация обтекается под углом атаки $\alpha_{\text{т}}$. Вихри, сбегающие с крыла, вызывают скос потока у оперения на угол $-\varepsilon=\alpha_{\text{в}}$, так что эффективный угол атаки консолей оперения будет $\alpha_{\text{т}}+\alpha_{\text{в}}$. При этом поток около комбинации *A*, состоящей из корпуса и оперения (рис. 11.5.6), может быть представлен как сложное течение, образующееся в результате сложения потоков около аналогичных комбинаций *B* и *C* в соответствии с формулой $A=B+C$. В комбинации *B* корпус и оперение имеют одинаковый угол атаки $\alpha_{\text{т}}$; в комбинации *C* корпус не отклонен ($\alpha_{\text{т}}=0$), а оперение обтекается под углом атаки $\alpha_{\text{в}}$, который вызван вихрями.

Подъемную силу комбинации *C* определим по методу обратимости потока. Примем для прямого потока (рис. 11.5.6) в соответствии с обозначениями формулы (8.13.8′) условия:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1=\alpha_{\text{т}}=0 \text{ — на площади } S_{\text{т}}, \text{ занятой частью корпуса под оперением;}\\ \alpha_1=\alpha_{\text{в}} \text{ — на площади } S_{\text{оп}} \text{ консолей.}\end{array}\right\}\quad(11.5.36)$$

Для обращенного потока (рис. 11.5.6) примем, что корпус и оперение находятся под единичным углом атаки, т. е.

$$\alpha_2=1 \text{ — на площади } S_{\text{т}};\ \alpha_2=1 \text{ — на площади } S_{\text{оп}}.\qquad(11.5.37)$$

Применяя формулу (8.13.8′), получим

$$\iint\limits_{(S_{\text{т}}+S_{\text{оп}})}\Delta\bar{p}_1\cdot 1\cdot dS=\iint\limits_{S_{\text{оп}}}\Delta\bar{p}_2\alpha_{\text{в}}dS.$$

Интеграл в левой части определяет суммарную подъемную силу комбинации «корпус—оперение», обусловленную вихрем,

$$\Delta Y_{(\text{т},\text{оп})\text{в}}=Y_{\text{т}(\text{оп})\text{в}}+\Delta Y_{\text{оп}(\text{т})\text{в}}=q_\infty\iint\limits_{(S_{\text{т}}+S_{\text{оп}})}\Delta\bar{p}_1 dS,$$

поэтому

$$\Delta Y_{(\text{т},\text{оп})\text{в}}=q_\infty\iint\limits_{(S_{\text{оп}})}\Delta\bar{p}_2\alpha_{\text{в}}dS.\qquad(11.5.38)$$

Примем, что угол атаки $\alpha_{\text{в}}$ зависит только от поперечной координаты точки z и сохраняется постоянным вдоль хорды оперения. Принимая во внимание, что $dS=dxdz$, получим после интегрирования по x

$$\Delta Y_{(\text{т},\text{оп})\text{в}}=2q_\infty\int\limits_{r}^{(s_m)_{\text{оп}}}\alpha_{\text{в}}(bc_y')\,dz.\qquad(11.5.39)$$

Величина

$$bc_y'=\int\limits_{x_{\text{п}}}^{x_{\text{з}}=x_{\text{п}}+b}\Delta\bar{p}_2 dx\qquad(11.5.40)$$

представляет собой *нагрузку в сечении по размаху крыла*, определяемую при единичном угле отклонения корпуса и консоли. В выражении (11.5.40) $x_{\text{п}}$, $x_{\text{з}}$— кординаты точек соответственно передней и задней кромок; b — хорда сечения; c_y' — коэффициент подъемной силы сечения.

С целью вычисления нагрузки (11.5.40) рассмотрим формулу (11.2.52′) для $\Delta Y_{\text{кр}(\text{т})}$. Вводя обозначения $\alpha=\alpha_{\text{т}}$, $\Delta Y_{\text{кр}(\text{т})}=\Delta Y_{\text{оп}(\text{т})}$, $s_m=(s_m)_{\text{оп}}$ и осуществляя интегрирование по x, получим

$$\Delta Y_{\text{оп}(\text{т})}=8\alpha_{\text{т}}q_\infty\int\limits_{r}^{(s_m)_{\text{оп}}}\{[(s_m)_{\text{оп}}+r^2/(s_m)_{\text{оп}}]^2-(z+r^2/z)^2\}^{1/2}dz.\qquad(11.5.41)$$

Сопоставляя (11.5.41) и (11.5.39), можно заключить, что нагрузка по размаху оперения при единичном отклонении консоли и корпуса ($\alpha_{\text{т}}=\alpha_{\text{в}}=1$) определяется величиной

$$(bc_y')_{\text{оп}(\text{т})}=4\,\{[(s_m)_{\text{оп}}+r^2/(s_m)_{\text{оп}}]^2-(z+r^2/z)^2\}^{1/2}.\qquad(11.5.42)$$

Хотя интегрирование было выполнено для треугольной консоли, обтекаемой прямым потоком, для тонких конфигураций распределение нагрузки по размаху, как видно из (11.5.42), не зависит от формы консолей в плане. Ее величина в заданной точке с координатой z поверхности консоли, установленной на корпусе с радиусом r, определяется только полуразмахом $(s_m)_{\text{оп}}$. Поэтому формула (11.5.42) применима для определения нагрузки треугольного крыла, обтекаемого обращенным потоком. В соответствии со сказанным нагрузка, входящая в (11.5.39), будет равна нагрузке (11.5.42), т. е. $bc_y' = (bc_y')_{\text{оп(т)}}$. Тогда

$$\Delta Y_{(\text{т,оп})\text{в}} = 8q_\infty \int\limits_{r}^{(s_m)_{\text{оп}}} \alpha_{\text{в}} \{[(s_m)_{\text{оп}} + r^2/(s_m)_{\text{оп}}]^2 - (z + r^2/z)^2\}^{1/2} dz. \qquad (11.5.43)$$

В этом выражении требуется определить угол атаки $\alpha_{\text{в}} = -\varepsilon$, равный по абсолютной величине вертикальному углу скоса потока у оперения.

В сверхзвуковом потоке углы скоса должны определяться с учетом ограниченности зон влияния вихрей. Зона влияния для левого присоединенного вихря ограничена конусом Маха, выходящим из точки A, а для правого вихря — конусом Маха с вершиной в точке B (рис. 11.5.7). В области I, находящейся вне этих конусов, вихревое влияние отсутствует, и скос потока равен нулю. В области II, ограниченной конусом Маха с вершиной в начале присоединенного вихря, скос потока определяется влиянием заключенного в этом конусе вихря. В зоне III, совпадающей с областью пересечения двух конусов Маха, скос потока будет определяться влиянием обоих присоединенных вихрей.

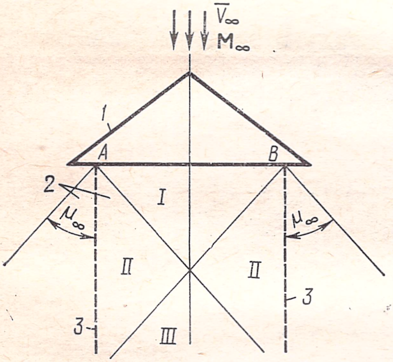


Рис. 11.5.7. Зоны вихревого влияния в сверхзвуковом потоке:

1 — крыло; *2* — конус Маха; *3* — присоединенный вихрь

Рассмотрим оперение, расположенное в области III, где индуцированные скорости от правого и левого вихрей складываются. На некотором расстоянии от задней кромки крыла вертикальные скосы линеаризованного сверхзвукового потока, вызываемые присоединенным вихрем, оказываются такими, как и скосы, создаваемые бесконечными вихревыми линиями в несжимаемой жидкости. В частности, для крыла, у которого $\alpha'\lambda_{\text{кр}} = 2{,}5$, это расстояние равно двум хордам, а для $\alpha'\lambda_{\text{кр}} = 1$ — примерно $^3/_4$ длины хорды. Полагая, что оперение расположено на достаточно большом удалении от крыла, будем определять скос потока при помощи выражения $\varepsilon = -w_N/V_\infty$, в котором индуцированная скорость вычисляется по формуле (2.7.12). Полагая в этой формуле $w=w_N$, $\Gamma=\Gamma_0$ и $h=r$, напишем для точки N $(y=0)$, расположенной на оперении (рис. 11.5.8),

$$w_N=\Gamma_0/(2\pi r).$$

Вертикальная составляющая скорости, индуцированной:
правым вихрем —

$$w_{N\text{п}}=-\frac{\Gamma_0}{2\pi r}\sin\nu=-\frac{\Gamma_0}{2\pi r}\cdot\frac{z_v-z}{r}=-\frac{\Gamma_0(z_v-z)}{2\pi\left[y_v^2+(z_v-z)^2\right]}; \tag{11.5.44}$$

левым вихрем —

$$w_{N\text{л}}=-\frac{\Gamma_0(z_v+z)}{2\pi\left[y_v^2+(z_v+z)^2\right]}. \tag{11.5.45}$$

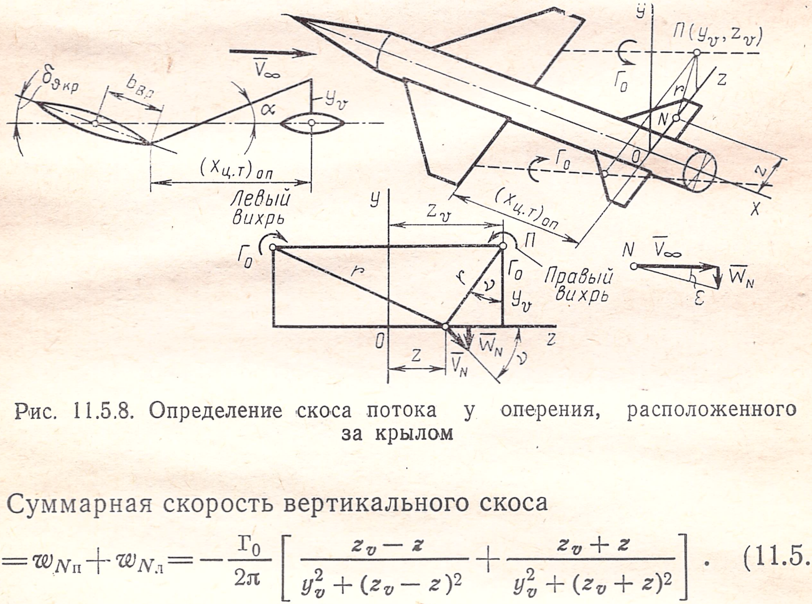

$\delta_{\text{экр}}$
$b_{\text{в.р}}$
$\overline{V}_\infty$
α
y_v
$(x_{\text{ц.т}})_{\text{оп}}$
Левый вихрь
Γ_0
y
z_v
П
r
ν
Γ_0
y_v
Правый вихрь
0
z
$\overline{W}_N$
$\overline{V}_N$
ν
z
y
$П(y_v, z_v)$
Γ_0
z
r
N
0
Γ_0
z
x
$(x_{\text{ц.т}})_{\text{оп}}$
N
$\overline{V}_\infty$
$\overline{W}_N$
ε

Рис. 11.5.8. Определение скоса потока у оперения, расположенного за крылом

Суммарная скорость вертикального скоса

$$w_N=w_{N\text{п}}+w_{N\text{л}}=-\frac{\Gamma_0}{2\pi}\left[\frac{z_v-z}{y_v^2+(z_v-z)^2}+\frac{z_v+z}{y_v^2+(z_v+z)^2}\right]. \tag{11.5.46}$$

Соответствующий угол скоса

$$\varepsilon=-\frac{w_N}{V_\infty}=\frac{\Gamma_0}{2\pi V_\infty}\left[\frac{z_v-z}{y_v^2+(z_v-z)^2}+\frac{z_v+z}{y_v^2+(z_v+z)^2}\right]. \tag{11.5.47}$$

Внося значение $\alpha_\text{в}=-\varepsilon$ в (11.5.43), получим

$$\Delta Y_{(\text{т.оп})\,\text{в}}=\frac{-4q_\infty\Gamma_0}{\pi V_\infty}\int\limits_r^{(s_m)_\text{оп}}\left[\frac{z_v-z}{y_v^2+(z_v-z)^2}+\frac{z_v+z}{y_v^2+(z_v+z)^2}\right]\times$$

$$\times\left\{\left[(s_m)_\text{оп}+r^2/(s_m)_\text{оп}\right]^2-(z+r^2/z)^2\right\}^{1/2}dz. \tag{11.5.48}$$

Подставив (11.5.48) в формулу (11.5.35), в которой принимаем в соответствии с (8.8.47)

$$Y_{\text{оп}}=(c_y)_{\text{оп}}q_\infty S_{\text{оп}}=2a\pi\,\operatorname{ctg}\varkappa q_\infty S_{\text{оп}}=2a\pi q_\infty\left[(s_m)_{\text{оп}}-r_{\text{оп}}\right]^2,$$

найдем, что

$$i_{\text{оп}}=\frac{-4}{[(s_m)_{\text{оп}}-r]\,\pi}\int\limits_{r}^{(s_m)_{\text{оп}}}\left[\frac{z_v-z}{y_v^2+(z_v-z)^2}+\frac{z_v+z}{y_v^2+(z_v+z)^2}\right]\times$$
$$\times\left\{\left[(s_m)_{\text{оп}}+r_{\text{оп}}^2/(s_m)_{\text{оп}}\right]^2-\left(z+r_{\text{оп}}^2/z\right)^2\right\}^{1/2}dz. \qquad (11.5.49)$$

Численным интегрированием можно рассчитать значения $i_{\text{оп}}$, которые согласно (11.5.49) будут функциями безразмерных параметров $y_v/(s_m)_{\text{оп}}$, $z_v/(s_m)_{\text{оп}}$ и $r_{\text{оп}}/(s_m)_{\text{оп}}$ и не зависят от формы оперения в плане.

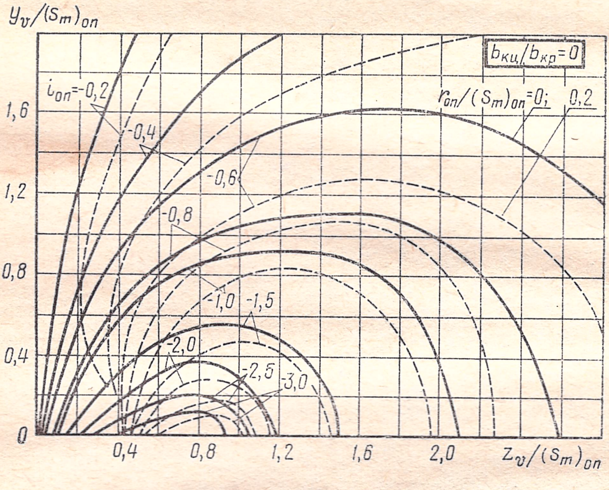


Рис. 11.5.9. Коэффициенты интерференции для треугольного оперения

Вычисления по другому методу, основанному на «теории полос» [49], показали, что $i_{\text{оп}}$ зависит также и от формы, определяемой обратным сужением оперения $b_{\text{кц}}/b_{\text{кр}}$. На рис. 11.5.9 приведена типичная диаграмма, построенная по результатам этих вычислений для треугольного крыла $(1/\eta_{\text{оп}}=b_{\text{кц}}/b_{\text{кр}}=0)$. Фактически $i_{\text{оп}}$ представляет собой слабо изменяющуюся функцию от $b_{\text{кц}}/b_{\text{кр}}$ и $r_{\text{оп}}/(s_m)_{\text{оп}}$ для малых значений $r_{\text{оп}}/(s_m)_{\text{оп}}$.

Используя диаграммы, коэффициенты $i_{\text{оп}}$ обычно находят путем интерполяции по параметрам $(r_m)_{\text{оп}}=r_{\text{оп}}/(s_m)_{\text{оп}}$ и $\eta_{\text{оп}}$ (или $1/\eta_{\text{оп}}$) при $z_v/(s_m)_{\text{оп}}$. Если же вихрь проходит вблизи оси корпуса, то такую интерполяцию целесообразно вести при условии постоянства другого параметра, например $(z_v/s_m-r_m)_{\text{оп}}/(1-r_m)_{\text{оп}}$.

Рассмотрим приближенный метод определения $i_{\text{оп}}$ с использованием (11.5.49), основанный на предположении, что скос потока вдоль размаха будет постоянным и равным его значению в фокусе (центре давления) оперения. Полагая, что точка N (см. рис. 11.5.8) совпадает с фокусом, расположенным в начале координат ($y=z=0$), найдем из (11.5.47) угол скоса:

$$\varepsilon=\frac{\Gamma_0}{\pi V_\infty}\cdot\frac{z_v}{y_v^2+z_v^2}. \tag{11.5.50}$$

Отсюда (11.5.48) принимает вид

$$\Delta Y_{(\text{т,оп})\text{в}}=\frac{-8q_\infty\Gamma_0}{\pi V_\infty}\cdot\frac{z_v}{y_v^2+z_v^2}\times$$

$$\times\int\limits_r^{(s_m)_{\text{оп}}}\{[s_m)_{\text{оп}}+r_{\text{оп}}^2/(s_m)_{\text{оп}}]^2-(z+r_{\text{оп}}^2/z)^2\}^{1/2}dx. \tag{11.5.51}$$

Производя интегрирование и используя (8.8.47′), получим отношение

$$\frac{\Delta Y_{(\text{т,оп})\text{в}}}{Y_{\text{оп}}}=\frac{-2\Gamma_0 z_v}{\pi\alpha V_\infty\left(y_v^2+z_v^2\right)}\left\{\frac{\pi}{2}\left[\frac{(\bar s_m^2)_{\text{оп}}-1}{(\bar s_m)_{\text{оп}}}\right]^2+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{(\bar s_m^2)_{\text{оп}}+1}{(\bar s_m)_{\text{оп}}}\right]^2\arcsin\left[\frac{(\bar s_m^2)_{\text{оп}}-1}{(\bar s_m^2)_{\text{оп}}+1}\right]-\frac{2\,[(\bar s_m^2)_{\text{оп}}-1}{(\bar s_m)_{\text{оп}}}\right\}\times$$

$$\times\frac{1}{\pi\,[(\bar s_m)_{\text{оп}}-1]^2} \tag{11.5.52}$$

В (11.5.52) в качестве сомножителя в правой части входит коэффициент интерференции $K_{\text{кр}}$ (11.2.60) для комбинации «корпус—оперение». Учитывая это, найдем после подстановки (11.5.52) в (11.5.35)

$$i_{\text{оп}}=-\frac{4\bar z_v\,[(\bar s_m)_{\text{оп}}-1]\,(K_{\text{кр}})_{\text{оп}}}{\left(\bar y_v^2+\bar z_v^2\right)(\bar s_m)_{\text{оп}}}, \tag{11.5.53}$$

где $\bar z_v=z_v/(s_m)_{\text{оп}}$, $\bar y_v=y_v/(s_m)_{\text{оп}}$, $(\bar s_m)_{\text{оп}}=(s_m)_{\text{оп}}/r_{\text{оп}}$.

Определим по величине $i_{\text{оп}}$ коэффициент эффективности оперения. Приняв площадь изолированного крыла $S_{\text{кр}}$ за характерную площадь, перепишем (11.5.14) в виде

$$\eta_{\text{оп}}=1+(\Delta c_y)_{(\text{т,оп})\,\text{в}}/[c_{y\,\text{оп}}(K_{\text{кр}}+K_{\text{т}})_{\text{оп}}]. \tag{11.5.54}$$

Внося сюда значение $(\Delta c_y)_{(\text{т, оп})\text{в}}/c_{y\text{оп}}=\Delta Y_{(\text{т,оп})\text{в}}/Y_{\text{оп}}$, найденное из (11.5.35), получим

$$\eta_{\text{оп}}=1+i_{\text{оп}}\Gamma_0/\{2(K_{\text{кр}}+K_{\text{т}})_{\text{оп}}\pi\alpha V_\infty[(s_m)_{\text{оп}}-r_{\text{оп}}]\}. \tag{11.5.55}$$

Подставляя вместо Γ_0 значение из (11.5.21), найдем

$$\eta_{\text{оп}} = 1 + i_{\text{оп}} K_{\text{кр}} (\partial c_y/\partial \alpha)_{\text{кр}} S_{\text{кр}} / \{8 (K_{\text{кр}} + K_{\text{т}})_{\text{оп}} \pi [(s_m)_{\text{оп}} - r_{\text{оп}}] (z_v - r_{\text{кр}})\}. \tag{11.5.56}$$

Используя значение $\eta_{\text{оп}}$, можно при помощи (11.5.54) найти уменьшение подъемной силы, вызванное вихрем:

$$(\Delta c_y)_{(\text{т,оп})\,\text{в}} = c_{y\,\text{оп}} (K_{\text{кр}} + K_{\text{т}})_{\text{оп}} (\eta_{\text{оп}} - 1). \tag{11.5.54$'$}$$

Соотношение (11.5.54′) соответствует аэродинамической теории тонкого тела, согласно которой влияние вихря распространяется на всю площадь оперения, что практически имеет место при дозвуковых и небольших сверхзвуковых скоростях. По мере увеличения числа $\mathbf{M}_\infty$ ($\mathbf{M}_\infty > 1$) зона влияния вихря, ограниченная конусом Маха (с вершиной в точке схода вихря, см. рис. 11.5.12), сужается, что приводит к снижению угла скоса. Это снижение можно учесть коэффициентом $\Delta_\varepsilon = S'_{\text{оп}}/S_{\text{оп}}$, где $S'_{\text{оп}}$ — часть площади консоли, расположенной внутри конуса Маха. В соответствии со сказанным, введя коэффициент Δ_ε, можно уточнить (11.5.54′):

$$(\Delta c_y)_{(\text{т,оп})\,\text{в}} = c_{y\,\text{оп}} (K_{\text{кр}} + K_{\text{т}})_{\text{оп}} (\eta_{\text{оп}} - 1)\, \Delta_\varepsilon. \tag{11.5.54$''$}$$

Практически величину Δ_ε удобно находить графически путем соответствующих геометрических построений (см. рис. 11.5.12). При увеличенных числах $\mathbf{M}_\infty$ конус Маха сужается настолько, что консоли оперения выходят из зоны влияния вихрей. В этом случае $S'_{\text{оп}} \approx 0$, коэффициент $\Delta_\varepsilon = 0$ и, следовательно, не будет скоса потока. Координата центра давления оперения, как и подъемная сила, изменяется под влиянием вихрей крыла. При этом с достаточным приближением можно считать, что точка приложения подъемной силы, обусловленной вихрями крыла, совпадает с центром давления оперения для комбинации «корпус — оперение (крыло)», т. е. $(x_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{оп(в)}} = (x_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{кр(т)}}$.

Влияние угла атаки и скачков уплотнения на эффективность оперения

Увеличение угла атаки может привести к снижению неблагоприятного воздействия интерференции. Это объясняется тем, что вихрь продолжает двигаться по направлению потока, а оперение с ростом α опускается вниз, что приводит к увеличению координат z_v, y_v и, как следствие, к уменьшению $|i_{\text{оп}}|$. Если бы положение вихря по отношению к оперению не менялось, то неблагоприятное влияние интерференции носило бы линейный характер, так как интенсивность вихря пропорциональна углу атаки. В реальном случае с возрастанием углов атаки моментная характеристика оперения оказывается нелинейной и статическая устойчивость при этом может увеличиться.

При небольших углах атаки неблагоприятное влияние интерференции на устойчивость можно уменьшить, используя так называемое нетандемное оперение, расположенное выше крыла (рис. 11.5.10). В этом случае характеристики оперения улучшаются благодаря тому, что вихри, сбегающие с крыла, пройдут на значительном удалении снизу от оперения. Однако по мере увеличения углов атаки его верхние консоли оказываются все ближе к вихрям и неблагоприятное влияние интерференции усиливается. После того как при дальнейшем увеличении угла атаки оперение пройдет через вихри и будет удаляться от них, неблагоприятное влияние снижается.

При больших сверхзвуковых скоростях также имеет место дополнительный интерференционный эффект, вызванный взаимодействием с возникающими скачками уплотнения (рис. 11.5.11). Как видно из рисунка, при некотором угле атаки α_1 горизонтальное оперение расположено в зоне между хвостовым скачком и веером расширения. Вследствие этого оно оказывается для потока, прошедшего через веер расширения, под нулевым углом атаки и не будет создавать подъемной силы. Практически эффективность оперения близка к нулю ($\eta_{оп} \approx 0$). При большем угле атаки ($\alpha_2 > \alpha_1$) угол скачка возрастает и плоскость скачка может оказаться впереди оперения. Так как линия тока за скачком почти совпадает с направлением набегающего потока, то оперение в значительной мере восстанавливает свою эффективность. Некоторое снижение подъемной силы обусловлено уменьшением числа **M** и скоростного напора за скачком. Кривая *5*, показываю-

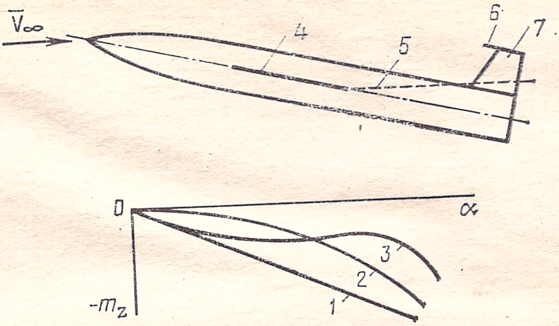


Рис. 11.5.10. Влияние горизонтального оперения на моментные характеристики комбинации «корпус — крыло — оперение»:

1 — без интерференции; *2* — с учетом интерференции для обычного оперения; *3* — с учетом интерференции нетандемного крестообразного оперения; *4* — крыло; *5* — вихрь; *6* — горизонтальное оперение; *7* — вертикальное оперение

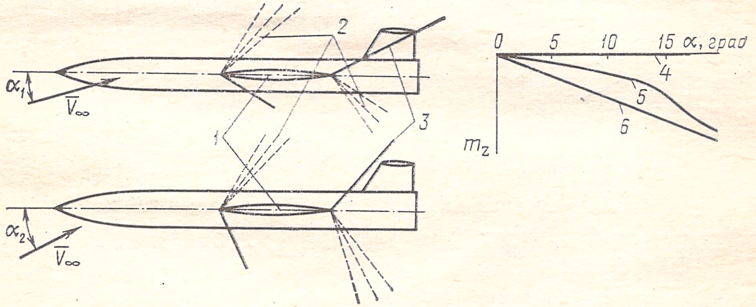


Рис. 11.5.11. Интерференция оперения и крыла при возникновении скачков уплотнения:

1 — крыло, *2* — веер расширения; *3* — хвостовой скачок уплотнения, *4* — коэффициент эффективности $\eta_{оп}=0$; *5* — реальная кривая; *6* — коэффициент эффективности $\eta_{оп}=1$

щая характер изменения момента оперения вследствие влияния скачка уплотнения, а также расширения потока, изображена на рис. 11.5.11. Она проходит между линиями, соответствующими, с одной стороны, полной потере эффективности ($\eta_{оп}=0$), с другой — его полному восстановлению ($\eta_{оп}=1$).

Влияние торможения потока

Эффективность оперения зависит от торможения потока, обусловленного воздействием не только головной части, но также и крыльев, расположенных перед оперением. При этом степень торможения можно охарактеризовать коэффициентом $q_2=q/q_\infty$, являющимся функцией: числа $\mathbf{M}_\infty$, относительных размеров головной части, отношения площадей оперения и крыльев ($\bar{S}_{оп}=S_{оп}/S_{кр}$), а также относительного расстояния между ними [$\bar{x}_ц=x_ц/(b_{сах})_{кр}$].

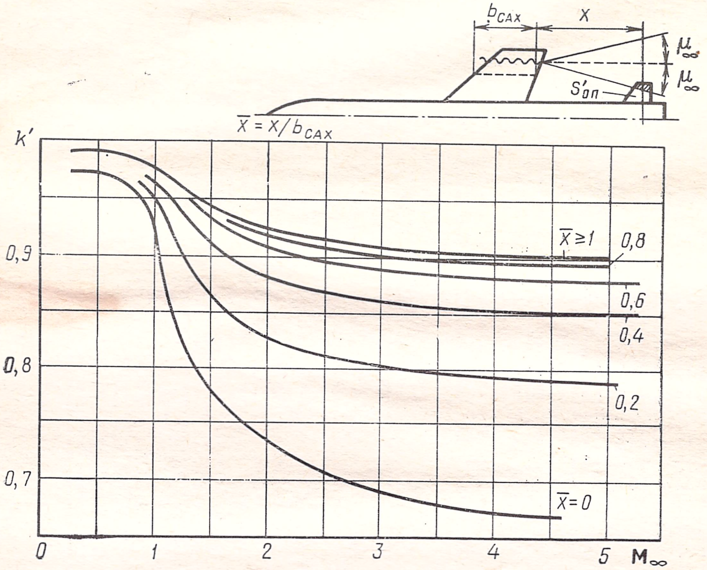


Рис. 11.5.12. Графики для определения коэффициента k' в (11.5.57)

Для летательного аппарата с конической головной частью [13]

$$k_2=\frac{q}{q_\infty}=k_1\,\frac{k'+\bar{S}_{оп}}{1+\bar{S}_{оп}}, \qquad (11.5.57)$$

где k_1 — коэффициент торможения для крыла, определяемый по (11.4.44); k' — параметр, зависящий от числа $\mathbf{M}_\infty$ и расстояния между крылом и оперением (его можно найти из экспериментального графика, изображенного на рис. 11.5.12).

Для летательного аппарата с оперением, расположенным за крылом (так называемая нормальная схема), обычно $S_{оп}/S_{кр}\ll 1$; следовательно, можно принять $k_2\approx k_1k'$. При переднем расположении оперения (схема «утка») величина $S_{оп}/S_{кр}\gg 1$, поэтому коэффициент торможения перед крылом, расположенным в хвостовой части, $k_2\approx k_1$. Соответствующее число Маха, по которому определяется коэффициент подъемной силы хвостового оперения,

$$\mathbf{M}_1=\mathbf{M}_\infty\sqrt{k_2}. \qquad (11.5.58)$$

Результаты расчета интерференции крыла и оперения могут быть применены непосредственно для нахождения аэродинамических характеристик комбинаций «корпус—оперение» или «корпус—крыло—оперение». При этом для крылатого летательного аппарата, оснащенного оперением, должна быть учтена его интерференция с крылом.

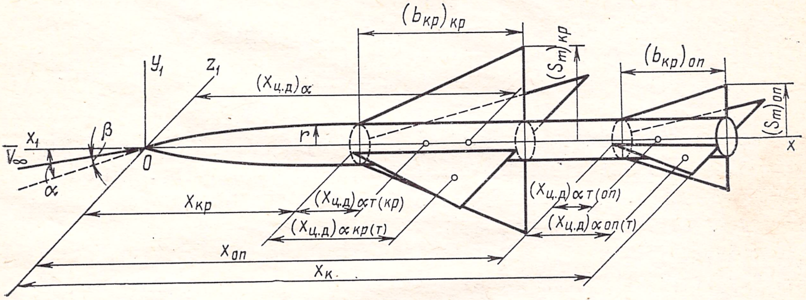


Рис. 11.5.13. Схема летательного аппарата, выполненного по схеме «++»

Рассмотрим комбинацию с одинаковой ориентировкой консолей крыла и оперения (схема «++», рис. 11.5.13). По аналогии с (11.4.47) коэффициент подъемной силы комбинации c_{y1} (индекс «1» в дальнейшем опустим) равен

$$c_y = \frac{Y}{q_\infty S_{кр}} = c_{yт} + c^\alpha_{y\,кр}(K_{кр} + K_т)_{кр} k_1 \alpha + \\ + c^\alpha_{y\,оп}(K_{кр} + K_т)_{оп}(\eta_{оп} - 1)\Delta_\varepsilon k_2 \alpha \frac{S_{оп}}{S_{кр}}. \qquad (11.5.59)$$

В соответствии с этим значением c_y найдем зависимость для коэффициента момента тангажа, вычисленного относительно носка корпуса:

$$m_z = m_{zт} - \{K_{т\cdot кр}[(c_{ц\cdot д})_{\alpha т(кр)}(\overline{b}_{кр})_{кр} + \overline{x}_{кр}] + \\ + K_{кр}[(c_{ц.д})_{\alpha кр(т)}(\overline{b}_{кр})_{кр} + \overline{x}_{кр}]\} c^\alpha_{y кр} \alpha k_1 - \\ - \{K_{т\cdot оп}[(c_{ц\cdot д})_{\alpha т(оп)}(\overline{b}_{кр})_{оп} + \overline{x}_{оп}] + K_{оп}[(c_{ц\cdot д})_{\alpha оп(т)} \times \\ \times (\overline{b}_{кр})_{оп} + \overline{x}_{оп}]\} c^\alpha_{y\,оп}(\eta_{оп} - 1)\Delta_\varepsilon k_2 \alpha \frac{S_{оп}}{S_{кр}}. \qquad (11.5.60)$$

В этих зависимостях коэффициенты интерференции с индексами «кр» и «оп» находят из табл. 11.2.1 соответственно для значений $r_{кр}/(s_m)_{кр}$ и $r_{оп}/(s_m)_{оп}$. При помощи этой же таблицы определяют значения $(c_{ц\cdot д})_\alpha = (x_{ц\cdot д})_\alpha/(b_{кр})_{кр}$ [например, $(c_{ц\cdot д})_{\alpha т(кр)} = (x_{ц.д})_\alpha/(b_{кр})_{кр}$]. Все геометрические параметры в (11.5.60) являются безразмерными и отнесены к длине летательного аппарата $x_к$ [т. е. $\overline{x}_{кр}=x_{кр}/x_к$; $(\overline{b}_{кр})_{кр}=(b_{кр})_{кр}/x_{кр}$ и т. д.].

Дифференцируя по $\alpha=\alpha_c \cos\varphi$ [(11.5.59) и (11.5.60)], можно определить производные от коэффициентов подъемной силы и момента тангажа c_y^α и m_z^α. По этим значениям находят производные по углу скольжения от коэффициентов боковой силы и момента рыскания:

$$c_z^\beta=-c_y^\alpha;\ m_y^\beta=-m_z^\alpha, \tag{11.5.61}$$

а также коэффициент центра давления комбинации:

$$(c_{ц.д})_\alpha=(c_{ц.д})_\beta=-m_z^\alpha/c_y^\alpha. \tag{11.5.62}$$

Все аэродинамические коэффициенты для изолированных элементов комбинации (корпуса, крыла, оперения) в приведенных соотношениях определяют по линеаризованной теории обтекания с учетом влияния сжимаемости.

Коэффициенты интерференции для крыла ($K_{т.кр}$, $K_{кр}$) и оперения ($K_{т.оп}$, $K_{оп}$) находят, кроме того, в зависимости от сужения консолей, толщины вытеснения пограничного слоя, а также длины хвостового участка корпуса за крылом и оперением.

Момент крена оперения, расположенного за крылом

Изменение такого момента происходит под влиянием вихрей, сбегающих с крыльев летательного аппарата, движущегося под углами атаки и скольжения.

У комбинации с плоскими крыльями возникает пара вихревых жгутов, образующих с вертикальной и горизонтальной плоскостями симметрии углы, близкие соответственно к значениям β и α. У крестообразных крыльев таких вихрей будет четыре.

Обычно знак этого момента для плоского оперения противоположен знаку его собственного момента. Принимая это во внимание и учитывая, что размеры оперения невелики по сравнению с крыльями и поэтому малы по величине создаваемые им моменты крена, обычно при расчете его суммарного значения для летательного аппарата дополнительную интерференционную составляющую момента крена не учитывают.

В случае крестообразной комбинации крыльев и оперения интерференционные моменты крена от вертикальных и горизонтальных консолей, как правило, обратны по знаку и близки по величине. Таким образом, практически суммарный момент крена комбинации можно принимать также равным нулю, как и для летательного аппарата вида «корпус—крестообразное оперение», у которого вихри перед оперением генерируются корпусом, что обусловлено возникновением у него относительно небольшой подъемной силы.

§ 11.6. ОРГАНЫ УПРАВЛЕНИЯ

Основные типы органов управления

Траекторию неуправляемого летательного аппарата, испытывающего лишь воздействие силы сопротивления и веса, обычно называют естественной, или баллистической. Для такого летательного аппарата характерно отсутствие какой-либо искусственно созданной управляющей аэродинамической или другой силы, нормальной к траектории.

Траектория управляемого летательного аппарата, выполняющего определенный маневр, будет отличаться от естественной траектории благодаря дополнительному управляющему усилию, совпадающему по направлению с нормалью к вектору скорости полета. Устройства, создающие необходимую управляющую силу, называют органами управления.

Органы управления входят в систему управления движением летательного аппарата, под которым понимают комплекс аппаратуры и устройств, обеспечивающих измерение отклонений фактического движения летательного аппарата от заданных условий полета, формирование соответствующего сигнала и создание управляющей силы.

В зависимости от физического характера управляющей силы органы управления можно разделить на три основных типа: аэродинамические, газодинамические и комбинированные.

Аэродинамические органы управления создают управляющую силу путем изменения условий внешнего обтекания, и, следовательно, управляющая сила по своему происхождению — аэродинамическая. Подобные органы управления являются средством изменения величины и направления главного вектора аэродинамических сил. Применение их весьма эффективно для летательных аппаратов, движущихся с достаточно большой скоростью в плотных слоях атмосферы.

Газодинамические органы управления основаны на использовании эффекта, вызванного изменением направления газовой струи, истекающей из сопла реактивного двигателя. Управляющая сила возникает в результате отклонения вектора силы тяги от направления касательной к траектории полета. В некоторых конструкциях газодинамических органов управления используются специальные управляющие реактивные двигатели. Такие органы управления применяются в тех условиях, когда аэродинамические органы управления делаются малоэффективными, например в разреженных слоях атмосферы или при малых скоростях движения летательного аппарата (в частности, при старте ракеты с Земли).

Комбинированные органы управления при создании управляющей силы используют одновременно эффекты аэродинамических и газодинамических органов управления.

Примером такого органа управления служит реактивный закрылок. Основным его элементом является поворотное сопло, обычно устанавливаемое на задней кромке крыла или оперения и выполняемое в виде узкой щели. Управляющее усилие возникает в результате истечения воздуха из сопла, наклоненного под определенным углом к хорде. Это усилие складывается из двух компонент: нормальной составляющей силы тяги, создаваемой поворотной щелью, и составляющей аэродинамической силы, возникающей вследствие перераспределения давления на несущей поверхности, обусловленного взаимодействием набегающего потока и струи воздуха, истекающей через щель.

Каждый тип органов управления включает в себя большое количество конкретных видов рулевых устройств. Выбор типа органа управления и конкретного вида рулевого устройства тесно связан с аэродинамической схемой, определяемой, в свою очередь, назначением летательного аппарата и тактико-техническими требованиями, которые к нему предъявляют. Таким образом, данному летательному аппарату соответствуют определенная аэродинамическая схема, тип органа управления и его конкретная конструкция, обеспечивающие выполнение заданных тактико-технических требований.

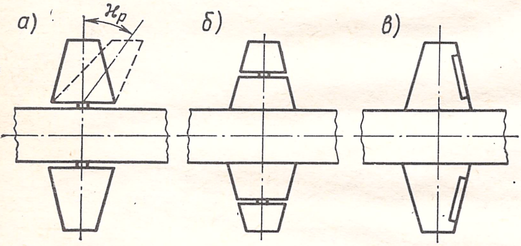


Рис. 11.6.1. Основные типы рулевых поверхностей:

а — полностью подвижные; *б* — концевые; *в* — расположенные вдоль задней кромки

Более подробно об органах управления и методах их расчета изложено в [8]. В данном параграфе будут рассмотрены лишь некоторые виды аэродинамических органов управления и методы их расчета, в частности группа рулевых поверхностей, получивших широкое применение в авиационных и ракетных конструкциях.

Рулевые поверхности, или просто рули, размещаемые в различных местах летательного аппарата, можно классифицировать следующим образом (рис. 11.6.1): полностью подвижные органы управления типа поворотного крыла или оперения; концевые органы управления; органы управления, расположенные вдоль задней кромки несущей или стабилизирующей поверхности.

Полностью подвижные рули в виде поворотного крыла или оперения, обеспечивающие хорошую управляемость благодаря достаточно большой площади органа управления, используются для высокоманевренных летательных аппаратов и оказываются весьма эффективными на значительных высотах и в широком диапазоне чисел M_∞. Чаще всего оси вращения рулей и корпуса взаимно перпендикулярны, однако в конструктивном отношении иногда бывает удобным выбрать угол между этими осями, отличный от прямого (положение оси вращения руля определяется углом стреловидности $\varkappa_р$, рис. 11.6.1).

Некоторое распространение получили концевые органы управления, составляющие часть несущей или стабилизирующей поверхности и располагающиеся у боковых кромок. Такие органы управления оказываются эффективными в достаточно большом диапазоне скоростей. Ось вращения этого руля, как и поворотного оперения, может составлять прямой угол с осью корпуса или иметь некоторый угол стреловидности.

Особенность концевых рулей состоит в том, что их эффективность практически не зависит от наличия корпуса. Их недостаток заключается в трудности монтажа рулевого привода и механизма поворота на крыле или оперении с боковыми концевыми кромками. Концевые органы управления могут быть подразделены на обычные концевые рули и органы управления с рулевой компенсацией (рис. 11.6.2).

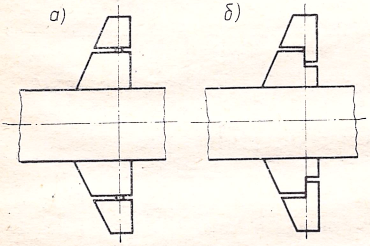


Рис. 11.6.2. Типы концевых рулей:
а — обычный концевой руль; *б* — с компенсацией

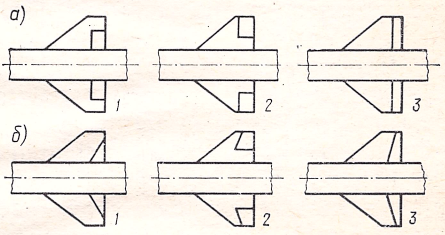


Рис. 11.6.3. Типы рулей, расположенных вдоль задней кромки:
а — с постоянной хордой; *б* — с обратным сужением; *1* — внутренний руль; *2* — внешний руль; *3* — руль, расположенный по всему размаху

При дозвуковых и небольших сверхзвуковых скоростях наиболее широко применяют рули, расположенные вдоль задней кромки неподвижного крыла или оперения. При небольших числах M_∞ с отклонением рулей связано появление не только подъемной силы (управляющего усилия) на них самих, но и на несущей неподвижной поверхности, на которую распространяются возмущения от рулей. Поэтому такие рули могут быть очень эффективны даже при относительно небольшой площади.

При сверхзвуковых скоростях отсутствует обратное воздействие рулей на неподвижные поверхности, поэтому управляющее усилие создается только рулем. Несмотря на увеличение управляющего усилия, обусловленное высоким скоростным напором, все же бывает необходимым для повышения эффективности рулей выбирать их с большей площадью. Органы управления, расположенные вдоль задней кромки, могут быть внутренними и внешними рулями, занимающими часть кромки или размещенными по всему размаху (рис. 11.6.3).

Рулевые поверхности летательных аппаратов служат в качестве рулей поворота, рулей высоты, элеронов и элевонов. Рули поворота в нейтральном положении располагаются вдоль продольной оси аппарата в вертикальной плоскости симметрии. Отклонение их от этого положения вызывает поворот летательного аппарата вправо или влево. Этот поворот обусловлен действием управляющего момента рыскания, создаваемого рулем.

Рули высоты расположены перпендикулярно плоскости рулей поворота. Их отклонение обеспечивает изменение направления полета в вертикальной плоскости и, следовательно, изменение высоты. При этом поворот летательного аппарата вокруг поперечной оси обусловлен действием управляющего момента тангажа, создаваемого рулем высоты.

Комбинация рулей поворота и высоты дает возможность управлять летательным аппаратом одновременно в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, т. е. осуществлять практически любой маневр в пространстве. При помощи этих же рулей можно обеспечить вращение летательного аппарата вокруг продольной оси Ox_1.

В самолетных схемах для управления обычно предусматриваются элероны в комбинации с рулями высоты. Элероны — это две рулевые поверхности, расположенные на концевых или задних кромках консолей крыла и отклоняющиеся в разные стороны, что приводит к накренению летательного аппарата. При этом появляется горизонтальная составляющая подъемной силы, отклоняющая аппарат в нужном направлении и обеспечивающая его поворот под действием момента рыскания. Если одновременно с этим поворачивается руль высоты, то осуществляется требуемый маневр в пространстве. При использовании элеронов следует учитывать, что вследствие их отклонения возникающие приращения подъемной силы на правом и левом крыльях противоположного знака вызывают появление соответствующей разности сил индуктивного сопротивления. Это в свою очередь приводит к образованию дополнительного момента рыскания, вызывающего вращение аппарата в сторону опущенного элерона, а также скольжение и, как следствие, момент крена, обратный по знаку моменту от элеронов. Это снижает эффективность элеронов, препятствуя осуществлению нормального маневра. При этом наибольшей величины момент крена достигает в случае значительных углов атаки, вследствие чего эффективность элеронов на этих углах очень мала.

Для компенсации этого эффекта применяется конструкция дифференциальных элеронов, в которой один элерон отклоняется вверх больше, чем другой, парный ему, вниз. Сопротивление элерона, отклоненного вверх, значительно больше, чем отклоненного вниз, поэтому момент рыскания уменьшается.

Элевоны в отличие от элеронов отклоняются в любую сторону независимо друг от друга, поэтому их используют одновременно и как рули крена, и как рули высоты. Такие устройства, выполняющие одновременно функции органов поперечного и продольного управления, устанавливают на летательных аппаратах типа «бесхвостка».

Аэродинамические свойства органов управления определяются их эффективностью, под которой понимают степень приращения управляющих сил и моментов летательного аппарата (или отдельно несущей поверхности) при отклонении руля. Эту эффективность оценивают частными производными от соответствующих коэффициентов силы или момента по углу поворота руля. Например, для рулей высоты продольную эффективность определяют производными $\partial c_y/\partial \delta_v = c_y^{\delta_v}$ или $\partial m_z/\partial \delta_v = m_z^{\delta_v}$.

Понятие об управляемости

Аэродинамические свойства летательного аппарата характеризуются его управляемостью — способностью аппарата реагировать на отклонение рулей соответствующими изменениями параметров движения (углов атаки, тангажа, рыскания, наклона траектории и др.). Управляемость можно оценить степенью восприимчивости аппарата к такому отклонению органов управления, характеризующейся интенсивностью указанных изменений параметров движения. При оценке управляемости наибольший практический интерес представляют те параметры, которые определяют интенсивность изменения траектории центра масс. Это связано с тем, что именно в обеспечении заданной траектории состоит основная задача управления полетом.

От управляемости в значительной мере зависит маневренность — способность летательного аппарата изменять достаточно быстро параметры полета, характеризующие высоту, величину и направление скорости. При разработке конструкций летательных аппаратов и систем управления ими следует учитывать противоречивый характер требований устойчивости движения и обеспечения управляемости. Придание устойчивости обеспечивает устранение возможных нарушений заданного режима движения, в то время как управляемость связана с обратным — возможностью изменения этого режима.

Управляемость летательного аппарата теснейшим образом связана со статической устойчивостью. Аппарат, обладающий повышенной устойчивостью (большими восстанавливающими моментами), слабее управляем, чем аппарат с меньшей устойчивостью, т. е. аппарат требует больших отклонений рулей для изменения режима полета. Если реакция аппарата на небольшие отклонения рулей велика, то это указывает на малую устойчивость. Такой небольшой устойчивостью обладают летательные аппараты, предназначенные для быстрых маневров. Требование большей управляемости вызывает необходимость использовать летательные аппараты, нейтральные в отношении статической устойчивости или даже в отдельных случаях статически неустойчивые.

Исследование управляемости, основанное на знании аэродинамических характеристик, является основным в теории возмущенного движения летательных аппаратов.

Аэродинамический расчет рулей

Определение аэродинамических характеристик органов управления представляет собой важную и вместе с тем трудную задачу. Большей частью методы расчета этих характеристик основаны на экспериментальных исследованиях аэродинамических рулей, принадлежащих летательным аппаратам различных типов. В последние годы на базе достижений математики и механики начали широко проводиться теоретические исследования аэродинамических рулей, которые привели, в частности, к появлению методов расчета тонких рулевых поверхностей, расположенных на корпусе малой толщины. Данные этой аэродинамической теории тонких тел в ряде случаев хорошо согласуются с опытом и вместе с тем позволяют понять отдельные явления, связанные с механизмом возникновения управляющих усилий.

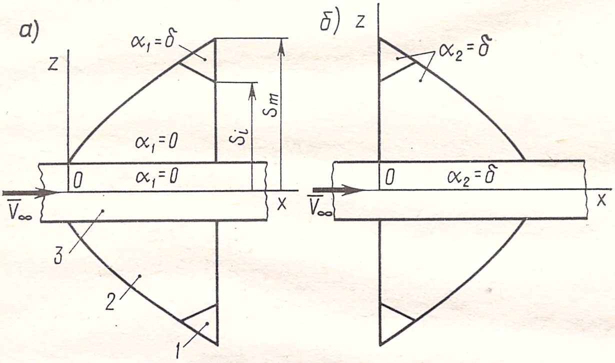


Рис. 11.6.4. Схема к расчету аэродинамических характеристик внешнего руля по методу обратимости потока:
а — прямой поток; *б* — обратный поток; *1* — площадь руля $S_р$; *2* — площадь крыла $S_{кр}$; *3* — площадь $S_т$, занятая корпусом под крылом

Рассмотрим методы расчета по этой теории аэродинамических рулей, представляющих собой полностью поворотные консоли крыла или оперения.

Для этой цели применим метод обратимости потока, позволяющий учесть влияние на возникающую подъемную (управляющую) силу крыла и корпуса. При этом будем исходить из соотношений аэродинамической теории тонкого тела, согласно которой форма рулевой поверхности в плане не влияет на величину создаваемой ею силы.

Предположим, что орган управления занимает на крыле участок вдоль задней кромки длиной $s_m—s_i$ (рис. 11.6.4). Подъемную силу, развиваемую рулем, вычислим при условии, что корпус и крыло расположены в прямом потоке под нулевым углом атаки ($\alpha_1=0$), а руль отклонен на угол $\delta(\alpha_1=\delta)$. Примем, что в обращенном потоке комбинация «корпус — крыло — руль» располагается под общим углом атаки $\alpha_2=\delta$. В соответствии с формулой (8.13.8′) метода обратимости для рассматриваемого случая

$$\iint\limits_{(S_{\text{р}}+S_{\text{кр}}+S_{\text{т}})} \Delta\overline{p}_1\delta dS=\iint\limits_{(S_{\text{р}})} \Delta\overline{p}_2\delta dS.$$

или, сокращая на δ,

$$\iint\limits_{(S_{\text{р}}+S_{\text{кр}}+S_{\text{т}})} \Delta\overline{p}_1 dS=\iint\limits_{(S_{\text{р}})} \Delta\overline{p}_2 dS. \qquad (11.6.1)$$

Здесь левая часть определяет отыскиваемую подъемную силу комбинации «корпус — крыло — руль» от отклонения органа управления, отнесенную к скоростному напору $q_\infty=\rho_\infty V_\infty^2/2$, т. е.

$$Y_{\text{р}}=q_\infty \iint\limits_{(S_{\text{р}})} \Delta\overline{p}_2 dS. \qquad (11.6.2)$$

Полагая, что элементарная площадь руля $dS=dxdz$, напишем

$$Y_{\text{р}}=2q_\infty \int\limits_{s_i}^{s_m} dz \int\limits_{x_{\text{п}}}^{x_{\text{з}}} \Delta\overline{p}_2 dx. \qquad (11.6.3)$$

Величина

$$\int\limits_{x_{\text{п}}}^{x_{\text{з}}} \Delta\overline{p}_2 dx=bc_y', \qquad (11.6.4)$$

т. е. равна нагрузке в сечении крыла, определяемой при отклонении корпуса и консоли на угол δ. Эта нагрузка при обтекании обращенным потоком комбинации согласно аэродинамической теории не зависит от формы крыла в плане и определяется как подъемная сила сечения, сосредоточенная на передней кромке.

Коэффициент перепада давления

$$\Delta\overline{p}_2=\overline{p}_{\text{н}}-\overline{p}_{\text{в}}=-\frac{2}{V_\infty}\left(\frac{\partial\varphi_{\text{н}}}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_{\text{в}}}{\partial x}\right).$$

Поэтому нагрузка в сечении крыла с учетом (11.5.27)

$$bc_y'=\int\limits_{x_{\text{п}}}^{x_{\text{з}}} \Delta\overline{p}_2 dx=\frac{-2}{V_\infty}\int\limits_{x_{\text{п}}}^{x_{\text{з}}}\left(\frac{\partial\varphi_{\text{н}}}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_{\text{в}}}{\partial x}\right)dx=$$

$$=\frac{-2}{V_\infty}(\varphi_{\text{н}}-\varphi_{\text{в}})=4\delta\left[\left(s_m+\frac{r^2}{s_m}\right)^2-\left(z+\frac{r^2}{z}\right)^2\right]^{1/2}. \qquad (11.6.5)$$

Внося это выражение в (11.5.39), найдем

$$Y_{\text{р}}=8q_\infty\delta \int\limits_{s_i}^{s_m} \{[s_m+(r^2/s_m)]^2-[z+(r^2/z)]^2\}^{1/2} dz. \qquad (11.6.6)$$

Нетрудно заметить, что это выражение аналогично полученному ранее соотношению (11.5.41). Производя интегрирование и относя (11.6.6) к подъемной силе изолированного крыла

$$Y_{\text{кр}} = 2\delta\pi q_\infty (s_m - s_i)^2, \tag{11.6.7}$$

образованного двумя соединенными концевыми органами управления, получим

$$\frac{Y_{\text{р}}}{Y_{\text{кр}}} = \frac{2}{\pi(1-\bar{s}_i)^2}\left[\frac{\pi}{4}(1-r_m^2)^2 - (\bar{s}_i^2 - r_m^4)^{1/2}(1-\bar{s}_i^2)^{1/2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(1+r_m^4)\arcsin\frac{1-2\bar{s}_i^2+r_m^4}{1-r_m^4} + r_m^2\arcsin\frac{(1+r_m^4)\bar{s}_i^2-2r_m^4}{(1-r_m^4)\bar{s}_i^2}\right], \tag{11.6.8}$$

где $r_m = r/s_m$, $\bar{s}_i = s_i/s_m$.

Отношение $Y_{\text{р}}/Y_{\text{кр}}$ зависит только от геометрических параметров на задней кромке. Зависимость $Y_{\text{р}}/Y_{\text{кр}}$ от r/s_m при различных значениях s_i/s_m показана на рис. 11.6.5. Подъемная сила комбинации вследствие интерференции между корпусом и крылом с отклоненным концевым рулем может значительно превосходить подъемную силу $Y_{\text{кр}}$ изолированного крыла. При фиксированном значении r/s_m и увеличении отношения s_i/r подъемная сила комбинации за счет влияния руля возрастает. Это объясняется тем, что поле давлений, образующееся при обтекании органа управления, «захватывается» значительной площадью крыла.

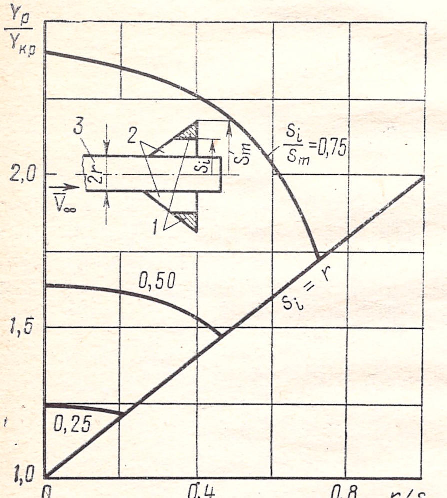


Рис. 11.6.5. Аэродинамическая эффективность органов управления:
1 — рули; *2* — крыло; *3* — корпус

Формула (11.6.8) определяет управляющую силу концевого руля. В частном случае, принимая в этой формуле $\bar{s}_i = r_m$ $(s_i = r)$, получим зависимость для $Y_{\text{р}}$ полностью подвижных органов управления:

$$\frac{Y_{\text{р}}}{Y_{\text{кр}}} = \frac{2}{\pi(1-r_m)^2}\left[\frac{\pi}{4}(1-r_m^2)^2 - r_m(1-r_m^2) + \frac{(1+r_m^2)^2}{2}\arcsin\frac{1-r_m^2}{1+r_m^2}\right]. \tag{11.6.9}$$

Это выражение совпадает с формулой (11.2.60), определяющей коэффициент интерференции $K_{кр}$ для крыла, неподвижно установленного на корпусе. Характер изменения отношения $Y_р/Y_{кр}$ в зависимости от величины r/s_m показан на рис. 11.6.5.

Таким образом, получен интересный результат, согласно которому эффект интерференции в целом для комбинации «корпус — поворотное крыло» оказывается таким же, как и для неподвижного крыла, взаимодействующего с корпусом при обтекании комбинации под некоторым углом атаки.

В соответствии со сказанным

$$Y_р/Y_{кр}=K_{кр}. \qquad (11.6.10)$$

Подъемную силу можно выразить через сумму:

$$Y_р=\Delta Y_{кр(т)\,\delta}+\Delta Y_{т(кр)\,\delta}, \qquad (11.6.11)$$

Здесь первое слагаемое — подъемная сила крыла, отклоненного на угол δ и испытывающего влияние корпуса, а второе — подъемная сила участка корпуса, обусловленная его интерференцией с крылом:

$$\Delta Y_{кр(т)\,\delta}=k_{кр}Y_{кр}; \qquad (11.6.12)$$

$$\Delta Y_{т(кр)\,\delta}=k_т Y_{кр}, \qquad (11.6.13)$$

где $k_{кр}$ и $k_т$, по аналогии с ранее введенными $K_{кр}$ и $K_т$, — коэффициенты интерференции, обусловленные отклонением полностью подвижных рулей на угол δ при $\alpha=0$.

Согласно (11.6.11),

$$Y_р=(k_{кр}+k_т)\,Y_{кр}, \qquad (11.6.14)$$

а с учетом (11.6.10)

$$k_{кр}+k_т=K_{кр}. \qquad (11.6.15)$$

Для определения коэффициентов $k_{кр}$ и $k_т$ необходимо иметь еще одно уравнение, которое связывало бы между собой эти коэффициенты. Для получения такого уравнения будем исходить из предположения, что крыло «передает» корпусу часть своей подъемной силы независимо от того, создается ли эта сила под влиянием угла атаки α комбинации или угла установки крыла δ. Эта часть подъемной силы, обусловленная влиянием угла атаки α, определяется отношением

$$\Delta Y_{т(кр)\,\alpha}/\Delta Y_{кр(т)\,\alpha}=K_т/K_{кр}, \qquad (11.6.16)$$

а отношение

$$\Delta Y_{т(кр)\,\delta}/\Delta Y_{кр(т)\,\delta}=k_т/k_{кр} \qquad (11.6.17)$$

определяет часть подъемной силы, передваемую на корпус при угле δ. В соответствии с принятой гипотезой обе эти части равны, следовательно,

$$k_т/k_{кр}=K_т/K_{кр}. \qquad (11.6.18)$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$(k_{\text{т}}+k_{\text{кр}})/k_{\text{кр}}=(K_{\text{т}}+K_{\text{кр}})/K_{\text{кр}}. \qquad (11.6.18')$$

Используя значения (11.6.15) и (11.2.61) соответственно для $k_{\text{т}}+k_{\text{кр}}$ и $K_{\text{т}}+K_{\text{кр}}$, получим следующее выражение для коэффициента интерференции:

$$k_{\text{кр}}=K_{\text{кр}}^2/(1+r_m)^2. \qquad (11.6.19)$$

Коэффициент $k_{\text{т}}$ в соответствии с (11.6.15)

$$k_{\text{т}}=K_{\text{кр}}-k_{\text{кр}}. \qquad (11.6.20)$$

Эти значения коэффициентов используют при исследовании интерференции подвижного оперения нетонких комбинаций, для которых аэродинамические характеристики изолированных консолей выбирают в соответствии с данными линеаризованной теории обтекания. Результаты исследований могут быть уточнены, если учесть изменение коэффициентов $k_{\text{кр}}$ и $k_{\text{т}}$ под воздействием таких факторов, как сужение консоли, число $\mathbf{M}_\infty$, длина головной части корпуса и пограничный слой. При этом исходят из соотношений, аналогичных (11.4.29):

$$k_{\text{кр}}=(k_{\text{кр}})_{\text{теор}}\nu_\eta\nu_{\text{п.с}}\nu_l\nu_{\text{м}};\ k_{\text{т}}=(k_{\text{т}})_{\text{теор}}\nu_\eta\nu_{\text{п.с}}\nu_l\nu_{\text{м}}, \qquad (11.6.21)$$

где $(k_{\text{кр}})_{\text{теор}}$, $(k_{\text{т}})_{\text{теор}}$ — коэффициенты интерференции, рассчитанные по аэродинамической теории тонкого тела в соответствии с (11.6.19), (11.6.20):

$$(k_{\text{кр}})_{\text{теор}}=(K_{\text{кр}}^2)_{\text{теор}}/(1+r_m^2);\ (k_{\text{т}})_{\text{теор}}=(K_{\text{кр}})_{\text{теор}}-(k_{\text{кр}})_{\text{теор}}. \qquad (11.6.22)$$

Влияние хвостового участка корпуса сказывается на величине коэффициента $k_{\text{т}}$ (так же как и на значении $K_{\text{т}}$), в то время как коэффициент $k_{\text{кр}}$ не меняется (так же как и $K_{\text{кр}}$). В соответствии с этим при наличии части корпуса за подвижной консолью коэффициент

$$k_{\text{т}}=(k_{\text{т}})_{\text{теор}}\nu_\eta\nu_{\text{п.с}}\nu_l\nu_{\text{м}}F, \qquad (11.6.23)$$

где F определяется по (11.4.31).

Рассмотрим расчет аэродинамических характеристик комбинации «корпус—поворотное оперение» с использованием полученных коэффициентов интерференции. В соответствии с (11.6.14) коэффициент подъемной силы, обусловленной отклонением консолей поворотного крыла,

$$c_{y\delta}=Y_{\text{р}}/(q_\infty S_{\text{кр}})=c_{y\,\text{кр}}^{\alpha}(k_{\text{кр}}+k_{\text{т}})\,\delta_v k_1. \qquad (11.6.24)$$

Здесь δ_v — угол атаки консоли, равный углу поворота, отсчитываемому в вертикальной плоскости симметрии, проходящей через ось корпуса. Его значение будет таким, как угол поворота δ_v', когда ось вращения составляет с осью корпуса прямой угол, т. е. когда угол стреловидности этой оси $\varkappa_{\text{р}}=0$. Если же $\varkappa_{\text{р}}\neq 0$, то угол атаки консоли δ_v не будет равен углу поворота δ_v', измеряемому в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Величина этого угла

$$\delta_v = \delta_v' \cos \varkappa_{\text{р}}. \tag{11.6.25}$$

Добавив к значению (11.6.25) коэффициент $c_{y\alpha} = c_{y\text{т,кр}}$, определяемый по значению подъемной силы $Y_\alpha = Y_{\text{т,кр}}$ комбинации при $\alpha \neq 0$, $\delta_v = 0$, получим суммарный коэффициент подъемной силы, отнесенный к площади консолей крыла:

$$c_y = c_{y\alpha} + c_{y\delta} = c_{y\text{т}} \frac{S_{\text{мид}}}{S_{\text{кр}}} + [(K_{\text{т}} + K_{\text{кр}})\,\alpha + (k_{\text{т}} + k_{\text{кр}})\,\delta_v]\, c^{\alpha}_{y\,\text{кр}} k_1. \tag{11.6.26}$$

Безразмерную координату центра давления (координату фокуса по углу δ_v) консолей поворотного крыла при $\alpha = 0$ можно найти из выражения

$$(c_{\text{ц.д}})_{\delta\text{кр}(\text{т})} = (x_{\text{ц.д}}/x_{\text{к}})_{\delta\text{кр}(\text{т})} = \bar{x}_{\text{кр}} + (c_{\text{ц.д}})_{\delta\text{кр}(\text{т})} \bar{b}_{\text{кр}}. \tag{11.6.27}$$

Значения $(c_{\text{ц.д}})_{\delta\text{кр}(\text{т})}$, рассчитанные по аэродинамической теории тонкого тела, оказываются практически теми, что и коэффициенты $(c_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{кр}(\text{т})}$, найденные для случая неподвижных консолей при $\alpha \neq 0$.

Полученные данные свидетельствуют об относительно слабом влиянии интерференции на смещение центра давления поворотного крыла. Это дает основание считать, что с достаточным приближением центр давления такого крыла при $\alpha = 0$, $\delta_v \neq 0$ можно принимать таким, как для изолированного крыла.

Если корпус движется под углом атаки α, а крыло дополнительно отклонено на угол δ_v, то относительная координата центра давления

$$(c_{\text{ц.д}})_{\text{кр}(\text{т})} = (x_{\text{ц.д}}/x_{\text{к}})_{\text{кр}(\text{т})} = \bar{x}_{\text{кр}} + (c'_{\text{ц.д}})_{\text{кр}(\text{т})} \bar{b}_{\text{кр}}, \tag{11.6.28}$$

где коэффициент

$$\begin{aligned}(c'_{\text{ц.д}})_{\text{кр}(\text{т})} = (x_{\text{ц.д}}/b_{\text{кр}})_{\text{кр}(\text{т})} = [K_{\text{кр}}\alpha\,(c_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{кр}(\text{т})} +\\ + k_{\text{кр}}\delta_v\,(c_{\text{ц.д}})_{\delta\text{кр}(\text{т})}]/(K_{\text{кр}}\alpha + k_{\text{кр}}\delta_v).\end{aligned} \tag{11.6.29}$$

При повороте органа управления наряду с изменением положения его центра давления вследствие интерференции с корпусом меняется координата точки приложения дополнительной подъемной силы корпуса, обусловленной влиянием оперения. Если такой поворот сопровождается изменением угла атаки корпуса, то относительная координата центра давления

$$(c_{\text{ц.д}})_{\text{т}(\text{кр})} = \left(\frac{x_{\text{ц.д}}}{x_{\text{к}}}\right)_{\text{т}(\text{кр})} = \bar{x}_{\text{кр}} + (c'_{\text{ц.д}})_{\text{т}(\text{кр})} \bar{b}_{\text{кр}}, \tag{11.6.30}$$

где

$$(c'_{\text{ц.д}})_{\text{т}(\text{кр})} = \left(\frac{x_{\text{ц.д}}}{b_{\text{кр}}}\right)_{\text{т}(\text{кр})} = [K_{\text{т}}\alpha\,(c_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{т}(\text{кр})} + k_{\text{т}}\delta_v\,(c_{\text{ц.д}})_{\delta\text{т}(\text{кр})}]/(K_{\text{т}}\alpha + k_{\text{т}}\delta_v). \tag{11.6.31}$$

При расчете положения центра давления на корпусе с учетом влияния оперения принимается, что центр давления нечувствителен к тому, развивается ли подъемная сила от угла атаки или угла поворота крыла. В соответствии с этим $(x_{\text{ц. д}})_{\alpha\text{т(кр)}} = (x_{\text{ц. д}})_{\delta\text{т(кр)}}$.

Коэффициент центра давления для комбинации «корпус—поворотное крыло»

$$c_{\text{ц.д}} = \frac{x_{\text{ц.д}}}{x_{\text{к}}} = -\frac{m_z}{c_y} = \frac{1}{c_y}\left[(c_{\text{ц.д}})_{\text{т}} c_{y1} \frac{S_{\text{мид}}}{S_{\text{кр}}} + (c_{\text{ц.д}})_{\text{кр(т)}} \Delta c_{y\text{кр(т)}} + (c_{\text{ц.д}})_{\text{т(кр)}} \Delta c_{y\text{т(кр)}}\right], \tag{11.6.32}$$

где c_y — суммарный коэффициент подъемной силы, вычисляемый по (11.6.26), а его составляющие — из выражений:

$$\Delta c_{y\text{кр(т)}} = \Delta c_{y\alpha\text{кр(т)}} + \Delta c_{y\delta\text{кр(т)}} = (K_{\text{кр}}\alpha + k_{\text{кр}}\delta_v)\, c^{\alpha}_{y\text{кр}} k_1; \tag{11.6.33}$$

$$\Delta c_{y\text{т(кр)}} = \Delta c_{y\alpha\text{т(кр)}} + \Delta c_{y\delta\text{т(кр)}} = (K_{\text{т}}\alpha + k_{\text{т}}\delta_v)\, c^{\alpha}_{y\text{кр}} k_1. \tag{11.6.34}$$

Рассмотрим продольную эффективность органов управления в виде поворотного крыла. Ее величина определяется производной $m_z^{\delta_v}$ для симметричного отклонения горизонтальных консолей при условии, что момент тангажа вычисляется относительно центра масс. Коэффициент этого момента m_z нетрудно вычислить по известным значениям $\Delta c_{y\text{кр(т)}}$ (11.6.33) и $\Delta c_{y\text{т(кр)}}$ (11.6.34), а также по заданным относительным координатам центров давления $(c_{\text{ц.д}})_{\delta\text{кр(т)}}$, $(c_{\text{ц.д}})_{\delta\text{т(кр)}}$). Вычисляя производную от m_z по δ_v, найдем

$$m_z^{\delta_v} = -\bar{b}_{\text{кр}}\left\{k_{\text{кр}}\left[(c_{\text{ц.д}})_{\delta\text{кр(т)}} + (\bar{x}_{\text{ц.м}})_{\text{кр}}\right] + k_{\text{т}}\left[(c_{\text{ц.д}})_{\delta\text{т(кр)}} + (\bar{x}_{\text{ц.м}})_{\text{кр}}\right]\right\} c^{\alpha}_{y\text{кр}} k_1, \tag{11.6.35}$$

где $(\bar{x}_{\text{ц.м}})_{\text{кр}} = (x_{\text{ц.м}}/b_{\text{кр}})_{\text{кр}}$ [$(x_{\text{ц.м}})_{\text{кр}}$ — расстояние от центра масс комбинации до вершины крыла на корпусе].

Производная (11.6.35) обычно отрицательная для хвостового оперения и положительная для органа управления, выполненного по схеме «утка».

При определении аэродинамических характеристик комбинации «корпус — поворотное крыло — поворотное оперение» необходимо учитывать интерференцию оперения и крыла. При этом аэродинамический расчет части комбинации «корпус — поворотное оперение» осуществляется так же, как и для комбинации «корпус — поворотное крыло», для которой коэффициенты подъемной силы крыла при наличии корпуса (а также корпуса с учетом воздействия крыла) находятся соответственно по формулам (11.6.33), (11.6.34), в которых следует принять $\delta_v = \delta_{v\,\text{кр}}$, а коэффициенты интерференции $K_{\text{т}} = K_{\text{т.кр}}$, $k_{\text{т}} = k_{\text{т.кр}}$, $K_{\text{кр}}$, $k_{\text{кр}}$ вычислять по параметру для крыла $[r_{\text{кр}}/(s_m)_{\text{кр}}]$.

По аналогии с (11.6.33) коэффициент подъемной силы оперения при наличии корпуса

$$c_{y\text{оп}(\text{т})}=(K_{\text{оп}}\alpha+k_{\text{оп}}\delta_{v\text{оп}})\,c^{\alpha}_{y\text{оп}}k_2\frac{S_{\text{оп}}}{S_{\text{кр}}}\,, \qquad (11.6.36)$$

где $K_{\text{оп}}$, $k_{\text{оп}}$ — коэффициенты интерференции оперения, сходные с соответствующими коэффициентами $K_{\text{кр}}$ и $k_{\text{кр}}$ крыла; $\delta_{v\text{оп}}$ — угол поворота консолей оперения.

Коэффициент подъемной силы корпуса при наличии оперения

$$c_{y\text{т}(\text{оп})}=(K_{\text{т.оп}}\alpha+k_{\text{т.оп}}\delta_{v\text{оп}})\,c^{\alpha}_{y\text{оп}}k_2\frac{S_{\text{оп}}}{S_{\text{кр}}}\,, \qquad (11.6.37)$$

где $K_{\text{т.оп}}$, $k_{\text{т.оп}}$ — коэффициенты интерференции, которые для оперения вычисляют так же, как и значения $K_{\text{т.кр}}$, $k_{\text{т.кр}}$ для крыла. Более точное нахождение коэффициента подъемной силы хвостового участка комбинации «корпус — крыло — оперение» связано с определением поправки к этому коэффициенту, обусловленной интерференцией с крылом. Величина этой поправки

$$c_{y(\text{т,оп})\text{в}}=i_{\text{оп}}\frac{c^{\alpha}_{y\text{кр}}c^{\alpha}_{y\text{оп}}(K_{\text{кр}}\alpha+k_{\text{кр}}\delta_{v\text{кр}})(s_m-r)_{\text{оп}}k_2\Delta_{\varepsilon}}{2\pi\lambda_{\text{оп}}(r_v-r)_{\text{кр}}}\,. \qquad (11.6.38)$$

Коэффициент интерференции $i_{\text{оп}}$ в этом выражении определяется по графикам, изображенным на рис. 11.5.9, как функция $(r_m)_{\text{оп}}=r_{\text{оп}}/(s_m)_{\text{оп}}$; $\eta_{\text{оп}}$; $z_v/(s_m)_{\text{оп}}$; $y_v/(s_m)_{\text{оп}}$. При этом вертикальная координата вихря y_v (см. рис. 11.5.8) в случае поворота консоли крыла на некоторый угол $\delta_{v\text{кр}}$

$$y_v=(x_{\text{ц.т}})_{\text{оп}}\alpha-b_{\text{вр}}\delta_{v\text{кр}}, \qquad (11.6.39)$$

где $b_{\text{вр}}$ — расстояние между осью вращения консоли и точкой схода вихря.

Суммируя найденные значения составляющих коэффициента нормальной силы и добавляя коэффициент подъемной силы изолированного корпуса, получим суммарный коэффициент для всей комбинации

$$c_y=c_{y\text{т}}\frac{S_{\text{мид}}}{S_{\text{кр}}}+\Delta c_{y\text{кр}(\text{т})}+\Delta c_{y\text{т}(\text{кр})}+\Delta c_{y\text{оп}(\text{т})}+\Delta c_{y\text{т}(\text{оп})}+\Delta c_{y(\text{т,оп})\text{в}}. \qquad (11.6.40)$$

С учетом приведенных значений коэффициентов подъемной силы участков комбинации и соответствующих величин коэффициентов центра давления найдем по аналогии с (11.6.32) следующую зависимость для коэффициента центра давления всей комбинации (относительно носка корпуса):

$$c_{\text{ц.д}}=\frac{x_{\text{ц.д}}}{x_{\text{к}}}=-\frac{m_z}{c_y}=\frac{1}{c_y}\Big[(c_{\text{ц.д}})_{\text{т}}c_{y\text{т}}\frac{S_{\text{мид}}}{S_{\text{кр}}}+(c_{\text{ц.д}})_{\text{кр}(\text{т})}\Delta c_{y\text{кр}(\text{т})}+$$
$$+(c_{\text{ц.д}})_{\text{т}(\text{кр})}\Delta c_{y\text{т}(\text{кр})}+(c_{\text{ц.д}})_{\text{оп}(\text{т})}\Delta c_{y\text{оп}(\text{т})}+(c_{\text{ц.д}})_{\text{т}(\text{оп})}\Delta c_{y\text{т}(\text{оп})}+$$
$$+(c_{\text{ц.д}})_{(\text{т,оп})\text{в}}\Delta c_{y(\text{т,оп})\text{в}}\Big]. \qquad (11.6.41)$$

В этом выражении коэффициент центра давления для участка «корпус — оперение» (см. рис. 11.5.13)

$$(c_{\text{ц.д}})_{\text{оп(т)}}=\frac{(x_{\text{ц.д}})_{\text{оп(т)}}}{x_{\text{к}}}=\overline{x}_{\text{оп}}+(c'_{\text{ц.д}})_{\text{оп(т)}}\,(\overline{b}_{\text{кр}})_{\text{оп}}; \qquad (11.6.42)$$

$$(c_{\text{ц.д}})_{\text{т(оп)}}=\frac{(x_{\text{ц.д}})_{\text{т(оп)}}}{x_{\text{к}}}=\overline{x}_{\text{оп}}+(c'_{\text{ц.д}})_{\text{т(оп)}}\,(\overline{b}_{\text{кр}})_{\text{оп}}, \qquad (11.6.43)$$

где $\overline{x}_{\text{оп}}=x_{\text{оп}}/x_{\text{к}}$, $(\overline{b}_{\text{кр}})_{\text{оп}}=(b_{\text{кр}})_{\text{оп}}/x_{\text{к}}$ [$x_{\text{к}}$ — расстояние от носка корпуса до оперения; $(b_{\text{кр}})_{\text{оп}}$ — бортовая хорда оперения];

$$(c'_{\text{ц.д}})_{\text{оп(т)}}=\left(\frac{x_{\text{ц.д}}}{b_{\text{кр}}}\right)_{\text{оп(т)}}=\frac{K_{\text{оп}}\alpha\,(c_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{оп(т)}}+k_{\text{оп}}\delta_{v\text{оп}}\,(c_{\text{ц.д}})_{\delta\text{оп(т)}}}{K_{\text{оп}}\alpha+k_{\text{оп}}\delta_{v\text{оп}}}, \qquad (11.6.44)$$

$$(c'_{\text{ц.д}})_{\text{т(оп)}}=\left(\frac{x_{\text{ц.д}}}{b_{\text{кр}}}\right)_{\text{т(оп)}}=\frac{K_{\text{т.оп}}\alpha\,(c_{\text{ц.д}})_{\alpha\text{т(оп)}}+k_{\text{т.оп}}\delta_{v\text{оп}}\,(c_{\text{ц.д}})_{\delta\text{т(оп)}}}{K_{\text{т.оп}}\alpha+k_{\text{т.оп}}\delta_{v\text{оп}}}. \qquad (11.6.45)$$

Для участка комбинации «корпус — крыло» коэффициенты центра давления $(c_{\text{ц.д}})_{\text{кр(т)}}$, $(c_{\text{ц.д}})_{\text{т(кр)}}$ определяют по формулам (11.6.28), (11.6.30) с использованием (11.6.29), (11.6.31), а значение $(c_{\text{ц.д}})_{\text{(т,оп)в}}$ принимается равным $(c_{\text{ц.д}})_{\text{оп(т)}}$.

Для определения продольной эффективности рулей вычислим производные от коэффициента подъемной силы по углам отклонения органов управления $\delta_v=\delta_{v\text{кр}}$ и $\delta_v=\delta_{v\text{оп}}$. В соответствии с (11.6.40)

$$c_y^{\delta_{v\text{кр}}}=\Delta c_{y\text{кр(т)}}^{\delta_{v\text{кр}}}+\Delta c_{y\text{т(кр)}}^{\delta_{v\text{кр}}}+\Delta c_{y\text{(т,оп)в}}^{\delta_{v\text{кр}}}, \qquad (11.6.46)$$

где производные в правой части определяются дифференцированием по $\delta_{v\text{кр}}$ (11.6.33), (11.6.34), (11.6.38):

$$\Delta c_{y\text{кр(т)}}^{\delta_{v\text{кр}}}=k_{\text{кр}}c_{y\text{кр}}^{\alpha}k_1; \quad \Delta c_{y\text{т(кр)}}^{\delta_{v\text{кр}}}=k_{\text{т.кр}}c_{y\text{кр}}^{\alpha}k_1; \qquad (11.6.47)$$

$$\Delta c_{y\text{(т,оп)в}}^{\delta_{v\text{кр}}}=i_{\text{оп}}\frac{c_{y\text{кр}}^{\alpha}c_{y\text{оп}}^{\alpha}k_{\text{кр}}\,(s_m-r)_{\text{оп}}k_2\Delta_{\varepsilon}}{2\pi\lambda_{\text{оп}}\,(z_v-r)_{\text{кр}}}. \qquad (11.6.48)$$

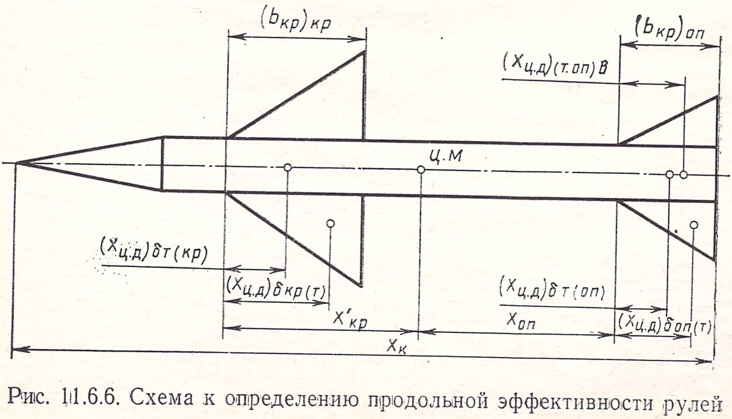

$(b_{кр})_{кр}$
$(b_{кр})_{оп}$
$(X_{ц.д})_{(т.оп)B}$
ц.м
$(X_{ц.д})_{\delta т(кр)}$
$(X_{ц.д})_{\delta кр(т)}$
$(X_{ц.д})_{\delta т(оп)}$
$X'_{кр}$
$X_{оп}$
$(X_{ц.д})_{\delta оп(т)}$
$X_к$

Рис. 11.6.6. Схема к определению продольной эффективности рулей

Выражение (11.6.48) учитывает изменение производной от коэффициента подъемной силы по углу поворота крыла, вызванное скосом потока перед оперением. Производная от этого коэффициента по углу отклонения консолей оперения согласно (11.6.40)

$$c_y^{\delta_{v\,\text{оп}}} = \Delta c_{y\text{оп(т)}}^{\delta_{v\,\text{оп}}} + \Delta c_{y\text{т(оп)}}^{v_{v\,\text{оп}}}. \tag{11.6.49}$$

Производные в правой части находятся по (11.6.36), (11.6.37):

$$\Delta c_{y\text{оп(т)}}^{\delta_{v\,\text{оп}}} = k_{\text{оп}} c_{y\text{оп}}^{\alpha} k_2 \frac{S_{\text{оп}}}{S_{\text{кр}}}; \quad \Delta c_{y\text{т(оп)}}^{\delta_{v\,\text{оп}}} = k_{\text{т.оп}} c_{y\text{оп}}^{\alpha} \frac{S_{\text{оп}}}{S_{\text{кр}}}. \tag{11.6.50}$$

Для определения продольной эффективности по углу отклонения крыла следует воспользоваться соотношением (рис. 11.6.6)

$$\begin{aligned} m_z^{\delta_{v\,\text{кр}}} = {} & \Delta c_{y\text{кр(т)}}^{\delta_{v\,\text{кр}}} [\bar{x}'_{\text{кр}} - (c_{\text{ц.д}})_{\delta\text{кр(т)}} (\bar{b}_{\text{кр}})_{\text{кр}}] + \\ & + \Delta c_{y\text{т(кр)}}^{\delta_{v\,\text{кр}}} [\bar{x}'_{\text{кр}} - (c_{\text{ц.д}})_{\delta\text{т(кр)}} (\bar{b}_{\text{кр}})_{\text{кр}}] - \\ & - \Delta c_{y(\text{т,оп})\text{в}}^{\delta_{v\,\text{кр}}} [\bar{x}_{\text{оп}} + (c_{\text{ц,д}})_{(\text{т,оп})\text{в}} (\bar{b}_{\text{кр}})_{\text{оп}}], \end{aligned} \tag{11.6.51}$$

где $\bar{x}'_{\text{кр}} = x'_{\text{кр}}/x_{\text{к}}$; $(\bar{b}_{\text{кр}})_{\text{кр}} = (b_{\text{кр}})_{\text{кр}}/x_{\text{к}}$; $\bar{x}_{\text{оп}} = x_{\text{оп}}/x_{\text{к}}$; $(\bar{b}_{\text{кр}})_{\text{оп}} = (b_{\text{кр}})_{\text{оп}}/x_{\text{к}}$.

Продольная эффективность по углу поворота консоли оперения

$$\begin{aligned} m_z^{\delta_{v\,\text{оп}}} = {} & - \Delta c_{y\text{оп(т)}}^{\delta_{v\,\text{оп}}} [\bar{x}_{\text{оп}} + (c_{\text{ц.д}})_{\delta\text{оп(т)}} (\bar{b}_{\text{кр}})_{\text{оц}}] - \\ & - \Delta c_{y\text{т(оп)}}^{\delta_{v\,\text{оп}}} [\bar{x}_{\text{оп}} + (c_{\text{ц.д}})_{\delta\text{т(оп)}} (\bar{b}_{\text{кр}})_{\text{оп}}]. \end{aligned} \tag{11.6.52}$$

В формулах (11.6.51), (11.6.52) коэффициенты центров давления вычислены как отношения соответствующих расстояний к бортовой хорде крыла или оперения, например $(c_{\text{ц.д}})_{\delta\text{кр(т)}} = (x_{\text{ц.д}})_{\delta\text{кр(т)}}/(b_{\text{кр}})_{\text{кр}}$; $(c_{\text{ц.д}})_{(\text{т,оп})\text{в}} = (x_{\text{ц.д}})_{(\text{т,оп})\text{в}}/(b_{\text{кр}})_{\text{оп}}$ и т. д.

Приведенные значения продольной эффективности могут быть отнесены к крестообразной конфигурации летательного аппарата, движущегося без скольжения ($\alpha \neq 0$, $\beta = 0$). Если такой аппарат накренен ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$), то возникает необходимость в определении наряду с продольной $m_z^{\delta v}$ также путевой $m_y^{\delta \psi}$ эффективности. При этом продольная эффективность может быть найдена при помощи формул (11.6.51) и (11.6.52) в плоскости угла $\alpha = \alpha_c \cos\varphi$, не учитывая взаимодействия между вертикальными и горизонтальными консолями. Аналогично определяется путевая эффективность, вычисляемая при симметричном отклонении вертикальных рулей ($\delta_\psi = \delta_{\psi\,\text{кр}}$; $\delta_\psi = \delta_{\psi\,\text{оп}}$) в плоскости угла скольжения $\beta = \alpha_c \sin\varphi$. При этом

$$m_z^{\delta_v} = - m_y^{\delta_\psi}. \tag{11.6.53}$$

В случае движения под углом крена продольная эффективность в плоскости угла атаки α_c возрастает, что объясняется увеличением несущей способности крестообразного оперения при повороте на угол φ.

Одна из причин снижения эффективности рулей и нарушения линейной зависимости их аэродинамических характеристик от угла отклонения связана с образованием щелей между органами управления и корпусом. Такое явление возникает при достаточно больших щелях, размеры которых возрастают по мере отклонения рулей. Снижение их несущей способности и нарушение линейности обусловлено резким падением перепада давления у корневой хорды, вызванным щелью.

Повышения эффективности органов управления и восстановления линейности можно достичь уменьшением в конструкции летательного аппарата размеров щелей и одновременно снижением допустимых углов отклонения рулей. При этом в реальных условиях вязкого обтекания пограничный слой как бы перекрывает малые щели, что приводит к уменьшению их отрицательного воздействия на рули.

Влияние щелей, образующихся в производственных и эксплуатационных условиях, на изменение эффективности рулей можно учесть введением поправочного множителя $k_{\text{щ}}$ в полученные выше значения аэродинамических характеристик органов управления. При дозвуковых скоростях ($\mathbf{M}_\infty < \mathbf{M}_{\infty\text{кр}}$) ориентировочно можно принять $k_{\text{щ}} = 0{,}8 \div 0{,}85$, а при повышенных числах Маха ($\mathbf{M}_\infty > 1{,}4$) коэффициент $k_{\text{щ}} = 0{,}9 \div 0{,}95$.

§ 11.7. АЭРОДИНАМИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Зависимости для определения аэродинамического сопротивления летательного аппарата в виде комбинации корпуса, крыльев и оперения должны учитывать влияние на сопротивление интерференции между отдельными элементами аппарата. Полное сопротивление X при наличии подъемной силы ($c_y \neq 0$) можно представить суммой сопротивления X_0 при нулевой подъемной силе, основной части индуктивного сопротивления X_i, создаваемой корпусом, крыльями и оперением, а также индуктивной составляющей ΔX_α, включающей некоторые неучтенные аэродинамические силы, появляющиеся вместе с подъемной силой, т. е. $X = X_0 + X_i + \Delta X_\alpha$. Соответствующий коэффициент полного сопротивления, отнесенный к некоторой характерной площади S,

$$c_x = X/(q_\infty S) = c_{x0} + c_{xi} + \Delta c_{x\alpha}. \tag{11.7.1}$$

Сопротивление при отсутствии подъемной силы ($c_y = 0$)

Величина коэффициента этого сопротивления

$$c_{x0} = \Delta c_{x\,\text{т}} + \Delta c_{x\,\text{кр}} + \Delta c_{x\,\text{оп}}, \tag{11.7.2}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\Delta c_{x\,\text{т}} = c_{x\,\text{т}} + \Delta c_{x\,\text{т(кр)}} + \Delta c_{x\,\text{т (оп)}};\\ &\Delta c_{x\,\text{кр}} = c_{x\,\text{кр}} + \Delta c_{x\,\text{кр (т)}};\ \ \Delta c_{x\,\text{оп}} = c_{x\,\text{оп}} + \Delta c_{x\,\text{оп (т)}}; \end{aligned}\right\} \tag{11.7.2'}$$

Здесь $c_{x\text{т}}$, $c_{x\text{кр}}$ и $c_{x\text{оп}}$ — соответственно коэффициенты сопротивления изолированных корпуса, крыльев и оперения; остальные компоненты в сумме дают поправку на интерференцию. Индекс в скобке у каждой составляющей указывает элемент конструкции, в результате интерференции с которым появляется дополнительное сопротивление корпуса, крыла и оперения.

Основной частью сопротивления всей комбинации является сопротивление ее изолированных элементов

$$\Delta c_{x0} = c_{x\,\text{т}} + c_{x\,\text{кр}} + c_{x\,\text{оп}}. \tag{11.7.3}$$

Выделив из каждой составляющей сопротивление, вызванное разрежением за донным срезом (донное сопротивление), можно написать:

$$\Delta c_{x0} = c'_{x\text{т}} + c'_{x\,\text{кр}} + c'_{x\,\text{оп}} + c_{x\,\text{т.дон}} + c_{x\,\text{кр.дон}} + c_{x\,\text{оп.дон}}, \tag{11.7.3$'$}$$

где первые три величины — коэффициенты сопротивления от давления и трения на корпусе, крыле и оперении, а вторые три компонента — соответствующие составляющие коэффициента донного сопротивления.

Корпус. Полное сопротивление корпуса определяется с учетом его формы, которая в общем случае может отличаться от тела вращения. Если это отличие невелико, то корпус рассматривается как тело вращения с распределением радиусов вдоль продольной оси x, подчиняющимся закону $r(x) = \sqrt{S(x)/\pi}$, где $S(x)$ — площадь поперечного сечения корпуса заданной формы. У такого тела вращения подъемная сила и моментные характеристики, как показывают исследования, сохраняются такими же, как у корпуса заданной формы. Различие в сопротивлении оказывается более существенным, поэтому его целесообразно учитывать. Отклонение формы корпуса от тела вращения может происходить из-за различного рода «надстроек», например обтекателей, антенных устройств и т. д.

Аэродинамическое сопротивление корпуса зависит от расположения надстроек. Исследования показывают, что наименьшим будет сопротивление при среднем расположении этих надстроек. При выносе вперед надстроек сопротивление возрастает из-за повышенного давления на носовую часть, а при заднем расположении увеличивается вследствие срыва потока и повышения донного разрежения. Сопротивление, обусловленное таким разрежением за донным срезом площадью $S_{\text{дон}}$, определяется величиной коэффициента донного давления $\bar{p}_{\text{дон}} = (p_{\text{дон}} - p_\infty)/q_\infty$, поэтому коэффициент $c_{x\text{т.дон}}$ в (11.7.3′), отнесенный к характерной площади S, будет (рис. 11.7.1)

$$c_{x\,\text{т.дон}} = \frac{X_{\text{т.дон}}}{q_\infty S} = \frac{-(p_{\text{дон}} - p_\infty)\,S_{\text{дон}}}{q_\infty S} = -\bar{p}_{\text{дон}}\frac{S_{\text{дон}}}{S}. \tag{11.7.4}$$

В практических случаях при вычислении сопротивления можно принять, что его составляющая, обусловленная трением, не зависит от интерференции. Тогда следует учитывать изменение только сопротивления от давления корпуса вследствие интерференции с несущими поверхностями. При этом, если крылья и оперение расположены на цилиндрической части корпуса, то его сопротивление не изменяется. Если же крылья или оперение находятся на сужающихся или расширяющихся участках корпуса, то влияние интерференции может оказаться существенным. Приближенно величины $\Delta c_{x\,\text{т}\,(\text{кр})}$ или $\Delta c_{x\,\text{т}\,(\text{оп})}$ можно определить, исходя из предположения, что корпус находится в поле давления изолированной консоли несущей или стабилизирующей поверхности, которое может быть вычислено по сверхзвуковой теории крыла (см. § 8.3).

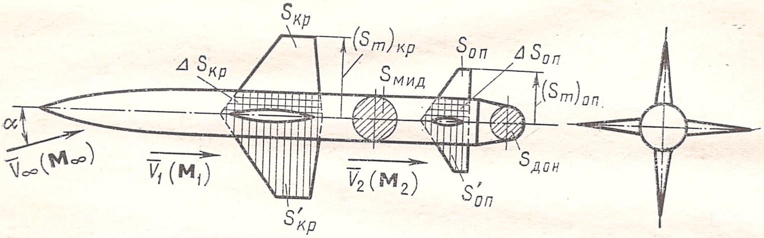


Рис. 11.7.1. Схема летательного аппарата для расчета аэродинамического сопротивления

Крылья и оперение. При расчете сопротивления изолированных крыльев и оперения их форму целесообразно рассматривать в виде консолей, выступающих над корпусом, и фиктивных участков несущей поверхности, расположенных внутри корпуса. У такого крыла (или оперения) сохраняются прежний размах, но увеличивается площадь ($S'_{\text{кр}}$). Значение $c_{x\text{кр}}(X_{\text{кр}})$ [или $c_{x\text{оп}}(X_{\text{оп}})$], учитываемое формулой (11.7.2), определяется сопротивлением этого крыла за вычетом той его части, которая приходится на фиктивный участок крыла площадью $\Delta S_{\text{кр}}$, расположенного под корпусом,

$$c_{x\,\text{кр}} = (c_{x\,\text{кр}})_{\text{из}}\,(1 - \Delta S_{\text{кр}}/S'_{\text{кр}}),$$

где $(c_{x\,\text{кр}})_{\text{из}}$ — коэффициент сопротивления пары консолей, рассчитанный для значения $S'_{\text{кр}}$ с учетом площади под корпусом.

Влияние интерференции на сопротивление можно учесть, введя поправку к написанному выражению для $c_{x\text{кр}}$ в виде

$$c_{x\,\text{кр}} = (c_{x\,\text{кр}})_{\text{из}}\left(1 - k_{\text{и.кр}}\,\frac{\Delta S_{\text{кр}}}{S'_{\text{кр}}}\right), \qquad (11.7.5)$$

где $k_{\text{и.кр}}$ — коэффициент интерференции, изменяющийся в широких пределах в зависимости от расположения крыла на корпусе и характера их сопряжения, а также формы и удлинения крыла. При небольшой стреловидности и удлинении ($\lambda_{\text{кр}} > 2$) крыльев, плавно сопряженных с корпусом, величина $k_{\text{и.кр}}$ мало отличается от единицы. При положительной интерференции, уменьшающей сопротивление, величина $k_{\text{и.кр}}>1$.

Сопротивление консолей (оперения) вычисляют так же, как и для крыла. Согласно полученным результатам, сумму членов $\Delta c_{x\text{кр}}+\Delta c_{x\text{оп}}$, входящую в (11.7.2), можно написать в виде

$$\Delta c_{x\,\text{кр}}+\Delta c_{x\,\text{оп}}=(c_{x\,\text{кр}})_{\text{из}}\left(1-k_{\text{и.кр}}\frac{\Delta S_{\text{кр}}}{S'_{\text{кр}}}\right)\frac{\sum S'_{\text{кр}}}{S}k_1+$$
$$+(c_{x\,\text{оп}})_{\text{из}}\left(1-k_{\text{и.оп}}\frac{\Delta S_{\text{оп}}}{S'_{\text{оп}}}\right)\frac{\sum S'_{\text{оп}}}{S}k_2, \qquad (11.7.6)$$

где $\sum S'_{\text{кр}}$, $\sum S'_{\text{оп}}$ — суммарные площади консолей с учетом участков занятых корпусом; k_1, k_2 — коэффициенты торможения потока; $(c_{x\,\text{кр}})_{\text{из}}$, $(c_{x\,\text{оп}})_{\text{из}}$ — коэффициенты сопротивления изолированных крыльев и оперения, вычисленные соответственно для чисел $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ потоков перед крыльями и оперением.

Полное сопротивление при $c_y=0$. Сумма составляющих коэффициента $\Delta c_{x\text{т}}$ (11.7.2′), относящаяся к корпусу,

$$\Delta c_{x\,\text{т}}=(c'_{x\,\text{т}}+\Delta c'_{x\,\text{т(кр)}}+\Delta c'_{x\,\text{т(оп)}})\frac{S_{\text{мид}}}{S}, \qquad (11.7.7)$$

где коэффициенты со штрихом рассчитаны по миделеву сечению корпуса, а величина $\Delta c_{x\text{т}}$ отнесена к характерной площади S рассматриваемой комбинации. Принимая во внимание (11.7.6), найдем общее соотношение для полного коэффициента сопротивления:

$$c_x=(c'_{x\,\text{т}}+\Delta c'_{x\,\text{т(кр)}}+\Delta c'_{x\,\text{т(оп)}})\frac{S_{\text{мид}}}{S}+$$
$$+(c_{x\,\text{кр}})_{\text{из}}\left(1-k_{\text{и.кр}}\frac{\Delta S_{\text{кр}}}{S'_{\text{кр}}}\right)\frac{\sum S_{\text{кр}}}{S}k_1+$$
$$+(c_{x\,\text{оп}})_{\text{из}}\left(1-k_{\text{и.оп}}\frac{\Delta S_{\text{оп}}}{S'_{\text{оп}}}\right)\frac{\sum S_{\text{оп}}}{S}k_2. \qquad (11.7.8)$$

Согласно экспериментальным исследованиям, у большей части конструкций влияние интерференции на сопротивление оказывается небольшим и может быть учтено введением к коэффициенту сопротивления Δc_{x0} (11.7.3) некоторого суммарного коэффициента интерференции $k_{\text{с}}$. В соответствии с этим полный коэффициент сопротивления $c_x=\Delta c_{x0}k_{\text{с}}$. Коэффициент $k_{\text{с}}$ зависит от ряда факторов, в частности, скорости и высоты полета, схемы летательного аппарата, конструкции его отдельных элементов. Величина этого коэффициента обычно мало отличается от единицы и в приближенных расчетах может быть принята равной $k_{\text{с}}\approx 1{,}05\div 1{,}06$.

Правило площадей. Практический интерес представляет оценка сопротивления комбинации «корпус — крыло», основанная на использовании правила площадей. Согласно этому правилу, сопротивление указанной комбинации равно его соответствующему значению для изолированного корпуса, имеющего то же распределение площадей поперечного сечения, что и комбинация «корпус — крыло». Такой изолированный корпус называют **эквивалентным телом**.

При построении эквивалентного тела комбинация «корпус — крыло» рассекается поперечными плоскостями, перпендикулярными продольной оси, и измеряется площадь в выбранном сечении. Эта площадь считается принадлежащей эквивалентному телу, которое отличается по внешнему виду от заданного корпуса тем, что начиная с сечения, где расположены передние кромки, такое тело приобретает выпуклую форму (рис. 11.7.2). Если форма эквивалентного тела определена, то коэффициент его волнового сопротивления можно найти, например, при помощи интегрального соотношения (10.3.28). Входящая в него вторая производная $S''_{(\varepsilon)}$ вычисляется для эквивалентного тела.

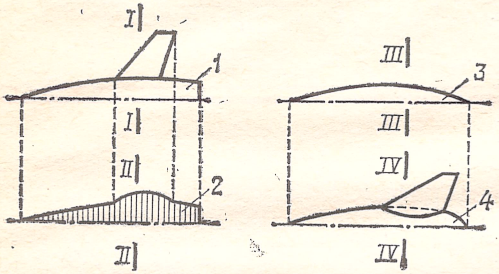


Рис. 11.7.2. Применение правила площадей для расчета аэродинамического сопротивления:

1 — заданная конфигурация летательного аппарата; *2* — эквивалентное тело вращения с наплывом (в сечениях *I—I* и *II—II* площади сечений одинаковы); *3* — тело вращения минимального сопротивления; *4* — форма эквивалентного тела (с поджатием корпуса), имеющего уменьшенное сопротивление (площади в сечениях *III—III* и *IV—IV* одинаковы)

В сверхзвуковом диапазоне скоростей изложенный метод применим только для очень тонких конфигураций со стреловидными

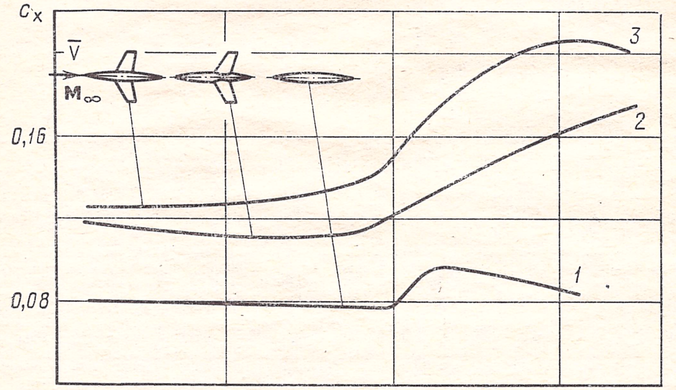


Рис. 11.7.3. Коэффициент сопротивления летательного аппарата, спроектированного по правилу площадей:

1 — корпус минимального сопротивления; *2* — комбинация «корпус — крыло», спроектированная по правилу площадей; *3* — такая же комбинация, в компоновке которой не учитывается правило площадей крыльями малого удлинения. Метод можно применять и для нестреловидных крыльев при условии, что $M_\infty \leqslant 1$.

Экспериментальные исследования показали, что правило площадей можно использовать для получения такой компоновки летательного аппарата, которая бы обеспечила в области трансзвуковых скоростей наименьшее сопротивление. В соответствии с этим правилом летательный аппарат следует сконструировать таким образом, чтобы площади его поперечных сечений изменялись вдоль продольной оси аппарата по тому же закону, что у тела вращения с минимальным сопротивлением (рис. 11.7.2).

На рис. 11.7.3 показана экспериментальная зависимость от чисел M_∞ коэффициента сопротивления c_x при $c_y=0$, из которой видно, что комбинация «корпус — крыло», спроектированная по правилу площадей, имеет меньшее сопротивление по сравнению с комбинацией, спроектированной без учета этого правила.

Применение правила площадей дает удовлетворительные результаты для околозвукового диапазона чисел Маха, изменяющихся в пределах $0{,}8 < M_\infty < 1{,}4$.

Индуктивное сопротивление

В случае $c_y \neq 0$ дополнительное (индуктивное) сопротивление определяется суммой соответствующих аэродинамических коэффициентов $c_{xi}+\Delta c_{x\alpha}$ [см. (11.7.1)]. В свою очередь коэффициент индуктивного сопротивления c_{xi} для дозвуковых скоростей можно рассматривать как сумму коэффициентов индуктивных сопротивлений горизонтальных консолей крыла $(c_{xi})_{\text{кр}}$ и оперения $(c_{xi})_{\text{оп}}$ (при отсутствии скольжения):

$$c_{xi}=(c_{xi})_{\text{кр}}+(c_{xi})_{\text{оп}}=(\bar{c}_{xi})_{\text{кр}}\frac{S'_{\text{кр}}}{S}k_1+(\bar{c}_{xi})_{\text{оп}}\frac{S'_{\text{оп}}}{S}k_2, \quad (11.7.9)$$

где

$$(\bar{c}_{xi})_{\text{кр}}=(c_y^2)_{\text{кр}}/[\pi(\lambda_{\text{эф}})_{\text{кр}}]; \ (\bar{c}_{xi})_{\text{оп}}=(c_y^2)_{\text{оп}}/[\pi(\lambda_{\text{эф}})_{\text{оп}}]. \quad (11.7.10)$$

В этих выражениях коэффициенты подъемной силы находят для изолированных консолей с учетом площади под корпусом, т. е. по их действительному размаху. Для учета интерференции введены эмпирические коэффициенты, представляющие собой эффективные удлинения:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda_{\text{эф}})_{\text{кр}}&=\lambda_{\text{кр}}(1+\Delta S_{\text{кр}}/S'_{\text{кр}});\\(\lambda_{\text{эф}})_{\text{оп}}&=\lambda_{\text{оп}}(1+\Delta S_{\text{оп}}/S'_{\text{оп}}),\end{aligned}\right\} \quad (11.7.11)$$

где $\lambda_{\text{кр}}=4(s_m^2)_{\text{кр}}/S'_{\text{кр}}$; $\lambda_{\text{оп}}=4(s_m^2)_{\text{оп}}/S'_{\text{оп}}$ — соответственно удлинения изолированных крыльев и оперения.

При сверхзвуковых скоростях коэффициент индуктивного сопротивления $c_{xi}=X_i/(q_\infty S)=c_y\alpha$. Согласно (11.5.59), (11.6.26), (11.6.36) и (11.6.37),

$$c_{xi}=c_{y\text{т}}\alpha\,\frac{S_{\text{мид}}}{S}+\left\{\left[(K_{\text{кр}}+K_{\text{т}})_{\text{кр}}+(k_{\text{кр}}+k_{\text{т}})_{\text{кр}}\,\frac{\delta_{v\,\text{кр}}}{\alpha}\right]k_1 c^{\alpha}_{y\,\text{кр}}\,\frac{S_{\text{кр}}}{S}+\right.$$

$$\left.+\left[(K_{\text{кр}}+K_{\text{т}})_{\text{оп}}+(k_{\text{кр}}+k_{\text{т}})_{\text{оп}}\,\frac{\delta_{v\,\text{оп}}}{\alpha}\right]k_2\Delta_{\varepsilon}\,(\eta_{\text{оп}}-1)\,c^{\alpha}_{y\,\text{оп}}\right\}\alpha^2. \qquad (11.7.12)$$

Рассмотрим составляющую полного коэффициента сопротивления $c_{x\alpha}=\Delta X_{\alpha}/(q_{\infty}S)$, зависящую от угла атаки [см. (11.7.1)]. Величина этого коэффициента в значительной мере определяется подсасывающей («реактивной» или «подталкивающей») силой крыльев и оперения, при вычислении которой необходимо учесть изменение их подъемной силы за счет интерференции с корпусом. Согласно (8.11.5), а также принимая во внимание (11.9.59), (11.6.36) и (11.6.37), запишем (с учетом отрицательного знака):

$$(\Delta c_{x\alpha})_{\text{кр}}+(\Delta c_{x\alpha})_{\text{оп}}=(c_{x\,\text{т}})_{\text{кр}}+(c_{x\,\text{т}})_{\text{оп}}=$$

$$=-\left[(\bar{c}_{\text{т}}\Delta_{\text{т}})_{\text{кр}}\left\{\left[(K_{\text{кр}}+K_{\text{т}})_{\text{кр}}+(k_{\text{кр}}+k_{\text{т}})_{\text{кр}}\,\frac{\delta_{v\,\text{кр}}}{\alpha}\right]k_1 c^{\alpha}_{y\,\text{кр}}\right\}^2\frac{S_{\text{кр}}}{S}+\right.$$

$$\left.+(\bar{c}_{\text{т}}\Delta_{\text{т}})_{\text{оп}}\left\{\left[(K_{\text{кр}}+K_{\text{т}})_{\text{оп}}+(k_{\text{кр}}+k_{\text{т}})_{\text{оп}}\,\frac{\delta_{v\,\text{оп}}}{\alpha}\right]k_2\Delta_{\varepsilon}\,(\eta_{\text{оп}}-1)\,c^{\alpha}_{y\,\text{оп}}\right\}^2\frac{S_{\text{оп}}}{S}\right]\alpha^2. \qquad (11.7.13)$$

В частном случае, когда рули не отклонены ($\delta_{v\text{кр}}=\delta_{v\text{оп}}=0$),

$$(\overline{\Delta}c_{x\alpha})_{\text{кр}}+(\Delta c_{x\alpha})_{\text{оп}}=-\left\{(\bar{c}_{\text{т}}\Delta_{\text{т}})_{\text{кр}}\left[(K_{\text{кр}}+K_{\text{т}})^2_{\text{кр}}k_1^2\,(c^{\alpha}_{y\,\text{кр}})^2\,\frac{S_{\text{кр}}}{S}\right]+\right.$$

$$\left.+(c_{\text{т}}\Delta_{\text{т}})_{\text{оп}}\left[(K_{\text{кр}}+K_{\text{т}})^2_{\text{оп}}k_2^2\Delta_{\varepsilon}^2\,(\eta_{\text{оп}}-1)^2\,(c^{\alpha}_{y\,\text{оп}})^2\,\frac{S_{\text{оп}}}{S}\right]\right\}\alpha^2. \qquad (11.7.13')$$

При определении подсасывающей силы крыльев и оперения при дозвуковых скоростях ($\mathbf{M}_{\infty}<1$) можно использовать формулы (8.11.5) и (8.11.6), предусматривая для тонких конфигураций коэффициенты интерференции с корпусом такими, как в (11.7.13). Коэффициент подсасывающей силы корпуса, вычисленный по характерной площади S, определяется в соответствии с (10.5.43) в виде

$$(\Delta c_{x\alpha})_{\text{т}}=c_{x\text{т}}=\xi\alpha^2\,(S_{\text{мид}}/S). \qquad (11.7.14)$$

Таким образом, дополнительный коэффициент сопротивления

$$\Delta c_{x\alpha}=(\Delta c_{x\alpha})_{\text{т}}+(\Delta c_{x\alpha})_{\text{кр}}+(\Delta c_{x\alpha})_{\text{оп}}. \qquad (11.7.15)$$

У многих летательных аппаратов, предназначенных для полетов с большими скоростями, крылья и оперение выполняют с заостренными передними кромками, поэтому сумма $(\Delta c_{x\alpha})_{\text{кр}}+(\Delta c_{x\alpha})_{\text{оп}}=0$.

Если принять также во внимание, что подсасывающая сила корпуса составляет незначительную часть полного сопротивления, то можно считать $(\Delta c_{x\alpha})_{\text{т}} \approx 0$. В соответствии с этим коэффициент сопротивления, обусловленный углом атаки, определяется формулой $c_{xi} = c_y \alpha$, т. е. зависимостью (11.7.12). В этой зависимости можно принять $\delta_{v\text{кр}} = \delta_{v\text{оп}} \approx 0$ для тех летательных аппаратов, у которых подъемная сила при отклонении рулей меняется незначительно и, следовательно, пренебрежимо мало индуктивное сопротивление, вызванное этим отклонением.

ГЛАВА XII

ТРЕНИЕ

§ 12.1. УРАВНЕНИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Рассмотрим установившееся плоское движение вязкой сжимаемой жидкости на криволинейной поверхности. Дифференциальные уравнения Навье — Стокса, применяемые для исследования этого движения, имеют вид первых двух уравнений в системе (3.3.10). Заменяя в них $\operatorname{div} \overline{V} = \partial V_x/\partial x + \partial V_y/\partial y$, $\varepsilon_z = 0{,}5\,(\partial V_x/\partial y + \partial V_y/\partial x)$ и полагая частные производные $\partial V_x/\partial t$ и $\partial V_y/\partial t$ равными нулю, получим:

$$\left.\begin{aligned}
&V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu\left[2\frac{\partial V_x}{\partial x} - \right.\right.\\
&\qquad \left.\left. - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y}\right)\right]\right\} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right)\right];\\
&V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left\{\mu\left[2\frac{\partial V_y}{\partial y} - \right.\right.\\
&\qquad \left.\left. - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y}\right)\right]\right\} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right)\right].
\end{aligned}\right\} \quad (12.1.1)$$

Будем рассматривать течение жидкости с малой вязкостью, т. е. с малыми значениями коэффициента $\nu = \mu/\rho$. Из (12.1.1) видно, что если вязкость является существенной особенностью течения, то сомножители при ν должны быть достаточно большими, чтобы компенсировать малые значения ν. В свободном потоке влияние торможения, вызванного силами трения, невелико, поэтому малыми будут изменения скорости в различных направлениях, которые определяются производными $\partial V_x/\partial x$, $\partial V_x/\partial y$ и т. д. Вследствие этого малыми будут сомножители при ν и в уравнениях можно пренебречь членами, учитывающими влияние сил трения. В результате приходим к выводу, что исследование течения в свободном потоке можно вести на основе уравнения Эйлера для идеальной (невязкой) жидкости. По мере приближения к обтекаемой поверхности все больше сказывается влияние вязкости, и это проявляется в более значительном изменении скорости. Поэтому членами, содержащими в качестве сомножителя ν, который характеризует влияние вязкости, пренебрегать уже нельзя и для исследования такого вязкого течения необходимо применять уравнения Навье — Стокса (12.1.1). В этом заключается первое положение теории пограничного слоя.

Второе положение этой теории заключено в возможности упрощения уравнений Навье — Стокса при изучении движения жидкости в пограничном слое, характеризующемся малой толщиной δ. Рассмотрим вывод этих упрощенных уравнений пограничного слоя, основанный на определении порядка членов в (12.1.1) и последующем их сравнении.

В соответствии с предпосылкой о малости толщины пограничного слоя примем, что $\delta \ll L$, где L — характерный линейный размер, например длина обтекаемого тела (рис. 12.1.1). Так как для координаты y точки пограничного слоя можно написать неравенство $0 \leqslant y \leqslant \delta$, то, следовательно, порядок величины координаты $y \sim \delta$. Вторая координата x, определяющая расстояние вдоль пограничного слоя, имеет порядок $L (x \sim L)$. Если ввести обозначение V_δ для скорости на внешней границе пограничного слоя, то порядок скорости V_x в произвольной точке пограничного слоя с координатой y будет $V_x \sim V_\delta$.

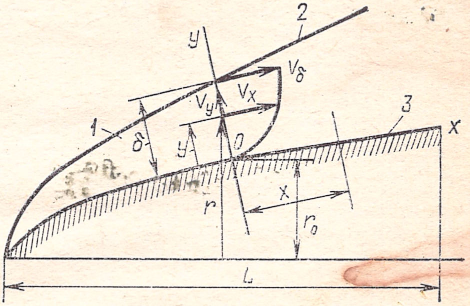


Рис. 12.1.1. Схема пограничного слоя:
1 — пограничный слой; *2* — граница пограничного слоя, *3* — обтекаемая поверхность

Для определения порядка величины второй составляющей скорости воспользуемся уравнением неразрывности (2.4.50′), из которого найдем

$$V_y \sim \frac{1}{\rho} \int_0^\delta \frac{\partial (\rho V_x)}{\partial x} dy.$$

Примем порядок плотности ρ равным величине плотности ρ_δ на границе пограничного слоя. Чтобы оценить порядок производной $\partial(\rho V_x)/\partial x$, воспользуемся следующим условием: при перемещении вдоль поверхности на расстояние порядка характерной длины L величина ρV_x может измениться на величину порядка $\rho_\delta V_\delta$ (например, от 0 до $\rho_\delta V_\delta$), т. е. в данном случае $\Delta(\rho V_x) \sim \rho_\delta V_\delta$. Так как было принято, что $\Delta x \sim L$, то

$$\partial(\rho V_x)/\partial x \sim \rho_\delta V_\delta / L. \qquad (12.1.2)$$

Поэтому для V_y напишем

$$V_y \sim (1/\rho_\delta L)\, \rho_\delta V_\delta \delta = V_\delta \delta / L. \qquad (12.1.3)$$

Порядок производных, входящих в (12.1.1), будем определять по аналогии с (12.1.2). Например,

$$\partial V_x/\partial x \sim V_\delta/L,\ \partial V_y/\partial x \sim (V_\delta\delta/L)(1/L)=V_\delta\delta/L^2 \text{ и т. д.} \qquad (12.1.4)$$

С учетом этих результатов рассмотрим первое уравнение (12.1.1). Порядок слагаемых в левой части этого уравнения будет следующим:

$$\left.\begin{aligned} &V_x(\partial V_x/\partial x)\sim V_\delta(V_\delta/L)=V_\delta^2/L;\\ &V_y(\partial V_x/\partial y)\sim (V_\delta\delta/L)(V_\delta/\delta)=V_\delta^2/L. \end{aligned}\right\} \qquad (12.1.5)$$

Как видно из (12.1.5), оба слагаемых имеют одинаковый порядок.

Для членов, учитывающих влияние сил трения, расположенных в правой части уравнения, находим:

$$\left.\begin{aligned} &\underbrace{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)\sim\frac{\mu}{\rho}\cdot\frac{V_\delta}{L^2}}_{1},\ \underbrace{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)\sim\frac{\mu}{\rho}\cdot\frac{V_\delta}{L^2}}_{2};\\ &\underbrace{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\sim\frac{\mu}{\rho}\cdot\frac{V_\delta}{\delta^2}}_{3},\ \underbrace{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)\sim\frac{\mu}{\rho}\cdot\frac{V_\delta}{L^2}}_{4}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.1.6)$$

Из (12.1.6) видно, что так как $\delta \ll L$, то первый, второй и четвертый члены имеют более высокий порядок малости и ими по сравнению с третьим членом можно пренебречь.

Порядок слагаемого $(1/\rho)\partial p/\partial x$ определяется из уравнения Бернулли (3.4.11). Опуская в нем потенциальную функцию U (полагая тем самым, что вес газа не оказывает влияния на движение) и производя дифференцирование, найдем уравнение $VdV=-dp/\rho$. Это уравнение, относящееся, очевидно, к внешней границе пограничного слоя, где трение пренебрежимо мало́, можно написать также в виде $(1/\rho)\partial p/\partial x=-V\partial V/\partial x$. Отсюда следует, что величина $(1/\rho)\partial p/\partial x$ имеет порядок $V_\delta{}^2/L$.

Если рассматривать течение, существенной особенностью которого является влияние вязкости, то следует принять порядок оставшегося и единственного члена, учитывающего вязкость, $(1/\rho)\partial(\mu\partial V_x/\partial y)/\partial y$ таким, как и всех остальных членов, т. е.

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\sim\frac{V_\delta^2}{L}. \qquad (12.1.7)$$

Таким образом, вместо первого уравнения (12.1.1) можно написать

$$V^x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p_\delta}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial V_x}{\partial y}\right). \qquad (12.1.8)$$

Рассмотрим второе уравнение (12.1.1). Порядок входящих в него членов определяется аналогично первому уравнению и будет следующим:

$$\underbrace{V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y}}_{V_\delta^2 \delta / L^2} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \underbrace{\frac{4}{3\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial V_y}{\partial y}\right)}_{(\mu/\rho) V_\delta / (L\delta)} -$$

$$-\underbrace{\frac{2}{3\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial V}{\partial x}\right)}_{(\mu/\rho) V_\delta / (L\delta)} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)}_{(\mu/\rho) V_\delta / (L\delta)} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial V_y}{\partial x}\right)}_{(\mu/\rho) V_\delta \delta / L^3}. \quad (12.1.9)$$

Последним членом в правой части можно пренебречь, так как он имеет более высокий порядок малости, чем другие члены, учитывающие влияние вязкости. Для уточнения порядка других членов, учитывающих влияние вязкости, определим порядок величины $\mu/\rho = \nu$. С этой целью применим найденное соотношение (12.1.7). Порядок величины в левой части этого соотношения определен третьим выражением (12.1.6), поэтому $(\mu/\rho) V_\delta/\delta^2 \sim V_\delta^2/L$, откуда находим порядок коэффициента кинематической вязкости:

$$\mu/\rho = \nu \sim V_\delta \delta^2 / L. \quad (12.1.10)$$

В результате этого порядок оставшихся членов в правой части (12.1.9), учитывающих влияние вязкости, будет таким:

$$(\mu/\rho) V_\delta / (L\delta) \sim (V_\delta \delta^2 / L) V_\delta / (L\delta) = V_\delta^2 \delta / L^2. \quad (12.1.11)$$

Очевидно, такой же порядок будет иметь величина $(1/\rho) \partial p / \partial y$. В соответствии с этим порядок отношения градиентов $\partial p/\partial y$ и $\partial p/\partial x$ определяется значением δ/L, т. е. градиент $\partial p/\partial y \ll \partial p/\partial x$. Поэтому с достаточной степенью точности второе уравнение системы (12.1.1) можно заменить уравнением

$$\partial p / \partial y = 0. \quad (12.1.12)$$

Согласно этому выражению, *давление в пограничном слое в направлении нормали к стенке не меняется и равно давлению p_δ на внешней границе пограничного слоя*. Из этого следует, что тонкий пограничный слой не оказывает влияния на распределение давления. Полученный результат составляет содержание одной из важных гипотез теории пограничного слоя, а именно *гипотезы об отсутствии обратного влияния пограничного слоя на свободный поток*. В соответствии с этой гипотезой расчет распределения давления по поверхности обтекаемого тела при наличии пограничного слоя можно вести на основе уравнений Эйлера для идеальной (невязкой) среды, а касательных напряжений — исходя из упрощенного уравнения (12.1.8). Это уравнение — основное в теории пограничного слоя — называют *уравнением Прандтля*.

Такой расчет при помощи уравнений Эйлера и Прандтля можно вести до тех пор, пока толщина пограничного слоя мала по сравнению с размерами обтекаемого тела и, следовательно, имеет силу гипотеза об отсутствии обратного влияния пограничного слоя на свободный поток. На удаленных участках поверхности, где толщина пограничного слоя велика, эта гипотеза теряет свою силу и расчет вязкого обтекания следует вести, строго говоря, на основе общих уравнений Навье — Стокса.

Рассматривая уравнение Прандтля (12.1.8), замечаем, что в него входит коэффициент динамической вязкости μ, являющийся в общем случае функцией давления и температуры. Для данного сечения пограничного слоя, характеризующегося постоянным давлением p_δ, величина μ будет изменяться по толщине слоя как функция температуры T. Это же относится и к плотности ρ. Таким образом, для нахождения решений для μ и ρ надо знать вид функции $T(y)$. Чтобы определить эту функцию, необходимо воспользоваться уравнением энергии, имеющим вид последнего уравнения системы (3.3.10).

Как и уравнение Навье — Стокса, уравнение энергии для пограничного слоя упрощается. Соответствующие преобразования с целью вывода упрощенного уравнения энергии будут приведены в гл. XIII. Воспользуемся полученным уравнением в форме (13.2.5′), соответствующей отсутствию в пограничном слое какого-либо другого вида переноса тепла, кроме теплопроводности. Если принять в этом уравнении число Прандтля равным единице ($\mathbf{Pr}=1$), то оно примет вид (13.2.6). Очевидно, одним из возможных интегралов уравнения (13.2.6) будет равенство $i_0=\text{const}$, отражающее условие постоянства полной энтальпии частицы газа, т. е. согласно (13.2.2) равенство

$$i_0=i+V_x^2/2=\text{const}. \qquad (12.1.13)$$

Можно показать, что это равенство соответствует условию отсутствия теплопередачи у стенки, т. е. случаю теплоизолированной поверхности. Действительно, полагая $i=c_pT$ и дифференцируя (12.1.13) по y, найдем

$$c_p(\partial T/\partial y)+V_x(\partial V_x/\partial y)=0.$$

Так как при $y\to0$ скорость $V_x\to0$, то, очевидно, и производная $\partial T/\partial y\to0$ (нет перепада температуры), что и доказывает отсутствие теплопередачи у стенки. Таким образом, вместо сложного уравнения энергии в виде (13.2.5′) будем применять уравнение в простой форме (12.1.13). Естественно, такая форма уравнения энергии не соответствует полностью реальному характеру движения вязкого газа в пограничном слое и дает приближенные значения для параметров, определяющих это движение, в частности для напряжения трения. Однако полученные результаты оказываются приемлемыми для практических расчетов трения.

Уравнение Прандтля, а также уравнения неразрывности, состояния и энергии составляют систему уравнений сжимаемого пограничного слоя:

$$\left.\begin{aligned} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp_\delta}{dx} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial V_x}{\partial y}\right); \\ \partial (V_x\rho)/\partial x + \partial (V_y\rho)/\partial y = 0; \\ p_\delta = R\rho T;\ i + V_x^2/2 = i_0. \end{aligned}\right\} \qquad (12.1.14)$$

Здесь в уравнениях движения и состояния давление p заменено в соответствии с (12.1.12) величиной p_δ. В уравнении энергии текущее значение энтальпии $i = c_p T$, а энтальпия торможения $i_0 = c_p T_0$.

Полученная система уравнений пригодна для исследования ламинарного пограничного слоя. При ее решении следует удовлетворить граничным условиям на поверхности обтекаемого тела и условиям непрерывного перехода параметров в пограничном слое к соответствующим их значениям на внешней границе. Причем такое решение вызывает необходимость асимптотического выполнения условий на внешней границе. В соответствии со сказанным граничные условия для скорости имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} V_x = V_y = 0 \quad &\text{при } y = 0; \\ V_x = V_\delta(x) \quad &\text{при } y \to \infty. \end{aligned}\right\} \qquad (12.1.15)$$

Входящие в (12.1.14) плотность и температура могут быть выражены через скорость в пограничном слое.

Из (12.1.13) следует, что

$$c_p T + V_x^2/2 = c_p T_0, \qquad (12.1.16)$$

следовательно,

$$T = T_0 (1 - V_x^2/V_{\max}^2). \qquad (12.1.17)$$

Используя уравнение состояния $p = \rho RT$, в котором для пограничного слоя давление p принимается равным его значению p_δ на границе слоя, получим зависимости для плотности

$$\rho = p_\delta/(RT) = (p_\delta/RT_0)(1 - V_x^2/V_{\max}^2)^{-1}. \qquad (12.1.18)$$

Так как температура торможения

$$T_0 = T_\delta (1 - V_\delta^2/V_{\max}^2)^{-1}, \qquad (12.1.19)$$

а плотность на внешней границе пограничного слоя

$$\rho_\delta = p_\delta/(RT_\delta) = \rho_0 (1 - V_\delta^2/V_{\max}^2)^{1/(k-1)}, \qquad (12.1.20)$$

то

$$\rho = \rho_\delta (1 - V_\delta^2/V_{\max}^2)(1 - V_x^2/V_{\max}^2)^{-1} =$$

$$= \rho_0 (1 - V_\delta^2/V_{\max}^2)^{k/(k-1)} (1 - V_x^2/V_{\max}^2)^{-1}. \qquad (12.1.21)$$

Полученные уравнения позволяют рассчитать параметры пограничного слоя без учета влияния физико-химических превращений, происходящих при очень больших скоростях обтекания, при которых газ в пограничном слое разогревается до очень высоких температур. Поэтому, строго говоря, эти уравнения действительны при сравнительно небольших скоростях, когда температура в пограничном слое не достигает высоких значений. По мере снижения скоростей обтекания уменьшается влияние сжимаемости и разогрева газа в пограничном слое.

Для несжимаемого двухмерного плоского пограничного слоя система уравнений записывается в виде:

$$\left.\begin{aligned} &V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp_\delta}{dx} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}; \\ &\partial V_x/\partial x + \partial V_y/\partial y = 0;\ V_\delta^2/2 + p_\delta/\rho_\delta = \text{const}. \end{aligned}\right\} \quad (12.1.22)$$

Интегрирование этих уравнений ведется для граничных условий, заданных (12.1.15).

§ 12.2. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Обобщенное уравнение пограничного слоя в дифференциальной форме

Выведем уравнение установившегося пограничного слоя в обобщенном виде, пригодное для исследования как ламинарного, так и турбулентного пространственного осесимметричного течения с учетом влияния физико-химических превращений, происходящих под влиянием высоких температур.

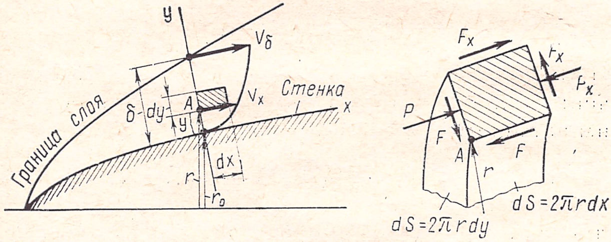


Рис. 12.2.1. К выводу обобщенного уравнения пограничного слоя

Рассмотрим в пограничном слое элементарную частицу торроидальной формы с внутренним радиусом r, шириной dx и толщиной dy (рис. 12.2.1). Действие окружающего потока заменим силами от давления и касательного напряжения. Так как рассматривается тонкий пограничный слой, то можно принять, что в каждой точке сечения, проходящего через заданную точку A, давление одинаково и равно его значению p_δ на свободной границе слоя. Поэтому сила от давления на левую грань кольца в направлении оси x

$$P = p_\delta dS = 2\pi r p_\delta dy. \quad (12.2.1)$$

Обозначим через P_x силу, действующую на правую грань с той же площадью $dS=2\pi r dy$. Так как давление p_δ есть функция координаты x, т. е. $p_\delta=p_\delta(x)$, то и сила $P=P(x)$. В соответствии с этим на правую грань действует сила $P_x=P(x+dx)$ или, так как для рассматриваемого сечения выбрана координата $x=0$, $P_x=P(dx)$. Разлагая эту функцию в ряд Тейлора и пренебрегая малыми второго порядка и выше, получим

$$P_x=P(0)+(\partial P/\partial x)\,dx=2\pi r p_\delta dy+$$

$$+(\partial/\partial x)(2\pi r p_\delta dy)\,dx=2\pi r\,[p_\delta+(dp_\delta/dx)\,dx]\,dy. \qquad (12.2.2)$$

Избыточная сила, действующая в направлении оси x,

$$P-P_x=-2\pi r\,(dp_\delta/dx)\,dxdy. \qquad (12.2.3)$$

Силы трения, приложенные к частице, рассчитываются в соответствии с правилом взаимности касательных напряжений (рис. 12.2.1). При этом силы трения, действующие на переднюю и заднюю площадки, не дают составляющую на ось x. Такая составляющая обусловлена действием касательных напряжений на внутреннюю и внешнюю поверхности кольца и равна $F_x—F$, где

$$F_x=F(y+dy)=F(y)+(\partial F/\partial y)\,dy=2\pi r\tau dx+$$

$$+(\partial/\partial y)(2\pi r\tau dx)\,dy;\; F=F(y)=\tau dS=2\pi r\tau dx;$$

здесь τ — напряжение трения на внутренней поверхности кольца.

Таким образом, избыточная сила трения, действующая в направлении оси x,

$$F_x-F=2\pi\,(\partial/\partial y)(r\tau)\,dxdy. \qquad (12.2.4)$$

Для рассматриваемой частицы произведение ее массы [плотность×объем] на ускорение будет

$$-2\pi r\rho\,(dV_x/dt)\,dxdy. \qquad (12.2.5)$$

Сумма этой величины и действующих на частицу в направлении x сил равна нулю, т. е.

$$-2\pi r\rho\,(dV_x/dt)\,dxdy-2\pi r\,(dp_\delta/dx)\,dxdy+2\pi\,(\partial/\partial y)(r\tau)\,dxdy=0.$$

Отсюда, полагая, что полное ускорение $\dfrac{dV_x}{dt}=V_x\dfrac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\dfrac{\partial V_x}{\partial y}$, находим

$$\rho r\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)=-r\frac{dp_\delta}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}(r\tau). \qquad (12.2.6)$$

Уравнение (12.2.6) называют обобщенным уравнением пограничного слоя в дифференциальной форме.

При исследовании турбулентного пограничного слоя значения V_x, V_y, ρ и p_δ надо принимать осредненными, а напряжение трения определять из выражения

$$\tau=(\mu+\mu_{\text{т}})(\partial V_x/\partial y), \tag{12.2.7}$$

в котором $\mu_{\text{т}}$ — коэффициент турбулентной вязкости.

Коэффициент $\mu_{\text{т}}$ можно рассматривать в качестве аналога динамического коэффициента вязкости μ для случая ламинарного течения вязкого газа. Очевидно, для такого течения $\mu_{\text{т}}=0$, напряжение трения $\tau=\mu\partial V_x/\partial y$ и уравнение (12.2.6) перепишется в виде

$$\rho r\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)=-r\frac{dp_\delta}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(r\mu\frac{\partial V_x}{\partial y}\right). \tag{12.2.8}$$

В общем случае, когда газ испытывает под действием высоких температур физико-химические превращения, величина коэффициента μ меняется поперек пограничного слоя. Когда эти превращения отсутствуют, величина μ принимается постоянной. При исследовании пограничного слоя около плоского контура из уравнения (12.2.8) необходимо исключить r.

Интегральное соотношение пограничного слоя

Преобразуем обобщенное уравнение (12.2.6) к несколько другому по форме соотношению, широко используемому в практических расчетах пограничного слоя. С этой целью левую часть (12.2.6) напишем в виде

$$\rho r\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)=\left[\frac{\partial V_x^2}{\partial x}+\frac{\partial(V_xV_y)}{\partial y}-V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}-V_x\frac{\partial V_y}{\partial y}\right]\rho r.$$

Вычисляя производные в уравнении неразрывности (2.4.48), получим

$$V_x\frac{\partial(\rho r)}{\partial x}+\rho r\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial(\rho r)}{\partial y}+\rho r\frac{\partial V_y}{\partial y}=0.$$

Отсюда

$$-\rho rV_x\frac{\partial V_x}{\partial x}-\rho rV_x\frac{\partial V_y}{\partial y}=V_x^2\frac{\partial(\rho r)}{\partial x}+V_xV_y\frac{\partial(\rho r)}{\partial y}.$$

В соответствии с этим

$$\rho r\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)=\rho r\frac{\partial V_x^2}{\partial x}+\rho r\frac{\partial(V_xV_y)}{\partial y}+$$

$$+V_x^2\frac{\partial(\rho r)}{\partial x}+V_xV_y\frac{\partial(\rho r)}{\partial y}=\frac{\partial(\rho rV_x^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho rV_xV_y)}{\partial y}. \tag{12.2.9}$$

Внося это выражение в (12.2.6), получим

$$\frac{\partial(\rho rV_x^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho rV_xV_y)}{\partial y}=-r\frac{dp_\delta}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}(r\tau).$$

Комбинируя это выражение с уравнением неразрывности, написанным в виде

$$V_\delta \frac{\partial(\rho r V_x)}{\partial x} + V_\delta \frac{\partial(\rho r V_y)}{\partial y} = 0,$$

найдем

$$V_\delta \frac{\partial(\rho r V_x)}{\partial x} + V_\delta \frac{\partial(\rho r V_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho r V_x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho r V_x V_y)}{\partial y} = r\frac{dp_\delta}{dx} - \frac{\partial}{\partial y}(r\tau)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}[\rho r V_x(V_\delta - V_x)] - \rho r V_x \frac{dV_\delta}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}[\rho r V_y(V_\delta - V_x)] =$$

$$= r\frac{dp_\delta}{dx} - \frac{\partial}{\partial y}(r\tau).$$

Осуществляя интегрирование по y от 0 до δ (в пределах толщины пограничного слоя), получим

$$\underbrace{\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}[\rho r V_x(V_\delta - V_x)]\,dy}_{1} - \underbrace{\int_0^\delta \rho r V_x \frac{dV_\delta}{dx}\,dy}_{2} +$$

$$+ \underbrace{\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y}[\rho r V_y(V_\delta - V_x)]\,dy}_{3} = \underbrace{\int_0^\delta r\frac{pd_\delta}{dx}\,dy}_{4} - \underbrace{\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y}(r\tau)\,dy}_{5}. \quad (12.2.10)$$

Члены, входящие в (12.2.10), представим в следующем виде:

$$1. \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}[\rho r V_x(V_\delta - V_x)]\,dy = \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho r V_x(V_\delta - V_x)\,dy -$$

$$\underbrace{-[\rho r V_x(V_\delta - V_x)]_{y=\delta}\frac{d\delta}{dx}} = \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho r V_x(V_\delta - V_x)\,dy. \quad (12.2.11)$$

Выражение над фигурной скобкой равно нулю, так как при $y=\delta$ величина $V_x = V_\delta$.

$$2. \int_0^\delta \rho r V_x \frac{dV_\delta}{dx}\,dy = \frac{dV_\delta}{dx}\int_0^\delta \rho r V_x dy =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(V_\delta \int_0^\delta \rho r V_x dy\right) - V_\delta \frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho r V_x dy. \quad (12.2.12)$$

$$3. \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y}[\rho r V_y(V_\delta - V_x)]\,dy = [\rho r V_y(V_\delta - V_x)]_{y=0}^{y=\delta} = 0, \quad (12.2.13)$$

так как при $y=\delta$ значение $V_x=V_\delta$, а при $y=0$ скорость $V_y=0$.

$$4.\quad \int_0^\delta r\,\frac{dp_\delta}{dx}\,dy=\frac{dp_\delta}{dx}\int_0^\delta r\,dy. \qquad (12.2.14)$$

$$5.\quad \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y}(r\tau)\,dy=[r\tau]_{y=0}^{y=\delta}=-r_0\tau_{\text{ст}}. \qquad (12.2.15)$$

Принимая во внимание эти результаты, уравнение (12.2.10) напишем в виде

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho r V_x(V_\delta-V_x)\,dy-\frac{d}{dx}\left(V_\delta\int_0^\delta \rho r V_x dy\right)+$$

$$+V_\delta\,\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho r V_x dy=\frac{dp_\delta}{dx}\int_0^\delta r\,dy+r_0\tau_{\text{ст}}. \qquad (12.2.16)$$

Произведя здесь сокращение и приняв, что при малой толщине пограничного слоя координату r можно приближенно заменить координатой r_0, соответствующей точке на обтекаемой поверхности (см. рис. 12.2.1), напишем

$$-\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho r_0 V_x^2 dy+V_\delta\,\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho r_0 V_x dy-r_0\delta\,\frac{dp_\delta}{dx}=r_0\tau_{\text{ст}}. \qquad (12.2.16')$$

Это обобщенное уравнение, полученное Карманом, называют интегральным соотношением пограничного слоя. Оно позволяет непосредственно определить напряжение трения $\tau_{\text{ст}}$ на стенке, что связано с решением практической задачи об определении сопротивления трения. Применение интегрального соотношения для этой цели предполагает известным характер распределения скорости по толщине пограничного слоя, т. е. вид функции $V_x=V_x(y)$.

Решение уравнения (12.2.16′) должно удовлетворять условию на внешней границе пограничного слоя, где при $y=\delta$ скорость $V_x=V_\delta$. Эту скорость, как и давление p_δ, являющиеся известными параметрами, рассчитывают в результате решения уравнения Эйлера для идеального (невязкого) обтекающего потока. Неизвестными величинами являются V_x, δ и $\tau_{\text{ст}}$. Таким образом, соотношение (12.2.16′) должно быть дополнено еще двумя независимыми уравнениями, связывающими между собой указанные неизвестные параметры. Интегральный характер уравнения (12.2.16′) позволяет применить эти уравнения в приближенном виде. В частности, достаточно задаться весьма приближенной зависимостью для скорости V_x и тем не менее получить практически приемлемый результат, так как скорость V_x входит под знак интеграла и при его вычислении величина погрешности уменьшается.

Условные толщины пограничного слоя

Представим интегральное соотношение (12.2.16) в несколько иной форме. Для этой цели заменим два последних члена в левой части с учетом соотношения (12.2.12), а dp_δ/dx представим согласно (3.6.3) в виде

$$dp_\delta/dx = -\rho_\delta V_\delta dV_\delta/dx. \qquad (12.2.17)$$

В результате получим

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho r V_x (V_\delta - V_x)\,dy - \frac{dV_\delta}{dx}\int_0^\delta \rho r V_x dy =$$

$$= -\int_0^\delta \rho_\delta r V_\delta \frac{dV_\delta}{dx}\,dy + r_0\tau_{\text{ст}}$$

или

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho r V_x (V_\delta - V_x)\,dy + \frac{dV_\delta}{dx}\int_0^\delta r(\rho_\delta V_\delta - \rho V_x)\,dy = r_0\tau_{\text{ст}}. \qquad (12.2.18)$$

Напишем это уравнение в виде

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta 2\pi r\rho V_x (V_\delta - V_x)\,dy + \frac{dV_\delta}{dx}\int_0^\delta 2\pi r(\rho_\delta V_\delta - \rho V_x)\,dy = 2\pi r_0\tau_{\text{ст}}. \qquad (12.2.18')$$

Первый интеграл в (12.2.18′) определяет уменьшение количества движения (импульса), переносимого через площадку $2\pi r\delta$, обусловленное торможением потока в пограничном слое. Введем понятие о толщине потери импульса δ^{**} — условной толщине некоторого слоя, ограничивающего поверхность $2\pi r_0\delta^{**}$, сквозь которую в единицу времени с постоянной скоростью V_δ переносится количество движения $2\pi r_0\delta^{**}\rho_\delta V_\delta^2$. Эта величина равна указанному уменьшению количества движения, т. е.

$$2\pi r_0\delta^{**}\rho_\delta V_\delta^2 = \int_0^\delta 2\pi r\rho V_x (V_\delta - V_x)\,dy.$$

Полагая под интегралом $r \approx r_0$, найдем

$$\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{\rho}{\rho_\delta}\cdot\frac{V_x}{V_\delta}\left(1 - \frac{V_x}{V_\delta}\right)dy. \qquad (12.2.19)$$

Второй интеграл в (12.2.18′) определяет разность между секундным расходом через площадку $2\pi r\delta$ для потока невязкого газа $\int_0^\delta 2\pi r\rho_\delta V_\delta dy$ и для потока вязкой среды $\int_0^\delta 2\pi r\rho V_x dy$.

Это уменьшение расхода обусловлено торможением потока в пограничном слое. Введем понятие толщины вытеснения δ^*, которая представляет собой в невязком потоке условную толщину слоя, ограничивающего поверхность $2\pi r_0\delta^*$, сквозь которую в единицу времени и при постоянной во всех точках поверхности скорости V_δ протекает количество жидкости, равное указанному выше уменьшению расхода, т. е.

$$2\pi r_0\delta^*\rho_\delta V_\delta=\int\limits_0^\delta 2\pi r\,(\rho_\delta V_\delta-\rho V_x)\,dy.$$

Полагая $r=r_0$, найдем

$$\delta^*=\int\limits_0^\delta\left(1-\frac{\rho}{\rho_\delta}\cdot\frac{V_x}{V_\delta}\right)dy. \qquad (12.2.20)$$

Как видно, в выражения (12.2.19) для δ^{**} и (12.2.20) для δ^* не входит величина r; следовательно, условные толщины для сжимаемого пространственного пограничного слоя с известным приближением определяются так же, как для плоского. В случае несжимаемого потока в указанных выражениях необходимо принять $\rho=\rho_\delta=\mathrm{const}$. Введение таких параметров, как толщина вытеснения δ^* и толщина потери импульса δ^{**}, отображающих определенные физические свойства пограничного слоя, позволяет получить в ряде случаев более эффективные методы решения задачи о движении вязкой жидкости. При помощи этих параметров возможно, в частности, получение дифференциального уравнения в форме, более удобной для расчета пограничного слоя около криволинейных поверхностей [14, 15].

В качестве иллюстрации рассмотрим одно из приложений понятия толщины вытеснения δ^* к аэродинамическим исследованиям. Из физических представлений ясно, что пограничный слой как бы вытесняет внешний невязкий поток, смещая его линии тока в сторону от поверхности. При этом толщину δ^* можно рассматривать как величину, определяющую некоторое среднее смещение этих линий тока. Внешний поток обтекает, таким образом, поверхность, полученную из действительной поверхности тела наращиванием на нее во всех точках отрезков, расположенных вдоль нормали и равных δ^*. Распределение скоростей и давлений во внешнем потоке следует рассчитывать так, как будто бы он обтекает новую поверхность, принадлежащую некоторому фиктивному утолщенному телу. В соответствии со сказанным использование понятия толщины вытеснения позволяет учесть обратное влияние пограничного слоя на параметры внешнего обтекания.

§12.3. ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНКЕ

Рассмотрим расчет пограничного слоя на плоской пластинке, обтекаемой сжимаемым потоком. Решение этой задачи имеет большое значение в теории движения вязкой жидкости. Получаемые в результате такого расчета параметры пограничного слоя используются в практических случаях для приближенной оценки параметров вязкого потока около поверхностей, не только близких по форме к пластинке, но и существенно отличающихся от нее, например около тел вращения. Вместе с тем, как будет показано далее, найденные формулы для расчета параметров несжимаемого пограничного слоя на плоской пластинке сохраняют внешний вид для случая определения соответствующих параметров пограничного слоя в сжимаемой среде.

Используем интегральное соотношение для плоской пластинки. Оно получается из уравнения (12.2.18) при условии, что из него исключается r, а производная dV_δ/dx принимается равной нулю, так как скорость свободного потока вдоль пластинки не изменяется. Тогда находим

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho V_x(V_\delta - V_x)\,dy = \tau_{\text{ст}}. \tag{12.3.1}$$

Преобразуем (12.3.1) к новым переменным ξ и η, введенным акад. А. А. Дородницыным [3]:

$$\xi = \int_0^x f(x)\,dx; \quad \eta = \int_0^y g(x,\ y)\,dy, \tag{12.3.2}$$

где $f(x)$ и $g(x,\ y)$ — функции, выбираемые из условия, при котором преобразованное интегральное соотношение сжимаемого пограничного слоя должно быть близко по форме к соответствующему соотношению для несжимаемой среды. Интегрирование такого соотношения представляет собой более простую задачу.

В соответствии с (12.3.2) производная

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x} = f\,\frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^{\eta_\delta}\rho V_x(V_\delta - V_x)\frac{d\eta}{g} +$$

$$+\frac{\partial\eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\int_0^{\eta_\delta}\rho V_x(V_\delta - V_x)\frac{d\eta}{g},$$

где η_δ — величина η, соответствующая внешней границе пограничного слоя.

В этом уравнении

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\int_0^{\eta_\delta}\rho V_x(V_\delta - V_x)\frac{d\eta}{g} = \frac{1}{g}\rho V_x(V_\delta - V_x)\Big|_0^{\eta_\delta} = 0,$$

так как на стенке при $\eta = 0$ составляющая $V_x = 0$, а на границе слоя при $\eta = \eta_\delta$ ее величина $V_x = V_\delta$. Поэтому (12.3.1) можно переписать в виде

$$f\,\frac{d}{d\xi}\int\limits_0^{\eta_\delta}\rho V_x(V_\delta-V_x)\frac{d\eta}{g}=\tau_{\text{ст}}. \tag{12.3.3}$$

Чтобы интеграл (12.3.3) совпал с соответствующим ему выражением для несжимаемой среды, необходимо положить $\rho/g=\text{const}$. Так как функция g в соответствии с (12.3.2) является безразмерной, можно принять эту постоянную равной плотности торможения, т. е. $\rho/g=\rho_0$. Следовательно,

$$\eta=\int\limits_0^y\frac{\rho}{\rho_0}dy. \tag{12.3.4}$$

Таким образом, для (12.3.3) получаем

$$\frac{d}{d\xi}\int\limits_0^{\eta_\delta}V_x(V_\delta-V_x)\,d\eta=\tau_{\text{ст}}\frac{g_{\text{ст}}}{f_{\text{ст}}\rho_{\text{ст}}}.$$

Правая часть в этом уравнении

$$\frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho_{\text{ст}}}\cdot\frac{g_{\text{ст}}}{f_{\text{ст}}}=\frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho_{\text{ст}}}\cdot\frac{\rho_{\text{ст}}}{\rho_0}\cdot\frac{1}{f_{\text{ст}}}.$$

Из (12.1.21) следует, что плотность на стенке

$$\rho_{\text{ст}}=\rho_\delta\left(1-V_\delta^2/V_{\max}^2\right)=\rho_\delta T_\delta/T_0=p_\delta\rho_0/p_0, \tag{12.3.5}$$

откуда

$$\rho_{\text{ст}}/\rho_0=p_\delta/p_0. \tag{12.3.5'}$$

Поэтому

$$\frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho_{\text{ст}}}\cdot\frac{g_{\text{ст}}}{f_{\text{ст}}}=\frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho_{\text{ст}}}\cdot\frac{p_\delta}{p_0}\cdot\frac{1}{f_{\text{ст}}}.$$

С учетом этого выражения

$$\frac{d}{d\xi}\int\limits_0^{\eta_\delta}V_x(V_\delta-V_x)\,d\eta=\frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho_{\text{ст}}}\cdot\frac{p_\delta}{p_0}\cdot\frac{1}{f_{\text{ст}}}.$$

Примем здесь $p_\delta/p_0=f_{\text{ст}}$, т. е. положим

$$\xi=\int\limits_0^x\frac{p_\delta}{p_0}dx=\frac{p_\delta}{p_0}x. \tag{12.3.6}$$

В соответствии с этим

$$\frac{d}{d\xi}\int\limits_0^{\eta_\delta}V_x(V_\delta-V_x)\,d\eta=\frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho_{\text{ст}}}. \tag{12.3.7}$$

Уравнение (12.3.7) совпадает по форме с соответствующим соотношением пограничного слоя для несжимаемой среды в системе координат ξ, η. Следовательно, для решения интегрального соотношения в такой форме можно применить метод, используемый в теории пограничного слоя несжимаемой жидкости. Этот метод предусматривает задание распределения скорости V_x по сечению пограничного слоя, что необходимо знать при использовании интегрального соотношения.

Рассмотрим ламинарный пограничный слой, для которого интегральное соотношение имеет вид

$$\frac{d}{d\xi}\int_0^{\eta_\delta} V_x(V_\delta - V_x)\,d\eta = \frac{\mu_{\text{ст}}}{\rho_{\text{ст}}}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\mu_{\text{ст}}}{\rho_{\text{ст}}}\left(\frac{\partial V_x}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_{y=0}. \quad (12.3.8)$$

В теории ламинарного пограничного слоя для несжимаемой жидкости на произвольной поверхности Польгаузеном предложена функция $V_x(\eta, \xi)$ в виде полинома третьей степени

$$V_x = a(\xi) + b(\xi)\eta + c(\xi)\eta^2 + d(\xi)\eta^3. \quad (12.3.9)$$

Коэффициенты этого полинома $a(\xi)$, $b(\xi)$, $c(\xi)$ и $d(\xi)$ определяются из граничных условий, которым должна удовлетворять скорость. Согласно граничным условиям на стенке, т. е. при $\eta=0$, скорость $V_x=0$. Следовательно, коэффициент $a=0$. Из первого уравнения системы (12.1.14), преобразованного к переменным ξ, η и отнесенного к условиям на плоской пластинке ($dp_\delta/dx=0$), следует, что на стенке, где $V_x=V_y=0$, производная

$$(\partial^2 V_x/\partial\eta^2)_{\eta=0} = 0. \quad (12.3.10)$$

В соответствии с (12.3.9) производная

$$\partial^2 V_x/\partial\eta^2 = 2c + 6d\eta, \quad (12.3.11)$$

откуда при выполнении условия (12.3.10) коэффициент $c=0$. Таким образом,

$$V_x = b\eta + d\eta^3. \quad (12.3.12)$$

Для определения коэффициентов b и d воспользуемся граничными условиями на свободной границе пограничного слоя. При $\eta=\eta_\delta$ составляющая скорости $V_x=V_\delta$, поэтому

$$V_\delta = b\eta_\delta + d\eta_\delta^3. \quad (12.3.13)$$

На свободной границе напряжения трения $(\tau_{\text{ст}})_{\eta=\eta_\delta} = 0$.

В соответствии с формулой Ньютона $\tau=\mu\partial V_x/\partial y$ производная $(\partial V_x/\partial\eta)_{\eta=\eta_\delta}=0$. С учетом этого из (12.3.12) получаем

$$(\partial V_x/\partial\eta)_{\eta=\eta_\delta} = b + 3d\eta_\delta^2 = 0. \quad (12.3.14)$$

Решаем совместно (12.3.13) и (12.3.14) относительно коэффициентов b и d:

$$b=\frac{3}{2}\cdot\frac{V_\delta}{\eta_\delta},\quad d=-\frac{1}{2}\cdot\frac{V_\delta}{\eta_\delta^3}.$$

Таким образом, для распределения скорости получим

$$V_x=\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta}{\eta_\delta}-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{\eta_\delta}\right)^3\right]V_\delta. \qquad (12.3.15)$$

Подставляя это выражение в (12.3.8), найдем

$$\frac{d}{d\xi}\int\limits_0^{\eta_\delta}\left(\frac{3}{2}V_\delta\frac{\eta}{\eta_\delta}-\frac{1}{2}V_\delta\frac{\eta^3}{\eta_\delta^3}\right)\left(V_\delta-\frac{3}{2}V_\delta\frac{\eta}{\eta_\delta}+\frac{1}{2}V_\delta\frac{\eta^3}{\eta_\delta^3}\right)d\eta=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{\nu_{ст}V_\delta}{\eta_\delta}\cdot\frac{\rho_{ст}}{\rho_0}.$$

Вычисляя интеграл и производя дифференцирование, получим уравнение

$$\frac{d\eta_\delta^2}{d\xi}=\frac{280}{13}\cdot\frac{\nu_{ст}\rho_{ст}}{V_\delta\rho_0}.$$

Интегрируя в предположении, что вдоль пластинки $\nu_{ст}=\mathrm{const}$ и $\rho_{ст}=\mathrm{const}$, найдем

$$\eta_\delta^2=\frac{280}{13}\cdot\frac{\nu_{ст}\rho_{ст}}{V_\delta\rho_0}\xi+C.$$

Полагая в начальной точке пластинки при $\xi=0$ толщину $\eta_\delta=0$, найдем $C=0$. Поэтому

$$\eta_\delta=4{,}64\sqrt{\frac{\nu_{ст}\rho_{ст}}{V_\delta\rho_0}\xi}. \qquad (12.3.16)$$

Принимая во внимание формулу (12.3.5) для $\rho_{ст}/\rho_\delta$ и выражение (12.3.6) для ξ, найдем

$$\eta_\delta=4{,}64\sqrt{\frac{\nu_{ст}x}{V_\delta}\cdot\frac{p_\delta}{p_0}\cdot\frac{\rho_{ст}}{\rho_0}}=4{,}64\frac{p_\delta}{p_0}\sqrt{\frac{\nu_{ст}x}{V_\delta}}. \qquad (12.3.16')$$

Толщину слоя определим из выражения

$$\delta=\int\limits_0^{\delta}dy=\int\limits_0^{\eta_\delta}\frac{\rho_0}{\rho}d\eta.$$

Представим ρ_0/ρ с учетом (12.1.21) и $V_x = V_\delta(\eta/\eta_\delta)$ в виде

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{\rho_0\left(1 - V_x^2/V_{\max}^2\right)}{\rho_\delta\left(1 - V_\delta^2/V_{\max}^2\right)} = \frac{\left(1 - V_\delta^2/V_{\max}^2\right)^{-1/(k-1)}\left(1 - V_x^2/V_{\max}^2\right)}{1 - V_\delta^2/V_{\max}^2} =$$

$$= \frac{p_0}{p_\delta}\left(1 - \frac{V_x^2}{V_{\max}^2}\right) = \frac{p_0}{p_\delta}\left(1 - \frac{V_\delta^2}{V_{\max}^2}\cdot\frac{\eta^2}{\eta_\delta^2}\right).$$

Здесь, как видно, для замены V_x используется не формула (12.3.15), а более простая зависимость, определяющая линейный характер изменения скорости в функции η. При определении толщины пограничного слоя это не вносит сколько-нибудь существенных погрешностей, но способствует упрощению расчетов. В соответствии с этим

$$\delta = \frac{p_0}{p_\delta}\int\limits_0^{\eta_\delta}\left(1 - \frac{V_\delta^2}{V_{\max}^2}\cdot\frac{\eta^2}{\eta_\delta^2}\right)d\eta = \frac{p_0}{p_\delta}\left(1 - \frac{V_\delta^2}{3V_{\max}^2}\right)\eta_\delta =$$

$$= \frac{p_0}{p_\delta}\left[1 - \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{V_\delta^2}{V_{\max}^2}\right)\frac{1}{3}\right]\eta_\delta = \frac{p_0}{p_\delta}\left(\frac{2}{3} + \frac{T_\delta}{3T_0}\right)\eta_\delta.$$

Внося сюда значение η_δ из (12.3.16′), найдем

$$\delta = 4{,}64\,[2/3 + T_\delta/(3T_0)]\sqrt{\nu_{\text{ст}}x/V_\delta}\,.$$

Коэффициент $\nu_{\text{ст}}$ представим в виде

$$\nu_{\text{ст}} = \frac{\mu_{\text{ст}}}{\rho_{\text{ст}}} = \frac{\mu_\delta}{\rho_\delta}\cdot\frac{\mu_{\text{ст}}}{\mu_\delta}\cdot\frac{\rho_\delta}{\rho_{\text{ст}}} = \nu_\delta\left(\frac{T_{\text{ст}}}{T_\delta}\right)^n\frac{\rho_\delta}{\rho_0}\cdot\frac{\rho_0}{\rho_{\text{ст}}} =$$

$$= \nu_\delta\left(\frac{T_{\text{ст}}}{T_\delta}\right)^n\frac{\rho_\delta}{\rho_0}\cdot\frac{p_0}{p_\delta} = \nu_\delta\left(\frac{T_{\text{ст}}}{T_\delta}\right)^n\frac{T_0}{T_\delta}\,. \qquad (12.3.17)$$

Так как рассматривается случай теплоизолированной стенки, на которой для принятого значения $\mathbf{Pr} = 1$ температура газа

$$T_{\text{ст}} = T_0 = T_\delta\left(1 - \frac{V_\delta^2}{V_{\max}^2}\right)^{-1} = T_\delta\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right), \qquad (12.3.18)$$

то, следовательно,

$$\nu_{\text{ст}} = \nu_\delta\left(\frac{T_0}{T_\delta}\right)^{1+n} = \nu_\delta\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right)^{1+n}. \qquad (12.3.17')$$

В соответствии с этим

$$\delta = \delta_{\text{сж}} = 4{,}64\left(1 + \frac{k-1}{3}\mathbf{M}_\delta^2\right)\left(1 + \frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right)^{(n-1)/2}\sqrt{\frac{\nu_\delta x}{V_\delta}}\,, \qquad (12.3.19)$$

Приняв здесь $\mathbf{M}_\delta=0$, получим зависимость для толщины пограничного слоя в несжимаемой среде:

$$\delta_{\text{нсж}}=4{,}64\sqrt{\nu_\delta x/V_\delta} \tag{12.3.19′}$$

или в безразмерной форме:

$$\bar{\delta}_{\text{нсж}}=\delta_{\text{нсж}}/L=4{,}64\left(\bar{x}^{1/2}/\mathbf{Re}_L^{1/2}\right), \tag{12.3.19″}$$

где $\bar{x}=x/L, \mathbf{Re}_L=V_\delta L/\nu_\delta$.

Отношение толщин:

$$\frac{\delta_{\text{сж}}}{\delta_{\text{нсж}}}=\left(1+\frac{k-1}{3}\mathbf{M}_\delta^2\right)\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right)^{(n-1)/2}. \tag{12.3.20}$$

Как видно, *влияние сжимаемости сказывается на увеличении толщины пограничного слоя*. Это объясняется тем, что сжимаемый газ при торможении разогревается, в результате чего повышается вязкость и ее влияние распространяется на большую толщину газа.

Касательное напряжение на стенке определим по формуле Ньютона с учетом (12.3.15) и (12.3.4):

$$\tau_{\text{ст}}=\mu_{\text{ст}}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{y=0}=\mu_{\text{ст}}\left(\frac{\partial V_x}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)_{y=0}=$$

$$=\mu_{\text{ст}}\frac{3V_\delta}{2\eta_\delta}\cdot\frac{\rho_{\text{ст}}}{\rho_0}=\nu_{\text{ст}}\frac{3V_\delta}{2\eta_\delta}\cdot\frac{\rho_{\text{ст}}^2}{\rho_0}.$$

Вносим сюда значение η_δ из (12.3.16′) и заменяем $\rho_{\text{ст}}/\rho_0$ на p_δ/p_0:

$$\tau_{\text{ст}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{V_\delta\rho_{\text{ст}}}{4{,}64}\sqrt{\frac{\nu_{\text{ст}}V_\delta}{x}}. \tag{12.3.21}$$

Внося в (12.3.21) значение $\nu_{\text{ст}}$ из (12.3.17′) и принимая во внимание, что

$$\rho_{\text{ст}}=\rho_\delta\frac{\rho_{\text{ст}}}{\rho_0}\cdot\frac{\rho_0}{\rho_\delta}=\rho_\delta\frac{p_\delta}{p_0}\cdot\frac{\rho_0}{\rho_\delta}=\rho_\delta\frac{T_\delta}{T_0}, \tag{12.3.21′}$$

запишем

$$\tau_{\text{ст}}=0{,}323\rho_\delta V_\delta^2\sqrt{\frac{\nu_\delta}{V_\delta x}}\left(\frac{T_0}{T_\delta}\right)^{(n-1)/2} \tag{12.3.22}$$

или с учетом (12.3.18) и обозначения для местного числа Рейнольдса $\mathbf{Re}_x=V_\delta x/\nu_\delta$

$$\tau_{\text{ст}}=(\tau_{\text{ст}})_{\text{сж}}=0{,}323\rho_\delta V_\delta^2\sqrt{\frac{1}{\mathbf{Re}_x}}\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right)^{(n-1)/2}. \tag{12.3.22′}$$

Для несжимаемой среды ($\mathbf{M}_\delta=0$)

$$(\tau_{\text{ст}})_{\text{нсж}}=0{,}323\rho_\delta V_\delta^2 \sqrt{1/\mathbf{Re}_x}. \qquad (12.3.23)$$

Отношение напряжений трения:

$$\frac{(\tau_{\text{ст}})_{\text{сж}}}{(\tau_{\text{ст}})_{\text{нсж}}}=\left(\frac{T_0}{T_\delta}\right)^{(n-1)/2}=\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right)^{(n-1)/2}. \qquad (12.3.24)$$

Из зависимости (12.3.24) следует, что с ростом числа $\mathbf{M}_\delta$ или с повышением температуры в пограничном слое напряжение трения, несмотря на повышение вязкости, уменьшается ($n<1$). Это обусловлено доминирующим влиянием на трение плотности $\rho_{\text{ст}}$, которая, как видно из (12.3.21′), с увеличением температуры $T_{\text{ст}}=T_0$ уменьшается. Как следствие, понижается способность газа сопротивляться сдвигу.

Определим местный коэффициент трения:

$$(c_{fx})_{\text{сж}}=\frac{2(\tau_{\text{ст}})_{\text{сж}}}{\rho_\delta V_\delta^2}=0{,}646\sqrt{\frac{1}{\mathbf{Re}_x}}\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right)^{(n-1)/2}. \qquad (12.3.25)$$

Для несжимаемой среды ($\mathbf{M}_\delta=0$)

$$(c_{fx})_{\text{сж}}=2(\tau_{\text{ст}})_{\text{нсж}}/(\rho_\delta V_\delta^2)=0{,}646\sqrt{1/\mathbf{Re}_x}. \qquad (12.3.26)$$

Можно видеть, что отношение местных коэффициентов трения будет таким, как отношение напряжений трения (12.3.24):

$$\frac{(c_{fx})_{\text{сж}}}{(c_{fx})_{\text{нсж}}}=\frac{(\tau_{\text{ст}})_{\text{сж}}}{(\tau_{\text{ст}})_{\text{нсж}}}=\left(\frac{T_0}{T_\delta}\right)^{(n-1)/2}=\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right)^{(n-1)/2}. \qquad (12.3.27)$$

Вычислим сопротивление трения пластинки. Элементарная величина этой силы, действующей на площадку $dx\cdot 1$,

$$dX_{f\text{сж}}=(\tau_{\text{ст}})_{\text{сж}}dx\cdot 1.$$

Суммарная сила сопротивления трения одной стороны пластинки площадью $L\cdot 1$ (где L — длина пластинки)

$$X_{f\,\text{сж}}=\int_0^L(\tau_{\text{ст}})_{\text{сж}}dx. \qquad (12.3.28)$$

Коэффициент этой силы

$$(c_{xf})_{\text{сж}}=\frac{X_{f\,\text{сж}}}{(\rho_\delta V_\delta^2/2)\,L\cdot 1}=\frac{1}{L}\int_0^L\frac{(\tau_{\text{ст}})_{\text{сж}}}{\rho_\delta V_\delta^2/2}dx=\frac{1}{L}\int_0^L(c_{fx})_{\text{сж}}dx. \qquad (12.3.28')$$

Внося сюда значение $(c_{fx})_{\text{сж}}$ из (12.3.25), получим

$$(c_{xf})_{\text{сж}}=0{,}646\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right)^{(n-1)/2}\frac{1}{L}\int_0^L\sqrt{\frac{\nu_\delta}{V_\delta x}}dx.$$

Выполняя интегрирование, найдем

$$(c_{xf})_{\text{сж}}=\frac{1,292}{\sqrt{\mathbf{Re}_L}}\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right)^{(n-1)/2}, \qquad (12.3.29)$$

где число Рейнольдса, вычисленное по длине пластинки L,

$$\mathbf{Re}_L=V_\delta L/\nu_\delta.$$

Для несжимаемой среды

$$(c_{xf})_{\text{нсж}}=1{,}292/\sqrt{\mathbf{Re}_L}. \qquad (12.3.30)$$

Рассмотрим, как определяют условные толщины пограничного слоя. Их значения для несжимаемого потока находим из выражения

$$\delta^{**}=\int\limits_0^\delta \frac{V_x}{V_\delta}\left(1-\frac{V_x}{V_\delta}\right)dy;\quad \delta^{*}=\int\limits_0^\delta\left(1-\frac{V_x}{V_\delta}\right)dy. \qquad (12.3.31)$$

Подставим сюда отношение V_x/V_δ, исходя из закона распределения скорости (12.3.15):

$$\frac{V_x}{V_\delta}=\frac{3}{2}\frac{y}{\delta}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2. \qquad (12.3.32)$$

В результате интегрирования получим:

$$\delta^{**}_{\text{нсж}}=0,14\delta_{\text{нсж}};\quad \delta^{*}_{\text{нсж}}=0,376\delta_{\text{нсж}}, \qquad (12.3.33)$$

где $\delta_{\text{нсж}}$ определяется из (12.3.19′). Чтобы учесть влияние сжимаемости на δ^{**}, рассмотрим уравнение (12.3.1), из которого найдем для случая $\rho=\text{const}$

$$d\delta^{**}_{\text{нсж}}/dx=0,5c_{fx}, \qquad (12.3.34)$$

откуда $\delta^{**}_{\text{нсж}}=0,5\int\limits_0^x c_{fx}dx$ или $\delta^{**}_{\text{нсж}}=0,5c_{xf}x$ (где c_{xf} — средний коэффициент трения на участке пластинки от 0 до x). В соответствии с этим результатом отношение $\delta^{**}_{\text{сж}}/\delta^{**}_{\text{нсж}}$ будет таким, как (12.3.27), т. е.

$$\frac{\delta^{**}_{\text{сж}}}{\delta^{**}_{\text{нсж}}}=\frac{(c_{xf})_{\text{сж}}}{(c_{xf})_{\text{нсж}}}=\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right)^{(n-1)/2}. \qquad (12.3.35)$$

Что касается отношения условных толщин вытеснения, то оно определяется по аналогии с (12.3.20):

$$\frac{\delta^{*}_{\text{сж}}}{\delta^{*}_{\text{нсж}}}=\frac{\delta_{\text{сж}}}{\delta_{\text{нсж}}}=\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right)\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right)^{(n-1)/2}. \qquad (12.3.36)$$

§ 12.4. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНКЕ

Применение логарифмического закона распределения скорости

Для решения задачи об определении параметров турбулентного пограничного слоя на плоской пластинке в сжимаемой среде используем интегральное соотношение (12.3.7) в переменных ξ, η, в которых по форме оно будет таким, как для несжимаемой среды.

При определении закона распределения скорости V_x в пограничном слое, который необходимо знать для вычисления интеграла в соотношении (12.3.7), будем исходить из формулы (1.1.10). Перепишем эту формулу, полагая осредненное значение составляющей скорости $\overline{V}_x = V_x$, в виде

$$\tau = \rho l^2 (\partial V_x/\partial y)^2, \tag{12.4.1}$$

откуда $\partial V_x/\partial y = (1/l)\sqrt{\tau/\rho}$.

По предложению Прандтля, длина пути перемешивания

$$l = ky, \tag{12.4.2}$$

где k — некоторый постоянный коэффициент пропорциональности; y — расстояние от стенки.

В соответствии с этим $\partial V_x/\partial y = (1/ky)\sqrt{\tau/\rho}$, откуда

$$V_x = \int \frac{1}{ky}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}\,dy + C_1, \tag{12.4.3}$$

где C_1 — некоторая константа, определяемая из граничных условий движения газа в пограничном слое.

Преобразуем (12.4.3), используя переменные η (12.3.4) и ξ (12.3.6). Для удобства преобразований введем функцию

$$\vartheta = (\tau/\rho_0)\left(1 - \overline{V}_\delta^2\right)^{-k/(k-1)}, \tag{12.4.4}$$

где $\overline{V}_\delta = V_\delta/V_{\max}$.

Заменим плотность ρ в (12.4.3) его значением из (12.1.21):

$$\rho = \rho_0\left(1 - \overline{V}_\delta^2\right)^{k/(k-1)}\left(1 - \overline{V}_x^2\right)^{-1}, \tag{12.4.5}$$

где $\overline{V}_x = V_x/V_{\max}$.

Дифференциал dy в (12.4.3) представим при помощи (12.3.4) и (12.4.5) в виде

$$dy = (\rho_0/\rho)\,d\eta = \left(1 - \overline{V}_\delta^2\right)^{-k/(k-1)}\left(1 - \overline{V}_x^2\right)d\eta. \tag{12.4.6}$$

Наконец, рассмотрим преобразование для длины пути перемешивания (12.4.2). Акад. А. А. Дородницын принимает $k = 0{,}3914$, т. е. равным значению этого коэффициента вблизи стенки для пограничного слоя в несжимаемой среде. Но вблизи стенки можно принять $V_x \approx 0$ и в соответствии с (12.4.6)

$$y \approx \left(1-\overline{V}_\delta^2\right)^{-k/(k-1)}\eta. \tag{12.4.7}$$

Внося зависимости (12.4.4)—(12.4.7) в (12.4.3), найдем

$$V_x = \int \frac{1}{k\left(1-\overline{V}_\delta^2\right)^{-k/(k-1)}\eta} \sqrt{\frac{\vartheta\left(1-\overline{V}_\delta^2\right)^{k/(k-1)}\left(1-\overline{V}_x^2\right)}{\left(1-\overline{V}_\delta^2\right)^{k/(k-1)}}} \times$$

$$\times\left(1-\overline{V}_\delta^2\right)^{-k/(k-1)}\left(1-\overline{V}_x^2\right) d\eta + C_2 = \int \frac{\left(1-\overline{V}_x^2\right)^{3/2}}{k\eta}\sqrt{\vartheta}\, d\eta + C_2, \tag{12.4.8}$$

где C_2 — некоторая постоянная, определяемая в соответствии с граничными условиями для переменной η.

Величина $k\eta/\left(1-\overline{V}_x^2\right)^{3/2}$, которую обозначим через $\overline{l}$, соответствует длине пути перемешивания l в (12.4.1). Так как было принято, что эта длина определяется по коэффициенту k для условий вблизи стенки, где $\overline{V}_x \ll 1$, то

$$\overline{l} \approx k\eta, \tag{12.4.9}$$

что точно совпадает с принятым законом для длины пути перемешивания в несжимаемом потоке. Таким образом,

$$V_x = \int \frac{\sqrt{\vartheta}}{k\eta}\, d\eta + C_2.$$

В основу вывода рассматриваемого закона распределения скорости положена гипотеза о том, что напряжение трения постоянно по сечению пограничного слоя, в соответствии с которой $\tau = \tau_{\text{ст}} = \text{const}$ и, следовательно, $\vartheta = \vartheta_{\text{ст}} = \text{const}$. Поэтому

$$V_x = \int \frac{\sqrt{\vartheta_{\text{ст}}}}{k\eta}\, d\eta + C_2,$$

откуда

$$V_x = \left(\sqrt{\vartheta_{\text{ст}}}/k\right)\ln\eta + C_2. \tag{12.4.10}$$

Отнеся это уравнение к условиям на внешней границе пограничного слоя, где при $\eta = \eta_\delta$, $V_x = V_\delta$, получим

$$V_\delta = \left(\sqrt{\vartheta_{\text{ст}}}/k\right)\ln\eta_\delta + C_2. \tag{12.4.11}$$

Комбинируя (12.4.11) с (12.4.10), найдем

$$V_x - V_\delta = \left(\sqrt{\vartheta_{\text{ст}}}/k\right)\ln\left(\eta/\eta_\delta\right). \tag{12.4.12}$$

В приведенной форме уравнения для V_x представляют собой выражение логарифмического закона распределения скорости по сечению пограничного слоя. Уравнения (12.4.10) и (12.4.12) по смыслу их вывода справедливы только вблизи обтекаемой поверхности — в окрестности ламинарного подслоя. Такой слой образуется непосредственно у стенки, которая препятствует перемешиванию (турбулизации). Это явление уменьшения турбулизации вблизи стенки описывается формулой (12.4.2), согласно которой на стенке (при $y=0$) перемешивание прекращается. Акад. А. А. Дородницын в работе [3] ввел допущение, согласно которому внутри турбулентного ядра пограничного слоя распределение скоростей может быть представлено на основе логарифмического закона (12.4.10) при помощи уравнения

$$V_x=(\sqrt{\vartheta_{\text{ст}}}/k)\,(\ln\eta+C_2+f\,(\eta/\eta_\delta)], \tag{12.4.10$'$}$$

где $f(\eta/\eta_\delta)$ — поправка Дородницына к логарифмическому закону.

Поправка $f(\eta/\eta_\delta)$ является универсальной функцией, не зависящей от числа Маха или скорости V_δ. Иными словами, акад. А. А. Дородницын допускает, как и для случая ламинарного пограничного слоя, что в координатах η, ξ распределение скорости не зависит от сжимаемости.

Полагая в (12.4.10′) переменную $\eta=\eta_\delta$, найдем на внешней границе пограничного слоя скорость:

$$V_\delta=(\sqrt{\vartheta_{\text{ст}}}/k)\,[\ln\eta_\delta+C_2+f\,(1)]. \tag{12.4.11$'$}$$

В соответствии с (12.4.10′) и (12.4.11′)

$$V_x-V_\delta=(\sqrt{\vartheta_{\text{ст}}}/k)\,F\,(\eta/\eta_\delta), \tag{12.4.12$'$}$$

где

$$F\,(\eta/\eta_\delta)=\ln(\eta/\eta_\delta)-f\,(1)-f\,(\eta/\eta_\delta). \tag{12.4.12$''$}$$

Расчет параметров турбулентного пограничного слоя, основанный на применении уравнения (12.4.12′), содержащего поправку Дородницына, приведен в работе [3]. Не меняя принципиальной схемы решения задачи об определении этих параметров, можно в целях некоторого упрощения этого решения рассмотреть возможность применения обычного логарифмического закона, не вводя указанной выше поправки, т. е. полагая функцию $F(\eta/\eta_\delta)=\ln(\eta/\eta_\delta)$. Расчеты показывают, что численные коэффициенты, входящие в полученные выражения для параметров пограничного слоя, несколько отличаются от данных работы [3]. Однако это отличие вполне допустимо, если принять во внимание общий характер приближенных вычислений.

Уравнение для скорости, соответствующее принятому логарифмическому закону в его обычном виде (12.4.12), можно несколько преобразовать, выразив толщину η_δ через $\vartheta_{\text{ст}}$. Для этой цели рассмотрим уравнение (12.4.12) применительно к условиям на границе ламинарного подслоя, где при $\eta=\eta_л$ скорость на этой границе $V_x=V_л$:

$$V_л-V_\delta=(\sqrt{\vartheta_{\text{ст}}}/k)\ln(\eta_л/\eta_\delta). \tag{12.4.13}$$

Чтобы определить толщину ламинарного подслоя $\eta_л$ и скорость $V_л$ на его границе, воспользуемся уравнением Кармана, которое для переменной y записывается в виде

$$\delta_л = \alpha\mu_{ст}/\sqrt{\rho_{ст}\tau_{ст}}, \qquad (12.4.14)$$

где коэффициент α принимается таким, как и для несжимаемой среды, и равным 11,5 по экспериментальным данным.

Преобразуем к новой переменной η уравнение (12.4.14). Величина $\delta_л = \int\limits_0^{\delta_л} dy$ или с учетом (12.3.4) и (12.1.21)

$$\delta_л = (1-\overline{V}_\delta^2)^{-k/(k-1)} \int\limits_0^{\eta_л} (1-\overline{V}_x^2)\,d\eta. \qquad (12.4.15)$$

Вблизи стенки $\overline{V}_x \ll 1$, поэтому

$$\delta_л \approx (1-\overline{V}_\delta^2)^{-k/(k-1)}\eta_л. \qquad (12.4.16)$$

Выражение для $\tau_{ст}$ в (12.4.14) получим из (12.4.4):

$$\tau_{ст} = \vartheta_{ст}\rho_0 (1-\overline{V}_\delta^2)^{k/(k-1)}. \qquad (12.4.17)$$

Плотность на стенке находим из (12.4.5), положив $V_x=0$:

$$\rho_{ст} = \rho_0 (1-\overline{V}_\delta^2)^{k/(k-1)}. \qquad (12.4.5')$$

Внося (12.4.16), (12.4.17) и (12.4.5′) в (12.4.14), получим

$$\eta_л = \alpha\mu_{ст}/(\rho_0 \sqrt{\vartheta_{ст}}). \qquad (12.4.18)$$

В этом выражении величина $\vartheta_{ст}$ может быть определена при помощи формулы Ньютона $\tau_{ст} = \mu_{ст}(\partial V_x/\partial y)_{y=0}$. Учитывая малую толщину ламинарного подслоя, можно принять для него линейный закон распределения скорости $V_x = V_л(y/\delta_л)$, в соответствии с которым $\tau_{ст} = \mu_{ст}(V_л/\delta_л)$, откуда $V_л = (\tau_{ст}/\mu_{ст})\delta_л$ или с учетом значений (12.4.16) для $\delta_л$ и (12.4.17) для $\tau_{ст}$

$$V_л = (\rho_0\vartheta_{ст}/\mu_{ст})\,\eta_л. \qquad (12.4.19)$$

Внося сюда значение $\eta_л$ из (12.4.18), найдем

$$V_л = \alpha\sqrt{\vartheta_{ст}}. \qquad (12.4.19')$$

Подставляя значения $\eta_л$ из (12.4.18) и $V_л$ из (12.4.19′) в (12.4.13), получим

$$\alpha\sqrt{\vartheta_{ст}} - V_\delta = \frac{\sqrt{\vartheta_{ст}}}{k}\ln\left(\frac{\alpha\mu_{ст}}{\rho_0\sqrt{\vartheta_{ст}}}\cdot\frac{1}{\eta_\delta}\right),$$

откуда

$$\eta_\delta = \frac{\alpha\mu_{ст}}{\rho_0\sqrt{\vartheta_{ст}}}\, e^{kV_\delta/\sqrt{\vartheta_{ст}}} e^{-k\alpha}. \qquad (12.4.20)$$

Введем параметр

$$z = kV_\delta/\sqrt{\vartheta_{\text{ст}}} \tag{12.4.21}$$

и обозначим постоянную величину $\alpha e^{-k\alpha} = A$. Тогда

$$\eta_\delta \sqrt{\vartheta_{\text{ст}}} = e^z (A\mu_{\text{ст}}/\rho_0). \tag{12.4.22}$$

Воспользуемся интегральным соотношением (12.3.7), куда внесем значение

$$\tau_{\text{ст}}/\rho_{\text{ст}} = \vartheta_{\text{ст}}, \tag{12.4.23}$$

которое получается из (12.4.17) и (12.4.5′). Одновременно в соответствии с (12.4.12) произведем замену:

$$V_x = V_\delta + (\sqrt{\vartheta_{\text{ст}}}/k) \ln(\eta/\eta_\delta). \tag{12.4.24}$$

В результате

$$-\frac{d}{d\xi}\int_0^{\eta_\delta}\left(V_\delta + \frac{\sqrt{\vartheta_{\text{ст}}}}{k}\ln\frac{\eta}{\eta_\delta}\right)\frac{\sqrt{\vartheta_{\text{ст}}}}{k}\ln\frac{\eta}{\eta_\delta} = \vartheta_{\text{ст}}$$

или

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{V_\delta\sqrt{\vartheta_{\text{ст}}}}{k}\int_0^{\eta_\delta}\ln\frac{\eta}{\eta_\delta}\,d\eta\right) + \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\vartheta_{\text{ст}}}{k^2}\int_0^{\eta_\delta}\ln^2\frac{\eta}{\eta_\delta}\,d\eta\right) = \vartheta_{\text{ст}}. \tag{12.4.25}$$

Здесь интегралы вычисляются в явном виде:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\eta_\delta}\ln\frac{\eta}{\eta_\delta}\,d\eta &= \eta_\delta\int_0^1\ln\frac{\eta}{\eta_\delta}\,d\left(\frac{\eta}{\eta_\delta}\right) = -\eta_\delta;\\ \int_0^{\eta_\delta}\ln^2\frac{\eta}{\eta_\delta}\,d\eta &= \eta_\delta\int_0^1\ln^2\frac{\eta}{\eta_\delta}\,d\left(\frac{\eta}{\eta_\delta}\right) = 2\eta_\delta.\end{aligned}\right\} \tag{12.4.26}$$

В соответствии с этим

$$-\frac{d}{d\xi}\left[\eta_\delta\frac{\sqrt{\vartheta_{\text{ст}}}}{k}\left(-V_\delta + \frac{2\sqrt{\vartheta_{\text{ст}}}}{k}\right)\right] = \vartheta_{\text{ст}}.$$

Внесем сюда значения $\eta_\delta\sqrt{\vartheta_{\text{ст}}}$ из (12.4.22) и $\vartheta_{\text{ст}}$ из (12.4.21):

$$-\frac{d}{d\xi}\left[e^z\frac{A\mu_{\text{ст}}}{k\rho_0}\left(-V_\delta + 2\frac{V_\delta}{z}\right)\right] = \frac{k^2V_\delta^2}{z^2}.$$

Разделим обе части равенства на $A\mu_{\text{ст}}/(\rho_0 k)$:

$$\frac{d}{d\xi}\left[e^z\left(1-\frac{2}{z}\right)\right] = \frac{\rho_0 k^3}{A\mu_{\text{ст}}}\cdot\frac{V_\delta}{z^2}. \tag{12.4.27}$$

Произведем дифференцирование:

$$e^z\left(1-\frac{2}{z}\right)\frac{dz}{d\xi}+e^z\,\frac{2}{z^2}\cdot\frac{dz}{d\xi}=\frac{k^3\rho_0V_\delta}{A\mu_{\text{ст}}z^2}\,.$$

Разделив обе части равенства на

$$e^z\left(1-\frac{2}{z}\right)+e^z\,\frac{2}{z^2}=e^z\left(1-\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}\right),$$

получим

$$\frac{dz}{d\xi}=\frac{k^3\rho_0V_\delta}{A\mu_{\text{ст}}}\cdot\frac{e^{-z}}{z^2\,(1-2/z+2/z^2)}$$

или

$$\frac{d\,(z^2e^z)}{d\xi}=\frac{\rho_0V_\delta k^3}{A\mu_{\text{ст}}}\cdot\frac{1+2/z}{1-2/z+2/z^2}\,. \qquad (12.4.28)$$

Исследования для несжимаемой среды показали, что при больших числах Рейнольдса величина z изменяется незначительно. В этом можно убедиться, если воспользоваться эмпирической формулой для средней величины напряжения трения по длине плоской пластинки

$$(\tau_{\text{ст}})_{\text{нсж}}=0{,}022\rho_\delta V_\delta^2\mathbf{Re}_L^{-0,167}, \qquad (12.4.29)$$

пригодной для чисел $\mathbf{Re}_L=V_\delta L/\nu_{\text{ст}}$ в диапазоне от $5\cdot10^6$ до 10^{10}.

Из (12.4.4) и (12.4.21) следует, что для несжимаемой среды

$$z_{\text{нсж}}=kV_\delta/\sqrt{(\tau_{\text{ст}})_{\text{нсж}}/\rho_\delta}; \qquad (12.4.30)$$

полагая $k=0{,}3914$, найдем

$$z_{\text{нсж}}=2{,}66\mathbf{Re}_L^{0,084}. \qquad (12.4.31)$$

Рассмотрим два значения числа Рейнольдса: $\mathbf{Re}_{L1}$ и $\mathbf{Re}_{L2}=m\,\mathbf{Re}_{L1}$. Отношение соответствующих значений $z_{\text{нсж}}$:

$$(z_{\text{нсж}})_2/(z_{\text{нсж}})_1=m^{0,084}. \qquad (12.4.32)$$

Отсюда видно, что если, например, $m=2$, т. е. второе число Рейнольдса увеличилось вдвое, то соответствующее значение $(z_{\text{нсж}})_2$ изменилось лишь в 1,06 раза. Отмеченное свойство малого изменения функции z можно распространить на случаи движения в пограничном слое при больших скоростях обтекания, т. е. с учетом сжимаемости среды, и использовать это свойство для упрощения уравнения (12.4.28). Если принять в правой части этого уравнения $z=10$, которая, как нетрудно убедиться из (12.4.31), соответствует значению $\mathbf{Re}_L\approx10^8$, то

$$(1+2/z)/(1-2/z+2/z^2)\approx\text{const}=1{,}38$$

и, следовательно,

$$d\,(z^2e^z)=1{,}38\rho_0V_\delta k^3/(A\mu_{\text{ст}}).$$

Полагая $k=0{,}3914$ и $\alpha=11{,}5$, найдем постоянное значение

$$1{,}38k^3/A=1{,}38k^3e^{k\alpha}/\alpha=0{,}656.$$

Таким образом,

$$d\left(z^2e^z\right)=\left(0{,}656\rho_0V_\delta/\mu_{\text{ст}}\right)d\xi.$$

Принимая, что $z=0$ при $\xi=0$, находим после интегрирования

$$z^2e^z=\left(0{,}656\,\rho_0V_\delta/\mu_{\text{ст}}\right)\xi.$$

Согласно (12.3.6),

$$\xi=\left(p_\delta/p_0\right)x=\left(1-\overline{V}_\delta^2\right)^{k/(k-1)}x. \tag{12.4.33}$$

Принимая во внимание также (12.4.5′), найдем

$$z^2e^z=0{,}656\rho_{\text{ст}}V_\delta x/\mu_{\text{ст}}. \tag{12.4.34}$$

Заменим в (12.4.34) отношение $\rho_{\text{ст}}/\mu_{\text{ст}}$ согласно (12.3.17):

$$\frac{\rho_{\text{ст}}}{\mu_{\text{ст}}}=\frac{1}{\nu_\delta}\left(\frac{T_\delta}{T_{\text{ст}}}\right)^n\frac{T_\delta}{T_0}=\frac{1}{\nu_\delta}\left(\frac{T_\delta}{T_0}\right)^{n+1}=\frac{\left(1-\overline{V}_\delta^2\right)^{n+1}}{\nu_\delta}. \tag{12.4.35}$$

Вводя также обозначение для числа $\mathbf{Re}_x=V_\delta x/\nu_\delta$, получим

$$z^2e^z=0{,}656\left(1-\overline{V}_\delta^2\right)^{n+1}\mathbf{Re}_x. \tag{12.4.36}$$

По значению z, найденному из (12.4.36), можно определить напряжение трения. Чтобы найти зависимость $\tau_{\text{ст}}$ от z, воспользуемся соотношениями (12.4.5′) и (12.4.21):

$$\tau_{\text{ст}}=\frac{k^2V_\delta^2}{z^2}\rho_0\left(1-\overline{V}_\delta^2\right)^{k/(k-1)}=\frac{k^2V_\delta^2\rho_\delta}{z^2}\left(1-\overline{V}_\delta^2\right)=\frac{k^2\rho_\delta V_\delta^2}{z^2}\cdot\frac{T_\delta}{T_0}. \tag{12.4.37}$$

Местный коэффициент трения

$$c_{fx}=\frac{2\tau_{\text{ст}}}{\rho_\delta V_\delta^2}=\frac{2k^2}{z^2}\left(1-\overline{V}_\delta^2\right)=\frac{2k^2}{z^2}\cdot\frac{T_\delta}{T_0}; \tag{12.4.38}$$

отсюда

$$z=k\sqrt{2\left(1-\overline{V}_\delta^2\right)/c_{fx}}. \tag{12.4.39}$$

Прологарифмируем выражение (12.4.36):

$$2\ln z+z=(n+1)\ln\left(1-\overline{V}_\delta^2\right)+\ln\mathbf{Re}_x+\ln 0{,}656.$$

После подстановки значения z из (12.4.39) найдем

$$2\ln\left[k\sqrt{2\left(1-\overline{V}_\delta^2\right)/c_{fx}}\right]+k\sqrt{2\left(1-\overline{V}_\delta^2\right)/c_{fx}}=$$
$$=(n+1)\ln\left(1-\overline{V}_\delta^2\right)+\ln\mathbf{Re}_x+\ln 0{,}656$$

или

$$k\sqrt{2\left(1-\overline{V}_\delta^2\right)/c_{fx}}=\ln\left(\mathbf{Re}_xc_{fx}\right)+n\ln\left(1-\overline{V}_\delta^2\right)+C_3,$$

где $C_3=\ln 0{,}656-2\ln\left(k\sqrt{2}\right)$.

Принимая $k=0{,}3914$ и переходя к десятичным логарифмам, находим

$$0{,}242\sqrt{1-\overline{V}_\delta^2}\Big/\sqrt{c_{fx}}=\lg(\mathbf{Re}_x c_{fx})+n\lg(1-\overline{V}_\delta^2)+0{,}33. \qquad (12.4.40)$$

Так как $1-\overline{V}_\delta^2=\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right)^{-1}$, то, обозначая $c_{fx}=(c_{fx})_{\text{сж}}$, получим

$$\frac{0{,}242}{\sqrt{(c_{fx})_{\text{сж}}}}=$$

$$=\sqrt{1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2}\left\{\lg\left[\mathbf{Re}_x(c_{fx})_{\text{сж}}\right]-n\lg\left(1+\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right)+0{,}33\right\}. \qquad (12.4.41)$$

Формула (12.4.41) соответствует выражению, полученному в работе [3] на основании логарифмического закона с учетом поправки Дородницына. Причем в правой части этого выражения численный коэффициент равен не 0,33, а 0,15. Такое отличие, однако, не сказывается существенно на величине $(c_{fx})_{\text{сж}}$.

Из (12.4.41) следует, что местный коэффициент трения пластинки с увеличением числа M уменьшается. Заметим, что этот результат, пригодный для пластинки, может не иметь места при рассмотрении пограничного слоя около криволинейной поверхности вследствие влияния на течение в этом случае продольного градиента давления.

Коэффициент трения по формуле (12.4.41) вычисляют путем последовательных приближений. В первом приближении коэффициент $c_{fx}=(c_{fx})_{\text{сж}}^{(1)}$ можно найти для заданного отношения T_δ/T_0^* по (12.4.38), приняв z равным $10\div12$. Внося это значение $(c_{fx})_{\text{сж}}^{(1)}$ в правую часть (12.4.41), найдем значение $c_{fx}=(c_{fx})_{\text{сж}}^{(2)}$ во втором приближении. Этот результат можно уточнить, внеся значение $c_{fx}=(c_{fx})_{\text{сж}}^{(2)}$ в правую часть (12.4.41) и вновь вычислив значение $c_{fx}=(c_{fx})_{\text{сж}}^{(3)}$.

Полный коэффициент сопротивления трения пластинки с учетом сжимаемости определяется по формуле (12.3.28′) путем численного интегрирования с использованием выражения (12.4.41) для $(c_{fx})_{\text{сж}}$.

Для несжимаемой среды местный коэффициент трения найдем из (12.4.41), положив $\mathbf{M}_\delta=0$:

$$0{,}242/\sqrt{(c_{fx})_{\text{нсж}}}=\lg\left[\mathbf{Re}_x(c_{fx})_{\text{нсж}}\right]+0{,}33. \qquad (12.4.42)$$

Для определения толщины пограничного слоя следует воспользоваться уравнением (12.4.6), в соответствии с которым

$$\delta=(1-\overline{V}_\delta^2)^{-k/(k-1)}\int\limits_0^{\eta_\delta}(1-\overline{V}_x^2)\,d\eta. \qquad (12.4.43)$$

Степенной закон распределения скорости

Чтобы установить закон распределения скорости по сечению турбулентного пограничного слоя и определить зависимость для напряжения трения на поверхности плоской пластинки, воспользуемся аналогией с движением вязкой несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе (рис. 12.4.1). Рассмотрим это движение. Выделим жидкость, заключенную между сечениями *1* и *2*, расположенными на расстоянии l друг от друга. Примем, что эти сечения достаточно удалены от входа в трубу и поэтому движение в них одинаково, т. е. одинаковы, в частности, касательные напряжения и распределение скоростей. Одинаковое значение скоростей в сечениях означает, что частицы жидкости движутся, не испытывая ускорения. Поэтому силы, действующие на выделенный объем жидкости между сечениями *1* и *2*, находятся в равновесии, т. е.

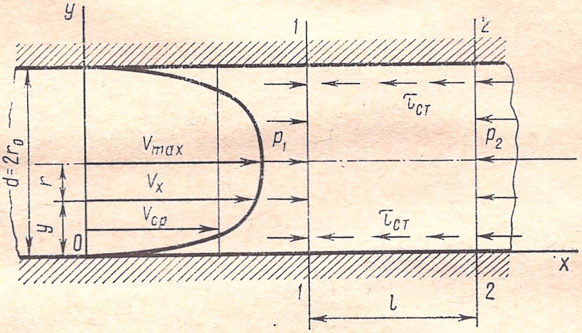


Рис. 12.4.1. Схема движения вязкой жидкости в круглой цилиндрической трубе

$$F=(p_1-p_2)(\pi d^2/4)=\tau_{ст}\pi l d, \qquad (12.4.44)$$

где $d=2r_0$ — диаметр трубы; $\tau_{ст}$ — напряжение трения на стенке.

Отсюда

$$p_1-p_2=4\tau_{ст}(l/d). \qquad (12.4.45)$$

Кроме того, силу F в (12.4.44) можно выразить при помощи формулы (1.3.5) для гидродинамического сопротивления. Вводя в эту формулу обозначения для силы сопротивления $X=F$ и для коэффициента гидродинамического сопротивления $c_x=\lambda$, определяя далее скоростной напор $q=\rho V^2{}_{ср}/2$ по средней скорости $V_{ср}$ в трубе (рис. 12.4.1) и принимая в качестве характерной площади боковую поверхность $S=\pi l d$, напишем $(p_1-p_2)(\pi d^2/4)=\lambda(\rho V^2{}_{ср}/2)\pi l d$. Отсюда находим формулу для определения потерь на трение:

$$p_1-p_2=4\lambda(\rho V^2_{ср}/2)(l/d), \qquad (12.4.46)$$

где средняя скорость определяется по заданному расходу Q в трубе:

$$V_{\text{ср}}=4Q/(\pi d^2). \tag{12.4.47}$$

Коэффициент сопротивления λ можно определить экспериментальным исследованием. Такое исследование было проведено Г. Блазиусом, который установил, что для гладких труб коэффициент сопротивления при турбулентном режиме и числах Рейнольдса, достигавших значений

$$2{,}3\cdot 10^3\leqslant \mathbf{Re}_d=\rho V_{\text{ср}}d/\mu\leqslant 10^5, \tag{12.4.48}$$

будет

$$\lambda=0{,}3164/\mathbf{Re}_d^{1/4}. \tag{12.4.49}$$

Внесем это выражение в (12.4.46) и заменим p_1-p_2 значением из (12.4.45). В результате

$$\tau_{\text{ст}}=0{,}3164\rho V_{\text{ср}}^2/(8\mathbf{Re}_d^{1/4})=0{,}03955V_{\text{ср}}^{7/4}\rho^{3/4}\mu^{1/4}d^{-1/4}. \tag{12.4.50}$$

Для определения средней скорости $V_{\text{ср}}$ воспользуемся результатами исследований движения жидкости по круглой трубе, которыми установлено, что скорость по ее сечению меняется по степенному закону корня седьмой степени

$$V_x=V_{\max}(y/r_0)^{1/7}. \tag{12.4.51}$$

Этот закон отображает гипотезу, в соответствии с которой при движении жидкости сохраняется кинематическое подобие, т. е. независимо от абсолютных размеров трубы в точках с одинаковым значением y/r_0 отношение местной скорости V_x к скорости на оси трубы $V_{\max}$ будет также одинаковым.

Средняя скорость по сечению трубы в соответствии с (12.4.47)

$$V_{\text{ср}}=\frac{Q}{\pi r_0^2}=V_{\max}\int\limits_0^{r_0}2\pi r\left(\frac{r_0-r}{r_0}\right)^{1/7}dr/(\pi r_0^2)=0{,}816V_{\max}. \tag{12.4.52}$$

Подставим (12.4.52) в (12.4.50):

$$\tau_{\text{ст}}=0{,}03955(0{,}816V_{\max})^{7/4}\rho^{3/4}\mu^{1/4}(2r_0)^{-1/4}=$$

$$=0{,}0233\rho V_{\max}^2(\nu/V_{\max}r_0)^{1/4}. \tag{12.4.53}$$

Рассматривая движение вязкой турбулентной жидкости по круглой трубе и в пограничном слое, можно заметить сходство профилей скорости по их сечениям. При этом максимальной скорости $V_{\max}$ на оси трубы соответствует скорость V_δ на внешней границе пограничного слоя, радиусу трубы r_0 — толщина слоя δ. Исследования показали, что этой аналогией можно воспользоваться для получения зависимостей, определяющих течение в турбулентном пограничном слое. Заменяя r_0 на δ и $V_{\max}$ на V_δ в (12.4.51), найдем для пограничного слоя степенной закон (закон корня седьмой степени) распределения скорости по его сечению:

$$V_x = V_\delta (y/\delta)^{1/7}. \tag{12.4.54}$$

Аналогичная замена в (12.4.53) позволяет получить формулу для напряжения трения на стенке

$$\tau_{\text{ст}} = 0{,}0233 \rho V_\delta^2 [\nu/(V_\delta \delta)]^{1/4}. \tag{12.4.55}$$

Для вычисления напряжения трения по (12.4.55) необходимо предварительно определить толщину пограничного слоя δ. Для этого воспользуемся интегральным соотношением (12.3.1). Подставив в него вместо V_x зависимость (12.4.54), а вместо $\tau_{\text{ст}}$ — значение (12.4.55), найдем

$$\rho V_\delta^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right] dy = 0{,}0233 \rho V_\delta^2 \left(\frac{\nu}{V_\delta \delta}\right)^{1/4}. \tag{12.4.56}$$

Вычисляя интеграл, получим

$$d\delta/dx = 0{,}2395 [\nu/(V_\delta \delta)]^{1/4}.$$

Разделив переменные в этом дифференциальном уравнении, найдем

$$\delta^{1/4} d\delta = 0{,}2395 (\nu/V_\delta)^{1/4} dx.$$

Решение этого уравнения дает

$$(4/5)\,\delta^{5/4} = 0{,}2395 (\nu/V_\delta)^{1/4} x + C. \tag{12.4.57}$$

Постоянная интегрирования C должна определяться, строго говоря, в точке перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный из условия, в соответствии с которым в этой точке, удаленной от передней кромки на расстояние $x = x_{\text{кр}}$, толщина слоя $\delta = \delta_{\text{кр}}$. При этом расстояние $x_{\text{кр}}$ определяется по заданному критическому числу Рейнольдса $\mathbf{Re}_{\text{кр}} = V_\delta x_{\text{кр}}/\nu$, а толщина $\delta_{\text{кр}}$ находится для этого числа $\mathbf{Re}_{\text{кр}}$ по соответствующей формуле для ламинарного пограничного слоя. При больших числах Рейнольдса длина ламинарного участка невелика и в практических расчетах его влияние на толщину турбулентного пограничного слоя может оказаться пренебрежимо малым. В этих случаях можно считать, что турбулентный пограничный слой начинается у передней кромки, где при $x = 0$ толщина слоя $\delta = 0$. В соответствии с этим в (12.4.57) константа $C = 0$ и, следовательно, толщина слоя

$$\delta = \delta_{\text{нсж}} = (0{,}37/\mathbf{Re}_x^{1/5})\, x, \tag{12.4.58}$$

где $\mathbf{Re}_x = V_\delta x/\nu_\delta$; $\nu_\delta = \nu$.

Вводя относительные величины $\overline{\delta}_{\text{нсж}} = \delta_{\text{нсж}}/L$, $\overline{x} = x/L$ и число $\mathbf{Re}_L = V_\delta L/\nu_\delta$, перепишем (12.4.58) в виде

$$\overline{\delta} = \overline{\delta}_{\text{нсж}} = \delta_{\text{нсж}}/L = 0{,}37\,(\overline{x}^{4/5}/\mathbf{Re}_L^{1/5}). \tag{12.4.58'}$$

Сравнивая зависимости (12.3.19″) и (12.4.58′), можно сделать вывод, что толщина турбулентного пограничного слоя нарастает более интенсивно, чем ламинарного. Это объясняется перемешиванием макроскопических частиц, свойственным турбулентному характеру течения жидкости и способствующим его интенсивному росту.

Для вычисления напряжения $\tau_{ст}$ воспользуемся формулой (12.4.55). Приняв $\rho=\rho_\delta$, $\nu=\nu_\delta$ и внеся в нее значение δ из (12.4.58), получим

$$\tau_{ст}=(\tau_{ст})_{нсж}=0{,}0299\rho_\delta V_\delta^2/\mathbf{Re}_x^{1/5}. \qquad (12.4.59)$$

Вводя величины $\mathbf{Re}_L=V_\delta L/\nu_\delta$ и $\bar{x}=x/L$, перепишем (12.4.59) в вид

$$(\tau_{ст})_{нсж}=0{,}0299\rho_\delta V_\delta^2/(\mathbf{Re}_L^{1/5}\bar{x}^{1/5}). \qquad (12.4.59')$$

Как видно из сопоставления (12.3.23) и (12.4.59), напряжение трения при турбулентном течении будет значительно больше, чем при ламинарном, при одних и тех же значениях числа $\mathbf{Re}_x$. Таким образом, турбулизация пограничного слоя сопровождается резким возрастанием касательных напряжений. Вместе с тем при турбулентном течении напряжение трения и другие параметры пограничного слоя зависят от числа Рейнолььдса слабее, чем при ламинарном течении. Как известно влияние этого числа обусловлено действием молекулярных сил вязкости, которые наиболее существенно проявляются в ламинарном пограничном подслое. При этом, чем больше скорость и, следовательно, число Рейнольдса, тем тоньше этот подслой, слабее действие молекулярных сил вязкости и в соответствии с этим меньше влияние самого числа Рейнольдса на параметры трения.

По величине касательного напряжения можно определить местный коэффициент трения:

$$(c_{fx})_{нсж}=2(\tau_{ст})_{нсж}/(\rho_\delta V_\delta^2)=0{,}0598/\mathbf{Re}_x^{1/5} \qquad (12.4.60)$$

или

$$(c_{fx})_{нсж}=0{,}0598/(\mathbf{Re}_L^{1/5}\bar{x}^{1/5}). \qquad (12.4.60')$$

Силу сопротивления трения для одной стороны пластинки определим с помощью формулы (12.3.28):

$$X_{f\,нсж}=\int_0^L(\tau_{ст})_{нсж}dx. \qquad (12.4.61)$$

В соответствии с этой формулой и с учетом (12.4.60′) коэффициент сопротивления трения

$$(c_{xf})_{нсж}=\frac{2X_{f\,нсж}}{\rho_\delta V_\delta^2 L\cdot 1}=\frac{1}{L}\int_0^L\frac{2(\tau_{ст})_{нсж}}{\rho_\delta V_\delta^2}dx=\frac{0{,}0598}{\mathbf{Re}_L^{1/5}}\int_0^1\frac{d\bar{x}}{\bar{x}^{1/5}},$$

откуда

$$(c_{xf})_{\text{нсж}}=0{,}075/\mathbf{Re}_L^{1/5}. \qquad (12.4.62)$$

Эта формула дает надежные результаты, если число $\mathbf{Re}_L$ не превышает 10^6. Для бо́льших значений $\mathbf{Re}_L$ лучшие результаты дают другие зависимости. Например, при $2\cdot10^6<\mathbf{Re}_L<10^{10}$ коэффициент трения

$$(c_{xf})_{\text{нсж}}=0{,}032\mathbf{Re}^{-0{,}145}. \qquad (12.4.63)$$

В этом случае для расчета коэффициента $(c_{xf})_{\text{нсж}}$ можно воспользоваться также универсальной формулой Прандтля — Шлихтинга

$$(c_{xf})_{\text{нсж}}=0{,}455\,(\lg\mathbf{Re}_L)^{-2{,}58}. \qquad (12.4.64)$$

Для определения условных толщин пограничного слоя воспользуемся формулами (12.3.31). Внося в них отношение скоростей V_x/V_δ согласно степенному закону (12.4.54), осуществляя интегрирование и привлекая соотношения (12.4.58), (12.4.60), получим:

$$\delta^{**}_{\text{нсж}}=0{,}097\delta_{\text{нсж}};\ \delta^{*}_{\text{нсж}}=0{,}125\delta_{\text{нсж}}, \qquad (12.4.65)$$

где $\delta_{\text{нсж}}$ определяется из (12.4.58).

§ 12.5. ТЕМПЕРАТУРА И ЭНТАЛЬПИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

Распределение температуры и энтальпии

При малой скорости обтекания нагрев газа, обусловленный торможением в пограничном слое, почти отсутствует и температуру в нем можно считать практически равной ее значению в свободном потоке. Действительно, из (12.3.18) следует, что при отсутствии теплопередачи для $\mathbf{M}_\delta=0{,}5$ температура газа на стенке, равная температуре торможения, $T_{\text{ст}}=T_0=T_\delta(1+0{,}2\cdot0{,}25)=1{,}05\ T_\delta$, т. е. отличается от температуры свободного потока всего на 5%.

При больших скоростях вследствие торможения газа происходит значительное повышение температуры и энтальпии в пограничном слое, которое соответствует характеру изменения скорости по сечению пограничного слоя.

Если все другие виды переноса тепла, кроме теплопроводности, отсутствуют, число $\mathbf{Pr}=1$ и теплопередача у стенки равна нулю, то в соответствии с (12.1.16) температура в пограничном слое

$$T=T_0-V_x^2/[2\,(c_p)_{\text{ср}}], \qquad (12.5.1)$$

где $(c_p)_{\text{ср}}$ — средняя удельная теплоемкость для интервала температур T_0—T. Температура T_0, являющаяся мерой полной энергии, не меняется по толщине слоя и определяется параметрами $T=T_\delta$,

$V_x = V_\delta$ на внешней границе пограничного слоя в соответствии с выражением

$$T_0 = T_\delta + V_\delta^2/[2(c_p)_{\text{ср}}]. \qquad (12.5.2)$$

Произведя здесь замены:

$$V_\delta^2 = \mathbf{M}_\delta^2 a_\delta^2 = \mathbf{M}_\delta^2 \bar{k} R T_\delta; \quad (c_p)_{\text{ср}} = R \frac{(c_p)_{\text{ср}}}{(c_p)_{\text{ср}} - (c_v)_{\text{ср}}} = \frac{R\bar{k}}{\bar{k} - 1}, \qquad (12.5.3)$$

где $\bar{k} = (c_p)_{\text{ср}}/(c_v)_{\text{ср}}$ — средняя величина отношения удельных теплоемкостей для интервала температур T_0—T_δ, получим

$$T_0 = T_\delta \left(1 + \frac{\bar{k} - 1}{2} \mathbf{M}_\delta^2\right). \qquad (12.5.4)$$

При постоянных теплоемкостях следует принять $(c_p)_{\text{ср}} = c_p = \text{const}$ и $\bar{k} = k = \text{const}$. В тех случаях, когда теплоемкость сильно меняется с температурой вследствие диссоциации и ионизации и ее нельзя заменить средним значением, целесообразно вместо T и T_0 использовать соответственно энтальпии i и i_0. Согласно (3.4.14) и по аналогии с (12.5.1) энтальпия в некоторой точке сечения пограничного слоя

$$i = i_0 - V_x^2/2. \qquad (12.5.5)$$

Подставляя сюда значения $i = i_\delta$ и $V_x = V_\delta$, найдем для энтальпии торможения

$$i_0 = i_\delta + V_\delta^2/2. \qquad (12.5.6)$$

При постоянных теплоемкостях

$$i_\delta = c_p T_\delta = kRT_\delta/(k-1) = a_\delta^2/(k-1), \qquad (12.5.7)$$

поэтому, учитывая, что $V_\delta^2 = \mathbf{M}_\delta^2 a_\delta^2$, энтальпия торможения

$$i_0 = i_\delta \left(1 + \frac{k-1}{2} \mathbf{M}_\delta^2\right). \qquad (12.5.8)$$

Принятое предположение об отсутствии теплопередачи у стенки и равенстве числа $\mathbf{Pr} = 1$ не соответствует действительности, поэтому в реальных условиях температура и энтальпия на стенке отличаются от полученных ранее значений T_0 и i_0.

Рассмотрим уже известный случай адиабатической (теплоизолированной) стенки, характеризующейся тем, что подводимое к такой стенке от пограничного слоя тепло не расходуется на ее нагревание и в свою очередь сама стенка не отдает тепло пограничному слою. При этом перенос энергии в самом пограничном слое происходит следующим образом. Вследствие торможения потока, обусловленного действием сил вязкости, температура возрастает от значения на границе слоя до некоторой величины на стенке и таким образом возникает градиент температуры $\partial T/\partial y \neq 0$. В таком случае в соответствии с законом Фурье (3.2.7) должна возникнуть передача тепла путем теплопроводности во внешние слои газа с меньшей температурой. Нагрев будет возрастать, пока не установится равновесие между этой теплопередачей и противоположным потоком тепла от внешних слоев к внутренним, обусловленным работой сил вязкости. Вследствие отвода тепла от участков пограничного слоя, расположенных у стенки, температура на обтекаемой поверхности $T_{\text{ст}} = T_r$ будет меньше температуры торможения T_0. Температуру T_r и соответствующую ей энтальпию i_r называют соответственно температурой и энтальпией восстановления. Снижение температуры у стенки можно охарактеризовать параметром

$$r = (T_r - T_\delta)/(T_0 - T_\delta), \tag{12.5.9}$$

называемым коэффициентом восстановления температуры, указывающим на то, как близка температура восстановления к температуре торможения. Этот коэффициент характеризует долю кинетической энергии внешнего потока, которая переходит в теплосодержание (энтальпию) при полном его торможении.

Из (12.5.9) можно получить следующее выражение для температуры восстановления:

$$T_r = T_\delta + r(T_0 - T_\delta) = T_\delta[1 + r(T_0/T_\delta - 1)]. \tag{12.5.10}$$

Внося сюда значения разности $T_0 - T_\delta$ из (12.5.2) и отношения T_0/T_δ из (12.5.4), получим:

$$T_r = T_\delta + r\frac{V_\delta^2}{2(c_p)_{\text{ср}}}; \tag{12.5.11}$$

$$T_r = T_\delta\left(1 + r\frac{\overline{k} - 1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right). \tag{12.5.12}$$

При исследовании движения вязких диссоциирующих газов целесообразнее перейти к другим соотношениям. Для таких газов характерно значительное увеличение удельной темплоемкости, так как к тепловой энергии газа прибавляются затраты части энергии на диссоциацию. В подобных случаях уже нецелесообразно пользоваться температурой как мерой энергии. Для этих целей лучше применять энтальпию.

В рассматриваемом случае для оценки влияния теплопроводности на пограничный слой в диссоциирующем газе следует использовать понятие об энтальпии восстановления i_r и соответствующем коэффициенте восстановления энтальпии

$$r = (i_r - i_\delta)/(i_0 - i_\delta). \tag{12.5.13}$$

Подобно тому как при исследовании теплопередачи в условиях больших скоростей обтекания и при отсутствии диссоциации для $\mathbf{Pr} \neq 1$ вводилось понятие коэффициента r восстановления температуры, так и при наличии химических реакций будет, очевидно, оправдано введение аналогичного коэффициента восстановления энтальпии, который бы учитывал степень преобразования химической энергии в тепловую.

Из (12.5.10) следует, что

$$i_r = i_\delta + r(i_0 - i_\delta) = i_\delta[1 + r(i_0/i_\delta - 1)]. \qquad (12.5.14)$$

Используя формулы (12.5.6) для $i_0 - i_\delta$ и (12.5.8) для i_0/i_δ, получим:

$$i_r = i_\delta + r(V_\delta^2/2); \qquad (12.5.15)$$

$$i_r = i_\delta\left(1 + r\frac{k-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right). \qquad (12.5.16)$$

При помощи коэффициента восстановления r можно охарактеризовать изменение температуры T и энтальпии i по сечению пограничного слоя. По аналогии с (12.5.11) и (12.5.15)

$$T_r = T + r\left[V_x^2/2(c_p)_{\text{ср}}\right]; \; i_r = i + r(V_x^2/2),$$

откуда

$$T = T_r - r\left[V_x^2/2(c_p)_{\text{ср}}\right]; \qquad (12.5.17)$$

$$i = i_r - r(V_x^2/2), \qquad (12.5.18)$$

где $(c_p)_{\text{ср}}$ — средняя удельная теплоемкость для интервала температур $T_r - T$.

В § 3.5 было отмечено, что соотношение между тепловым потоком, обусловленным трением, и количеством тепла, уносимым молекулами при их перемешивании, определяется числом Прандтля [см. (3.5.11)]. Поэтому естественно предположить, что коэффициент восстановления r зависит от числа Прандтля, которое для условий на стенке по аналогии с (3.5.11)

$$\mathbf{Pr} = \mu_{\text{ст}}(c_p)_{\text{ст}}/\lambda_{\text{ст}}. \qquad (12.5.19)$$

Теоретическими и экспериментальными исследованиями установлено, что коэффициент восстановления можно для ламинарного и турбулентного пограничных слоев соответственно принять:

$$r_{\text{л}} = \sqrt{\mathbf{Pr}}, \qquad (12.5.20)$$

$$r_{\text{т}} = \sqrt[3]{\mathbf{Pr}}. \qquad (12.5.21)$$

Для воздуха число Прандтля изменяется в пределах от 0,75 при низких температурах до 0,65 при высоких. В практических расчетах можно использовать среднее значение числа $\mathbf{Pr} = 0{,}7$, которому соответствуют

$$r_{\text{л}} \approx 0{,}84 \text{ и } r_{\text{т}} \approx 0{,}89. \qquad (12.5.22)$$

Для $\mathbf{Pr} = 1$ коэффициент восстановления $r = 1$. В этом случае температура и энтальпия восстановления совпадают соответственно с температурой и энтальпией торможения.

Характер изменения температуры и энтальпии по сечению пограничного слоя для различных условий обтекания показан на рис. 12.5.1. При этом кривые, изображенные на рис. 12.5.1, *а*, характеризуют изменение температуры и энтальпии для теплоизолированной стенки в двух случаях, когда $\mathbf{Pr}=1$ и $\mathbf{Pr}\neq 1$. Естественно, распределение температуры и энтальпии изменится в случае нетеплоизолированной стенки, т. е. при наличии отвода или подвода тепла (рис. 12.5.1, *б, в*). При отводе тепла (охлаждаемая стенка) нетеплоизолированный пограничный слой, отдавая тепло стенке, сам будет охлаждаться, поэтому температура газа $T_{\text{ст}}$ у такой стенки меньше температуры восстановления i_r и соответственно энтальпия газа $i_{\text{ст}}$ меньше энтальпии восстановления T_r. При этом температуру газа $T_{\text{ст}}$ можно рассматривать как температуру поверхности, которую в дальнейшем будем условно называть температурой стенки. Если от какого-либо внешнего источника тепло подводится и температура стенки превышает максимальную температуру пограничного слоя (нагреваемая стенка), то пограничный слой будет также нагреваться, следовательно, для газа у поверхности $T_{\text{ст}}>T_r$ и $i_{\text{ст}}>i_r$.

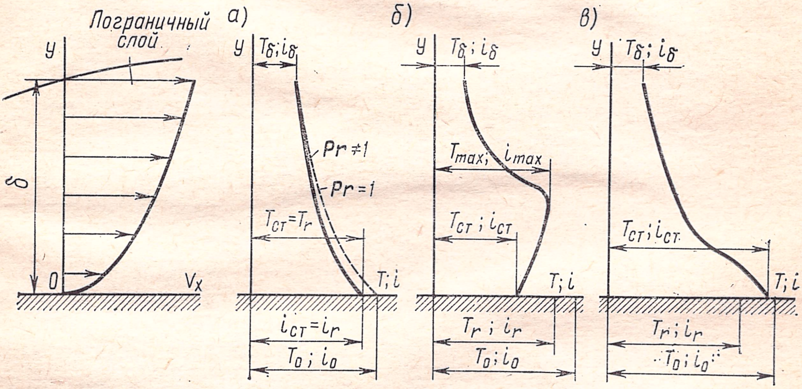


Рис. 12.5.1. Изменение температуры и энтальпии по сечению пограничного слоя:

а — адиабатическая (теплоизолированная) стенка; *б* — охлаждаемая стенка; *в* — нагреваемая стенка

При очень больших скоростях летательных аппаратов стенка обычно охлаждается ($i_{\text{ст}}<i_r$; $T_{\text{ст}}<T_r$), что объясняется излучением тепла с поверхности, которое не может компенсироваться сравнительно малым притоком тепла путем теплопроводности по материалу стенки от источников тепла, расположенных внутри летательного аппарата. Температуру такой стенки обозначим через $T_{\text{ст}}$, т. е. как и температуру газа у стенки. Однако следует помнить, что в наиболее общем случае температура газа не совпадает с температурой самой стенки и, кроме того, отличается от T_r. Указанную

ранее величину $i_{\text{ст}}$ надо рассматривать как энтальпию условного газа, температура которого равнялась бы температуре стенки $T_{\text{ст}}$.

Движущийся аппарат может стать нагреваемым ($i_{\text{ст}}>i_r$; $T_{\text{ст}}>T_r$), если полет происходит с замедлением и сопровождается уменьшением температуры восстановления, в то время как перегретая стенка не успевает охладиться.

В аэродинамических трубах, в которых отсутствует специальный подогрев воздуха, а температура торможения близка к температуре окружающей среды, стенка экспериментальной модели может оказаться нагреваемой. Это объясняется тем, что к поверхности модели может идти поток тепла через державку, в то время как радиационный поток от холодной стенки модели будет пренебрежимо малым.

Определяющая температура

Наличие числа Маха в приведенных зависимостях для определения параметров движения вязкой среды отражает тот факт, что вследствие торможения потока в пограничном слое и связанного с этим повышения температуры изменяется плотность. В этом проявляется свойство сжимаемости, оказывающее влияние на течение газа в пограничном слое. С ростом скоростей увеличивается температура, что влечет за собой наряду с изменением плотности также изменение термодинамических параметров и кинетических коэффициентов газа в пограничном слое. При высоких температурах в нем могут происходить химические реакции.

Эти явления имеют важное значение при формировании процессов трения и теплообмена в пограничном слое. Однако учет этих явлений при расчете параметров пограничного слоя и, в частности, распределения температуры по его толщине, имеющего весьма сложный характер, связан с большими трудностями. Поэтому были предприняты попытки отыскать сравнительно простые приближенные методы расчета параметров пограничного слоя при очень высоких скоростях обтекания. Один из методов, рассматриваемый далее, основан на использовании зависимостей, сходных по внешнему виду с теми соотношениями, которые получены в результате исследований пограничного слоя в несжимаемой среде. Такая возможность вытекает из того факта, что вблизи поверхности, в пристеночной области пограничного слоя, поток сильно заторможен и, следовательно, газ близок по свойствам к несжимаемой среде. Если считать, что течение в этой области оказывает основное влияние на процессы трения и теплопередачи, то, следовательно, можно использовать для расчета параметров пограничного слоя зависимости, структура которых будет такая же, как для несжимаемой среды. Разница будет заключаться в том, что в эти зависимости войдут параметры, определяемые как функции температуры. Естественно, возникает вопрос, по какой температуре пограничного слоя следует рассчитывать эти параметры.

Как показали теоретические и экспериментальные исследования, удовлетворительные результаты получаются в том случае,

17-8

если расчет вести по определяющей температуре T^*, которая представляет собой некоторое среднее значение по сечению пограничного слоя. Параметры газа, рассчитанные по температуре T^*, называют определяющими (энтальпия i^*, плотность ρ^*, динамический коэффициент вязкости μ^* и др.).

При больших скоростях обтекания, когда в пограничном слое существенное значение имеют физико-химические превращения, в основу расчета его параметров следует положить определяющую энтальпию i^*, по которой вычисляют другие определяющие параметры, включая температуру T^*.

В результате решения уравнения теплопередачи для ламинарного пограничного слоя Э. Эккертом получена следующая формула для определяющей энтальпии:

$$i^* = 0{,}5\,(i_{\text{ст}} + i_\delta) + 0{,}22\,(i_r - i_\delta). \qquad (12.5.23)$$

Определяющая энтальпия зависит от структуры пограничного слоя и числа $\mathbf{M}_\infty$. Имеется ряд соотношений, позволяющих рассчитывать величину i^* отдельно для ламинарного и турбулентного пограничных слоев, а также для различных интервалов чисел $\mathbf{M}_\infty$. Формула (12.5.23) выгодно отличается от этих отношений своей универсальностью и может быть применена с известным приближением как для ламинарного, так и для турбулентного течений в довольно широком диапазоне чисел $\mathbf{M}_\infty$.

Как видно из (12.5.23), для вычисления i^* необходимо знать энтальпию газа $i_{\text{ст}}$ при температуре стенки. В частном случае, когда температура поверхности поддерживается при помощи каких-либо специальных средств охлаждения на требуемом уровне, эта энтальпия будет известна. Если же разогрев протекает самопроизвольно, то определение $i_{\text{ст}}$ связано с решением задачи о теплопередаче между стенкой и газом. В частном случае теплоизолированной стенки ($i_{\text{ст}} = i_r$) определяющая энтальпия

$$i^* = 0{,}72\,i_r + 0{,}28\,i_\delta. \qquad (12.5.24)$$

Без учета теплопередачи в пограничном слое при $\mathbf{Pr} = 1$ энтальпия i_r будет равна энтальпии торможения i_0, которую вычисляют по (12.5.6). В соответствии с этим

$$i^* = 0{,}72\,(i_\delta + V_\delta^2/2) + 0{,}28\,i_\delta = i_\delta + 0{,}36\,V_\delta^2. \qquad (12.5.24')$$

Энтальпию i_δ на верхней границе пограничного слоя можно найти, решив задачу о невязком обтекании заданной поверхности. Энтальпию восстановления i_r, входящую в (12.5.23) и (12.5.24), определяют из выражения

$$i_r = i_\delta + r^*(V_\delta^2/2), \qquad (12.5.25)$$

в котором коэффициент восстановления рассчитывают как определяющий параметр в соответствии с (12.5.20) и (12.5.21):

$$r_{\text{л}}^* = \sqrt{\mathbf{Pr}^*}\,; \qquad (12.5.26)$$

$$r_{\text{т}}^* = \sqrt[3]{\mathbf{Pr}^*}\,. \qquad (12.5.27)$$

Здесь число Прандтля

$$\mathbf{Pr}^* = c_p^* \mu^*/\lambda^* \tag{12.5.28}$$

находится по определяющим значениям удельной теплоемкости, динамических коэффициентов вязкости и теплопроводности.

Соотношение (12.5.23) используется, во-первых, в общем случае диссоциирующего газа, а во-вторых, тогда, когда газ в пограничном слое разогревается до температуры, при которой диссоциация не наступает, но теплоемкости меняются. В первом случае определяющую температуру T^* находят как функцию p и i^*. Для вычислений можно использовать таблицы или диаграммы состояния воздуха при очень высоких температурах. Во втором случае для нахождения определяющей температуры можно применить соотношение (12.5.23), в котором энтальпия заменяется температурой в соответствии с выражениями

$$\left.\begin{aligned} i^* - i_\delta &= (c_p)^*_{\text{ср}} (T^* - T_\delta); \\ i_{\text{ст}} - i_\delta &= (c_p)^{(\text{ст})}_{\text{ср}} (T_{\text{ст}} - T_\delta); \\ i_r - i_\delta &= (c_p)^{(r)}_{\text{ср}} (T_r - T_\delta), \end{aligned}\right\} \tag{12.5.29}$$

где $(c_p)^*_{\text{ср}}$, $(c_p)^{(\text{ст})}_{\text{ср}}$, $(c_p)^{(r)}_{\text{ср}}$ — средние значения теплоемкостей, вычисляемые соответственно для интервала температур $T^* - T_\delta$, $T_{\text{ст}} - T_\delta$ и $T_r - T_\delta$.

Подставляя в (12.5.23) значения энтальпий из (12.5.29), получим зависимость для определяющей температуры T^*, причем температуру восстановления найдем при помощи формул (12.5.11) и (12.5.12), записанных в виде

$$T_r = T_\delta + r^* \left[V_\delta^2 / 2 (c_p)^*_{\text{ср}}\right]; \tag{12.5.30}$$

$$T_r = T_\delta \left(1 + r^* \frac{\bar{k}^* - 1}{2} \mathbf{M}_\delta^2\right). \tag{12.5.31}$$

Когда удельные теплоемкости практически не зависят от температуры (при $T \approx 700$—800 К и ниже), определяющая температура

$$T^* = 0{,}5 (T_{\text{ст}} + T_\delta) + 0{,}22 (T_r - T_\delta). \tag{12.5.32}$$

Для теплоизолированной стенки следует принять $T_{\text{ст}} = T_r$, следовательно,

$$T^* = 0{,}72 T_r + 0{,}28 T_\delta. \tag{12.5.33}$$

Термодинамические функции и кинетические коэффициенты вычисляют в зависимости от определяющей температуры по формулам (1.5.1), (1.5.2), (1.5.4), представленным в виде:

$$c_p^*/c_{p\infty} = (T^*/T_\infty)^\varphi; \quad \mu^*/\mu_\infty = (T^*/T_\infty)^n; \quad \lambda^*/\lambda_\infty = (T^*/T_\infty)^\varkappa. \tag{12.5.34}$$

§ 12.6. ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНКЕ ПРИ ВЫСОКИХ СКОРОСТЯХ ОБТЕКАНИЯ

Ламинарный пограничный слой

Используя понятие об определяющих параметрах, найдем связь между основными характеристиками ламинарного пограничного слоя для несжимаемой жидкости и сжимаемого газа, т. е. при высоких скоростях обтекания. Для этого введем в полученные ранее соотношения (см. § 12.3 и 12.4) для пограничного слоя в несжимаемой среде соответствующие параметры.

Рассмотрим толщину пограничного слоя. Ее величина для несжимаемой среды определяется по формуле (12.3.19′), которую запишем в виде

$$\delta_{\text{нсж}} = 4,64\sqrt{\mu_\delta x/(V_\delta \rho_\delta)}\ ;$$

здесь с индексом «δ» — параметры пограничного слоя в несжимаемой среде.

Для сжимаемого газа получим аналогичную формулу, если значения μ_δ и ρ_δ заменить соответствующими определяющими параметрами μ^* и ρ^*:

$$\delta_{\text{сж}} = 4,64\sqrt{\mu^* x/(V_\delta \rho^*)}\ . \qquad (12.6.1)$$

Отношение толщин:

$$\delta_{\text{сж}}/\delta_{\text{нсж}} = \sqrt{(\mu^*/\mu_\delta)(\rho_\delta/\rho^*)}\ . \qquad (12.6.2)$$

Аналогичное выражение можно получить для напряжения трения.

Для несжимаемой жидкости согласно (12.3.23)

$$(\tau_{\text{ст}})_{\text{нсж}} = 0,323\rho_\delta V_\delta^2\sqrt{\mu_\delta/(V_\delta \rho_\delta x)},$$

а для сжимаемого газа

$$(\tau_{\text{ст}})_{\text{сж}} = 0,323\rho^* V_\delta^2\sqrt{\mu^*/(V_\delta \rho^* x)}\ . \qquad (12.6.3)$$

Отношение напряжений трения:

$$(\tau_{\text{ст}})_{\text{сж}}/(\tau_{\text{ст}})_{\text{нсж}} = \sqrt{(\rho^*/\rho_\delta)(\mu^*/\mu_\delta)}\ . \qquad (12.6.4)$$

Для местных коэффициентов трения, отнесенных к скоростному напору $q_\delta = \rho_\delta V_\delta/2$ свободного потока:

$$(c_{fx})_{\text{нсж}} = 2\,(\tau_{\text{ст}})_{\text{нсж}}/(\rho_\delta V_\delta^2) = 0,646\sqrt{\mu_\delta/(V_\delta \rho_\delta x)}\ ;$$

$$(c_{fx})_{\text{сж}} = 2\,(\tau_{\text{ст}})_{\text{сж}}/(\rho_\delta V_\delta^2) = 0,646\sqrt{\mu^*/(V_\delta \rho^* x)}\cdot \rho^*/\rho_\delta . \qquad (12.6.5)$$

Отношение этих коэффициентов:

$$(c_{fx})_{\text{сж}}/(c_{fx})_{\text{нсж}} = (\tau_{\text{ст}})_{\text{сж}}/(\tau_{\text{ст}})_{\text{нсж}} = \sqrt{(\rho^*/\rho_\delta)(\mu^*/\mu_\delta)}\ . \qquad (12.6.6)$$

Коэффициент сопротивления трения (или средний по длине пластинки коэффициент трения) в несжимаемой среде согласно (12.3.30)

$$(c_{xf})_{\text{нсж}} = 1,292\sqrt{\mu_\delta/(V_\delta \rho_\delta L)}\ .$$

Для сжимаемого газа в соответствии с (12.3.28′) и (12.6.5)

$$(c_{xf})_{\text{сж}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^L (c_{fx})_{\text{сж}} dx = \frac{0,646}{L}\int\limits_0^L \sqrt{\frac{\mu^*}{V_\delta \rho^*}} \cdot \frac{\rho^*}{\rho_\delta} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}. \qquad (12.6.7)$$

При постоянной температуре стенки параметры μ^* и ρ^* не зависят от координаты x, поэтому

$$(c_{xf})_{\text{сж}} = 1,292\sqrt{\mu^*/(V_\delta \rho^* L)} \cdot \rho^*/\rho_\delta. \qquad (12.6.8)$$

Следовательно, отношение коэффициентов трения:

$$(c_{xf})_{\text{сж}}/(c_{xf})_{\text{нсж}} = (c_{fx})_{\text{сж}}/(c_{fx})_{\text{нсж}} = (\tau_{\text{ст}})_{\text{сж}}/(\tau_{\text{ст}})_{\text{нсж}} = \sqrt{(\mu^*/\mu_\delta)(\rho^*/\rho_\delta)}. \qquad (12.6.9)$$

Рассмотрим случай, когда в пограничном слое вследствие высокой температуры возникает диссоциация, в то время как свободное течение происходит при постоянных теплоемкостях. Полагая при этом, что давление по толщине слоя не меняется, можно, используя уравнения состояния, записать для отношения плотностей

$$\rho^*/\rho_\delta = \left(\mu^*_{\text{ср}}/\mu_{\text{ср}\delta}\right)\left(T_\delta/T^*\right), \qquad (12.6.10)$$

где $\mu^*_{\text{ср}}$ — определяющий средний молекулярный вес газа.

Применяя далее степенной закон (1.5.2) для динамического коэффициента вязкости, найдем

$$\mu^*/\mu_\delta = (T^*/T_\delta)^n. \qquad (12.6.11)$$

Вносят (12.6.10) и (12.6.11) в (12.6.2) и (12.6.9), получим:

$$\delta_{\text{сж}}/\delta_{\text{нсж}} = (T^*/T_\delta)^{(n+1)/2}\left(\mu_{\text{ср}\delta}/\mu^*_{\text{ср}}\right)^{1/2}; \qquad (12.6.12)$$

$$(c_{xf})_{\text{сж}}/(c_{xf})_{\text{нсж}} = (c_{fx})_{\text{сж}}/(c_{fx})_{\text{нсж}} = (\tau_{\text{ст}})_{\text{сж}}/(\tau_{\text{ст}})_{\text{нсж}} = (T^*/T_\delta)^{(n-1)/2}\left(\mu^*_{\text{ср}}/\mu_{\text{ср}\delta}\right)^{1/2}. \qquad (12.6.13)$$

Формула (12.6.12) показывает, что толщина ламинарного пограничного слоя сильно зависит от величины T^*/T_δ, а следовательно от числа $\mathbf{M}_\delta$ (скорости V_δ) и отношения $T_{\text{ст}}/T_\delta$ и возрастает по мере увеличения этих параметров. Зависимость коэффициента трения от определяющей температуры и, следовательно, от $\mathbf{M}_\delta$ и $T_{\text{ст}}/T_\delta$ слабее и носит противоположный характер: с ростом температуры коэффициент трения снижается.

Применение формул (12.6.12), (12.6.13) связано с вычислением T^* и $\mu^*_{\text{ср}}$ для диссоциирующего газа в пограничном слое. При этом вначале находят определяющую энтальпию i^*, по которой затем для заданного давления p_δ при помощи таблиц или графиков термодинамических функций подсчитывают T^* и $\mu^*_{\text{ср}}$. Если диссоциация не учитывается, то T^* определяется непосредственно по (12.5.32), а отношение $\mu^*_{\text{ср}}/\mu_{\text{ср}\delta}$ в (12.6.12), (12.6.13) принимается равным единице, т. е. в этом случае

$$\delta_{\text{сж}}/\delta_{\text{нсж}} = (T^*/T_\delta)^{(n+1)/2}; \qquad (12.6.14)$$

$$(c_{xf})_{\text{сж}}/(c_{xf})_{\text{нсж}} = (c_{fx})_{\text{сж}}/(c_{fx})_{\text{нсж}} = (\tau_{\text{ст}})_{\text{сж}}/(\tau_{\text{ст}})_{\text{нсж}} = (T^*/T_\delta)^{(n-1)/2}. \qquad (12.6.15)$$

Сравнивая величины, получаемые соответственно по формулам (12.6.12) и (12.6.14), (12.6.13) и (12.6.15), можно сделать вывод о влиянии диссоциации на толщину пограничного слоя и силу трения. Непосредственно из сравнения зависимостей (12.6.12) и (12.6.14), в которых отношения T^*/T_δ приняты одинаковыми, следует, что *диссоциация обусловливает снижение толщины слоя* (так как $\mu_{\text{ср}\,\delta}/\mu^*_{\text{ср}} < 1$). В действительности же отношения T^*/T_δ неодинаковы и уменьшение толщины будет еще больше, так как в диссоциирующем пограничном слое температура T^* (12.6.12) меньше, чем в недиссоциирующем (12.6.14).

Напряжение трения будет несколько больше в диссоциирующем газе вследствие снижения температуры, оказывающего более сильное воздействие, чем некоторый рост среднего молекулярного веса [см. (12.6.13)]. Физически такое изменение напряжения трения будет обусловлено тем, что с ростом диссоциации и связанным с этим снижением температуры увеличивается плотность и уменьшается вязкость. Влияние на силу трения противоположно: с увеличением плотности эта сила растет, а при снижении вязкости уменьшается. Однако увеличение плотности более интенсивно, чем уменьшение вязкости, и, следовательно, сила трения возрастает. При этом следует отметить, что указанный рост сил трения будет несколько бо́льшим вследствие образования при диссоциации дополнительного числа молекул газа (увеличения среднего молекулярного веса) и повышения по этой причине вязкости.

Простой метод расчета пограничного слоя по определяющим параметрам весьма эффективен, так как позволяет учесть влияние на толщину пограничного слоя и силу трения таких факторов, как сжимаемость, переменность теплоемкостей, диссоциация и теплопередача. Влияние последнего фактора находит свое выражение в зависимости определяющей температуры T^* от температуры восстановления T_r и температуры $T_{\text{ст}} \neq T_r$ (при наличии подвода или отвода тепла от стенки).

Турбулентный пограничный слой

Аналогично тому, как это было сделано для ламинарного пограничного слоя, получим при помощи определяющих параметров зависимости для толщины пограничного слоя, напряжения и коэффициента трения в случае турбулентного движения. При этом будем исходить из соотношений для параметров турбулентного пограничного слоя в несжимаемой среде, найденных с использованием степенного закона распределения скорости по сечению пограничного слоя (закона корня седьмой степени).

Толщина пограничного слоя в несжимаемой среде определяется по формуле (12.4.58), которую запишем в виде

$$\delta_{\text{нсж}} = 0{,}37\,(\mu_\delta/V_\delta\rho_\delta)^{1/5}x^{4/5}.$$

Заменяя здесь μ_δ и ρ_δ на их определяющие значения μ^* и ρ^*, получим зависимость для толщины пограничного слоя в сжимаемом газе

$$\delta_{\text{сж}} = 0{,}37\,(\mu^*/V_\delta\rho^*)^{1/5}x^{4/5}. \qquad (12.6.16)$$

Отношение толщин:

$$\delta_{\text{сж}}/\delta_{\text{нсж}} = (\mu^*/\mu_\delta)^{1/5}\,(\rho_\delta/\rho^*)^{1/5}. \qquad (12.6.17)$$

Рассмотрим, как можно найти напряжение трения в турбулентном сжимаемом пограничном слое. Для этого напишем, используя (12.4.59), выражение для $\tau_{\text{ст}}$ в турбулентном несжимаемом пограничном слое в следующем виде:

$$(\tau_{\text{ст}})_{\text{нсж}} = 0{,}0299\rho_\delta V_\delta^2\,(\mu_\delta/V_\delta\rho_\delta)^{1/5}x^{-1/5}.$$

Вводя сюда определяющие параметры, найдем соответствующую зависимость для сжимаемого газа:

$$(\tau_{\text{ст}})_{\text{сж}} = 0{,}0299\rho^* V_\delta^2\,(\mu^*/V_\delta\rho^*)^{1/5}x^{-1/5}. \qquad (12.6.18)$$

Отношение напряжений трения:

$$(\tau_{\text{ст}})_{\text{сж}}/(\tau_{\text{ст}})_{\text{нсж}} = (\mu^*/\mu_\delta)^{1/5}(\rho^*/\rho_\delta)^{4/5}. \qquad (12.6.19)$$

Такими же будут отношения местных c_{fx} и средних c_{xf} коэффициентов трения:

$$(c_{xf})_{\text{сж}}/(c_{xf})_{\text{нсж}} = (c_{fx})_{\text{сж}}/(c_{fx})_{\text{нсж}} = (\tau_{\text{ст}})_{\text{сж}}/(\tau_{\text{ст}})_{\text{нсж}} = (\mu^*/\mu_\delta)^{1/5}(\rho^*/\rho_\delta)^{4/5}, \qquad (12.6.20)$$

где $(c_{fx})_{\text{нсж}}$ и $(c_{xf})_{\text{нсж}}$ определяются соответственно по формулам (12.4.60) и (12.4.62).

Рассматривая общий случай диссоциирующего газа, будем вычислять отношения ρ^*/ρ_δ и μ^*/μ_δ соответственно по (12.6.10) и (12.6.11). Тогда

$$\delta_{\text{сж}}/\delta_{\text{нсж}} = (T^*/T_\delta)^{(n+1)/5}\left(\mu_{\text{ср}\delta}/\mu^*_{\text{ср}}\right)^{1/5}; \qquad (12.6.21)$$

$$(c_{xf})_{\text{сж}}/(c_{xf})_{\text{нсж}} = (c_{fx})_{\text{сж}}/(c_{fx})_{\text{нсж}} = (\tau_{\text{ст}})_{\text{сж}}/(\tau_{\text{ст}})_{\text{нсж}} = (T^*/T_\delta)^{(n-4)/5}\left(\mu^*_{\text{ср}}/\mu_{\text{ср}\delta}\right)^{4/5}, \qquad (12.6.22)$$

Из этих формул видно, что качественная картина изменения толщины пограничного слоя и силы трения при турбулентном движении такая же, как и при ламинарном, а именно: с ростом определяющей температуры толщина слоя увеличивается, а сила трения снижается. Однако количественная оценка такого изменения показывает, что в соответствии с (12.6.21) для турбулентного пограничного слоя его толщина с повышением определяющей температуры растет значительно медленнее, чем для ламинарного слоя, а коэффициент трения падает более интенсивно [см (12.6.22)].

Влияние диссоциации будет сказываться, как и при ламинарном пограничном слое, в некотором уменьшении толщины пограничного слоя и росте напряжения трения. Толщина пограничного слоя и коэффициенты трения при наличии диссоциации определяются соответственно по (12.6.21) и (12.6.22) путем последовательных приближений. Вначале по заданной температуре стенки $T_{\text{ст}}$ и условиям невозмущенного потока $\mathbf{M}_\delta$, p_δ, ρ_δ, i_δ и другим находим определяющую энтальпию i^* по формуле (12.5.23), приняв в первом приближении $r_{\text{л}}^*=0{,}84$ или $r_{\text{т}}^*=0{,}89$. Далее при помощи графиков или таблиц термодинамических и кинетических функций воздуха по i^* и давлению p_δ отыскиваем T^*. По этой температуре и давлению p_δ из тех же таблиц или графиков можно найти $(c_p)^*$, μ^*, λ^* и уточнить по формуле (12.5.28) число $\mathbf{Pr}^*$, а по формуле (12.5.26) или (12.5.27) — коэффициент восстановления r^*. По этой величине r^* вычисляют во втором приближении энтальпию i^*, определяют температуру T^* и соответствующий молекулярный вес $\mu^*_{\text{ср}}$, значение которых подставляют в (12.6.21) и (12.6.22).

При отсутствии диссоциации отношение молекулярных весов $\mu^*_{\text{ср}}/\mu_{\text{ср}\delta}=1$, следовательно,

$$\delta_{\text{сж}}/\delta_{\text{нсж}} = (T^*/T_\delta)^{(n+1)/5}; \qquad (12.6.23)$$

$$(c_{xf})_{\text{сж}}/(c_{xf})_{\text{нсж}} = (c_{fx})_{\text{сж}}/(c_{fx})_{\text{нсж}} = (\tau_{\text{ст}})_{\text{сж}}/(\tau_{\text{ст}})_{\text{нсж}} = (T^*/T_\delta)^{(n-4)/5}. \qquad (12.6.24)$$

Соотношение (12.6.24) можно представить для случая постоянных теплоемкостей в приближенном виде:

$$(c_{xf})_{\text{сж}}/(c_{xf})_{\text{нсж}} = \left(1+0{,}12\mathbf{M}_\delta^2\right)^{-0{,}65}. \qquad (12.6.24')$$

Эту формулу нетрудно получить из (12.5.31), (12.5.33) и (12.6.24), полагая $n=0{,}75$; $k^*=1{,}4$; $r^*=0{,}85$. При этих же значениях находят аппроксимирующую зависимость, определяющую отношение толщин пограничного слоя (12.6.23), а также условных толщин:

$$\delta_{\text{сж}}/\delta_{\text{нсж}} = \delta^*_{\text{сж}}/\delta^*_{\text{нсж}} = \left(1 + 0,12\mathrm{M}_\delta^2\right)^{0,35}. \qquad (12.6.23')$$

Величины $\delta_{\text{нсж}}$ и $\delta^*_{\text{нсж}}$ находят соответственно из (12.4.58) и (12.4.63). Формулу (12.6.23′) нетрудно получить из (12.5.31), (12.5.33), (12.6.23), полагая $n=0,75$; $\overline{k^*}=1,4$; $r^*=0,85$.

Отношение условных толщин $\delta^{**}_{\text{сж}}/\delta^{**}_{\text{нсж}}$ определяется по аналогии с ламинарным пограничным слоем, так же как отношение соответствующих коэффициентов трения с использованием (12.6.24).

Трение на конусе при сверхзвуковых скоростях обтекания

Ламинарный пограничный слой. Сверхзвуковой поток около заостренного конуса обладает тем свойством, что вдоль образующей конической поверхности скорость $V_\delta = V_{\text{к}}$ постоянна и, следовательно, равен нулю продольный градиент давления. Таким же свойством обладает «невязкое» течение около плоской пластинки, вдоль которой параметры на внешней границе пограничного слоя постоянны. Это сходство обтекания позволяет использовать результаты расчета пограничного слоя на плоской пластинке для определения соответствующих параметров вязкого потока около конической поверхности.

Используем для этой цели интегральное соотношение (12.2.16). Учитывая, что параметры газа на внешней границе пограничного слоя всюду на конусе одинаковы ($V_\delta = V_{\text{к}} = \text{const}$; $p_\delta = p_{\text{к}} = \text{const}$ и т. д.) и, следовательно, продольный градиент давления равен нулю ($dp_\delta/dx = 0$), это соотношение представим в виде

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho r_0 V_x (V_x - V_{\text{к}})\,dy = -r_0 \tau_{\text{ст}}, \qquad (12.6.25)$$

где r_0 — расстояние от оси до точки на поверхности конуса с координатой x (рис. 12.6.1), а $\tau_{\text{ст}}$ — напряжение трения в этой точке.

Применим соотношение (12.6.25) для расчета ламинарного пограничного слоя. В произвольной точке какого-либо его сечения, расположенного от острия на расстоянии x, напряжение трения находим по формуле $\tau = \mu \partial V_x/\partial y$. В соответствии с этой формулой в уравнении (12.6.25) можно заменить $dy = (\mu/\tau)\,dV_x$. Разделив обе части этого уравнения на $\rho_{\text{к}} V_{\text{к}}^3 \mu_{\text{к}}$, где $\rho_{\text{к}}$ и $\mu_{\text{к}}$ —

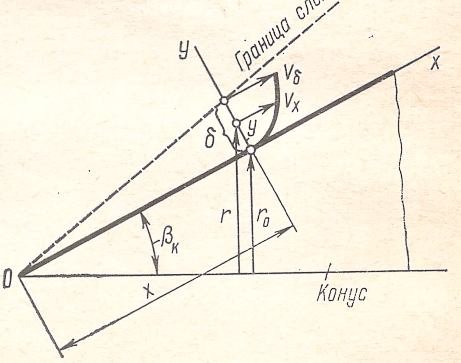


Рис. 12.6.1. Схема пограничного слоя на конусе

соответственно плотность ($\rho_к=\rho_\delta$) и динамический коэффициент вязкости ($\mu_к=\mu_\delta$) на внешней границе пограничного слоя конуса, получим интегральное соотношение

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^1 \frac{\rho V_x}{\rho_к V_к}\cdot\frac{\mu}{\mu_к}\cdot\frac{r_0}{\tau}\left(1-\frac{V_x}{V_к}\right)d\left(\frac{V_x}{V_к}\right)=\frac{r_0\tau_{ст}}{\rho_к V_к^3\mu_к}. \qquad (12.6.26)$$

Для рассматриваемого случая «безградиентного» пограничного слоя отношение скоростей $V_x/V_к=f_1(y/\delta)$ является функцией только относительной координаты y/δ и не зависит от x. Следовательно, в соответствии с формулами $\tau=\mu\,\partial V_x/\partial y$, $\tau_{ст}=\mu_к(dV_x/dy)_к$ и отношение касательных напряжений в слое будет зависеть от той же относительной координаты, т. е. $\tau/\tau_{ст}=f_2(y/\delta)$. Внесем функции f_1, f_2 в (12.6.26) и введем обозначение

$$J=\int\limits_0^1 \frac{\rho V_x}{\rho_к V_к}\cdot\frac{\mu}{\mu_к}\cdot\frac{1-f_1}{f_2}\,df_1. \qquad (12.6.27)$$

Принимая во внимание при этом, что в случае постоянной температуры на всей поверхности конуса отношение $\mu/\mu_к$ не зависит от координаты x и что от этой координаты не зависит также отношение плотностей $\rho/\rho_к$, являющееся функцией $V_x/V_к$, найдем зависимость

$$J\frac{r_0}{\tau_{ст}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{r_0}{\tau_{ст}}\right)=\frac{r_0^2}{\rho_к V_к^3\mu_к}. \qquad (12.6.28)$$

Заменяя в правой части формулы r_0 на $x\sin\beta_к$ и разделяя переменные, получим

$$\frac{J}{2}d\left(\frac{r_0}{\tau_{ст}}\right)^2=\frac{\sin^2\beta_к}{\rho_к V_к^3\mu_к}x^2dx. \qquad (12.6.29)$$

После интегрирования находим

$$\frac{J}{2}\cdot\frac{r_0^2}{\tau_{ст}^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3\sin^2\beta_к}{\rho_к V_к^3\mu_к}+\text{const}. \qquad (12.6.30)$$

Принимая в начальной точке (при $x=0$) отношение $r_0^2/\tau_{ст}^2=0$ и, следовательно, постоянную в правой части (12.6.30) равной нулю, а также производя обратную замену $x\sin\beta_к=r_0$ и обозначая напряжение трения на конусе $\tau_{ст}=\tau_{ст.к}$, получим

$$\tau_{ст.к}=\sqrt{3}\left(\frac{J}{2}\cdot\frac{\rho_к V_к^3\mu_к}{x}\right)^{1/2}. \qquad (12.6.31)$$

Аналогичное выражение можно получить для напряжения трения $\tau_{ст}=\tau_{ст.пл}$ на плоской пластинке. При этом будем исходить из предположения, что пластинка обтекается гипотетическим сверхзвуковым потоком с параметрами, которые будут такими, как на конусе. Тогда в результате интегрирования уравнения (12.6.28), в котором не будем учитывать r_0, получим зависимость

$$\tau_{\text{ст.пл}}=\left(\frac{J}{2}\cdot\frac{\rho_{\text{к}}V_{\text{к}}^3\mu_{\text{к}}}{x}\right)^{1/2} \qquad (12.6.32)$$

Из формул (12.6.31) и (12.6.32) вытекает важное соотношение

$$\tau_{\text{ст.к}}=\sqrt{3}\,\tau_{\text{ст.пл}}\approx 1{,}73\tau_{\text{ст.пл}}, \qquad (12.6.33)$$

в соответствии с которым напряжение трения на конусе в $\sqrt{3}$ раз больше, чем напряжение трения на пластинке, подсчитанное по параметрам на конусе. По формуле, аналогичной (12.6.33), определяются местные и средние значения коэффициентов трения:

$$c_{fx\text{к}}=\sqrt{3}\,c_{fx\text{пл}}; \qquad (12.6.34)$$

$$c_{xf\text{к}}=\sqrt{3}\,c_{xf\text{пл}}. \qquad (12.6.35)$$

Эти значения отнесены к скоростному напору возмущенного потока $q_{\text{к}}=\rho_{\text{к}}V_{\text{к}}^2/2$. Чтобы рассчитать коэффициенты трения по скоростному напору невозмущенного течения, надо воспользоваться зависимостями

$$c_{fx\infty\text{к}}=c_{fx\text{к}}(q_{\text{к}}/q_\infty)=\sqrt{3}\,c_{fx\text{пл}}(\rho_{\text{к}}V_{\text{к}}^2/\rho_\infty V_\infty^2); \qquad (12.6.36)$$

$$c_{xf\infty\text{к}}=c_{xf\text{к}}(q_{\text{к}}/q_\infty)=\sqrt{3}\,c_{xf\text{пл}}(\rho_{\text{к}}V_{\text{к}}^2/\rho_\infty V_\infty^2). \qquad (12.6.37)$$

Сила сопротивления трения рассчитывается по среднему коэффициенту трения $c_{xf\infty\text{к}}$ и боковой поверхности $S_{\text{к}}$ конуса:

$$X_f=c_{xf\infty\text{к}}q_{\text{к}}S_{\text{к}}=\sqrt{3}\,c_{xf\text{пл}}(\rho_{\text{к}}V_{\text{к}}^2/2)\,S_{\text{к}}. \qquad (12.6.38)$$

Напряжение трения $\tau_{\text{ст.пл}}=(\tau_{\text{ст}})_{\text{сж}}$ и коэффициенты трения $c_{xf\,\text{пл}}=(c_{xf})_{\text{сж}}$, $c_{fx\,\text{пл}}=(c_{fx})_{\text{сж}}$ можно найти из соотношения (12.6.13) по определяющим параметрам в общем случае для диссоциирующего воздуха.

Можно установить приближенную зависимость также и между толщинами пограничного слоя на конусе и пластинке. Для этого воспользуемся методом Польгаузена для расчета распределения скорости по сечению пограничного слоя в несжимаемой среде. По этому методу скорость вычисляется по уравнению (12.3.15). Заменяя в нем η на y, η_δ на δ и V_δ на $V_{\text{к}}$, получим

$$V_x=V_{\text{к}}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{y}{\delta}-\frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{\delta^2}\right). \qquad (12.6.39)$$

По формуле Ньютона, напряжение трения на поверхности конуса

$$\tau_{\text{ст,к}}=\mu_{\text{к}}V_{\text{к}}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{y}{\delta}-\frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{\delta^2}\right)\right]_{y=0}=\mu_{\text{к}}V_{\text{к}}\frac{3}{2\delta_{\text{к}}}, \qquad (12.6.40)$$

где $\delta_{\text{к}}$ — толщина пограничного слоя на конусе.

Аналогичное выражение напишем для пластинки:

$$\tau_{\text{ст.пл}}=\mu_{\text{к}}V_{\text{к}}(3/2\delta_{\text{пл}}), \qquad (12.6.41)$$

где $\delta_{\text{пл}}$ — толщина пограничного слоя на пластинке.

Из соотношений (12.6.40) и (12.6.41) следует, что

$$\delta_{\text{пл}}/\delta_{\text{к}}=\tau_{\text{ст.к}}/\tau_{\text{ст.пл}}, \qquad (12.6.42)$$

откуда согласно (12.6.33)

$$\delta_{\text{к}}=(\tau_{\text{ст.пл}}/\tau_{\text{ст.к}})\,\delta_{\text{пл}}=\frac{\delta_{\text{пл}}}{\sqrt{3}}=0{,}578\delta_{\text{пл}}. \qquad (12.6.43)$$

Таким образом, в соответствии с формулой (12.6.43) толщина ламинарного пограничного слоя на конусе в $\sqrt{3}$ раз меньше, чем на пластинке. Толщину $\delta_{\text{пл}}=\delta_{\text{сж}}$ для пластинки можно рассчитать в общем случае диссоциирующего газа по определяющим параметрам на конической поверхности с применением формулы (12.6.12).

Турбулентный пограничный слой. Воспользовавшись тем же интегральным соотношением (12.2.16), получим в приближенной форме аналогичные зависимости для турбулентного пограничного слоя. Перейдя в (12.6.25) к определяющим параметрам и подставив вместо $\tau_{\text{ст}}$ выражение (12.4.55), в котором обозначим $V_\delta=V_{\text{к}}$ и $\delta=\delta_{\text{к}}$, получим

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^\delta \rho^* r_0 V_x(V_{\text{к}}-V_x)\,dy=0{,}0233\rho^* V_{\text{к}}^2\left(\frac{\mu^*}{V_{\text{к}}\rho^*}\right)^{1/4}\frac{r_0}{(\delta^*)^{1/4}}\,.$$

Принимая во внимание, что температура поверхности всюду одинакова и, следовательно, определяющие параметры постоянны (плотность ρ^* в левой и правой частях сокращается), можно после простых преобразований получить уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[r_0\delta_{\text{к}}\int\limits_0^1 \frac{V_x}{V_{\text{к}}}\left(1-\frac{V_x}{V_{\text{к}}}\right)d\left(\frac{y}{\delta_{\text{к}}}\right)\right]=0{,}0233\left(\frac{\mu^*}{V_{\text{к}}\rho^*}\right)^{1/4}\frac{r_0^{5/4}}{(r_0\delta_{\text{к}})^{1/4}}\,. \qquad (12.6.44)$$

Если исходить из закона корня седьмой степени, то безразмерная скорость $V_x/V_{\text{к}}=(y/\delta_{\text{к}})^{1/7}$, поэтому

$$J_1=\int\limits_0^1 \frac{V_x}{V_{\text{к}}}\left(1-\frac{V_x}{V_{\text{к}}}\right)d\left(\frac{y}{\delta_{\text{к}}}\right)=\text{const}.$$

В соответствии с этим (12.6.44) перепишем в форме

$$J_1(r_0\delta_{\text{к}})^{1/4}d(r_0\delta_{\text{к}})=0{,}0233(\mu^*/V_{\text{к}}\rho^*)^{1/4}r_0^{5/4}dx. \qquad (12.6.45)$$

Заменяя в правой части $r_0 = x \sin \beta_к$ и интегрируя при условии, что для $x=0$ величина $r_0\delta_к = 0$, найдем

$$(4J_1/5)(r_0\delta_к)^{5/4} = 0{,}0233(\mu^*/V_к\rho^*)^{1/4} \sin^{5/4}\beta_к (4x^{9/4}/9).$$

Произведя здесь обратную замену $(x \sin \beta_к)^{5/4} = r_0^{5/4}$ и соответствующее сокращение на эту величину в правой и левой частях, получим

$$\delta_к^{5/4} = (4/9) J_2 x,$$

откуда

$$\delta_к = (4/9)^{4/5} (J_2 x)^{4/5}, \qquad (12.6.46)$$

где

$$J_2 = (0{,}0292/J_1)(\mu^*/V_к\rho^*)^{1/4}. \qquad (12.6.47)$$

Заменяя в (12.6.45) $\delta_к$ на $\delta_{пл}$ и опуская r_0, получим аналогичное выражение для толщины пограничного слоя на плоской пластинке. После интегрирования найдем

$$(4J_1/5)(\delta_{пл})^{5/4} = 0{,}0233(\mu^*/V_к\rho^*)^{1/4} x,$$

откуда

$$\delta_{пл} = (J_2 x)^{4/5}. \qquad (12.6.48)$$

Из выражений (12.6.46) и (12.6.48) найдем связь между толщинами пограничного слоя на конусе и пластинке:

$$\delta_к = (4/9)^{4/5} \delta_{пл} = 0{,}523\delta_{пл}. \qquad (12.6.49)$$

Зависимость для напряжения трения найдем из соотношения (12.4.55), введя определяющие параметры и записав это соотношение отдельно для конуса и пластинки:

$$\tau_{ст.к} = 0{,}0233\rho^* V_к^2 (\nu^*/V_к)^{1/4} (1/\delta_к^{1/4});$$

$$\tau_{ст.пл} = 0{,}0233\rho^* V_к^2 (\nu^*/V_к)^{1/4} (1/\delta_{пл}^{1/4}).$$

Принимая определяющие параметры одинаковыми на конусе и пластинке, найдем из двух последних формул отношение

$$\tau_{ст.к}/\tau_{ст.пл} = (\delta_{пл}/\delta_к)^{1/4}. \qquad (12.6.50)$$

Внося сюда значение $\delta_к$ из (12.6.49), получим

$$\tau_{ст.к} = (9/4)^{1/5} \tau_{ст.пл} = 1{,}17\tau_{ст.пл}. \qquad (12.6.51)$$

Сопоставляя формулы (12.6.33) и (12.6.51), можно сделать вывод, что для турбулентного пограничного слоя характерно меньшее отличие напряжения трения на конусе от соответствующего значения на пластинке, чем для ламинарного пограничного слоя. Это объясняется более сильным влиянием перемешивания потока на силу трения в турбулентном пограничном слое по сравнению с воздействием формы поверхности. Что касается толщин [см. (12.6.43) и (12.6.49)], то их значения на конусе для турбулентного и ламинарного пограничного слоев отличаются лишь примерно на 10%. Такое небольшое различие свидетельствует о более сильном влиянии на толщину слоя формы обтекаемых поверхностей, чем перемешивания.

По известному напряжению трения можно определить местный и средний коэффициенты трения:

$$c_{fx\,\text{к}} = 1,17 c_{fx\,\text{пл}}; \tag{12.6.52}$$

$$c_{xf\,\text{к}} = 1,17 c_{xf\,\text{пл}}. \tag{12.6.53}$$

Эти коэффициенты рассчитаны по скоростному напору $q_\text{к} = \rho_\text{к} V_\text{к}^2/2$. Чтобы пересчитать их на скоростной напор невозмущенного потока, необходимо применить формулы, аналогичные (12.6.36) и (12.6.37).

Сила сопротивления трения при турбулентном пограничном слое определяется по выражению, сходному с (12.6.38):

$$X_f = 1,17 c_{xf\,\text{пл}} (\rho_\text{к} V_\text{к}^2/2) S_\text{к}. \tag{12.6.54}$$

Напряжение трения $\tau_{\text{ст.пл}} = (\tau_\text{ст})_\text{сж}$ и коэффициенты трения $c_{xf\,\text{пл}} = (c_{xf})_\text{сж}$, $c_{fx\,\text{пл}} = (c_{fx})_\text{сж}$ для плоской пластинки можно найти из соотношения (12.6.22), а толщину пограничного слоя $\delta_\text{пл} = \delta_\text{сж}$ — из (12.6.17) по определяющим параметрам с учетом диссоциации.

§ 12.7. ВЛИЯНИЕ ПРОДОЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ НА ТРЕНИЕ

В предыдущем параграфе был рассмотрен пограничный слой на плоской пластинке и конической поверхности, обтекаемых сверхзвуковым потоком. Для этого пограничного слоя характерно то, что давление в нем во всех сечениях одинаковое ($p_\delta = \text{const}$) и, следовательно, продольный градиент давления $dp_\delta/dx = 0$. Однако при обтекании криволинейной поверхности (например, профиля крыла или тела вращения с криволинейной образующей) этот градиент отличен от нуля, так как давление на внешней границе пограничного слоя будет величиной переменной, зависящей от координаты x. Это влечет за собой, как видно из интегрального соотношения (12.2.16), где $dp_\delta/dx \neq 0$, изменение напряжения трения и, следовательно, распределения скорости и толщины пограничного слоя по сравнению со случаем обтекания плоской пластинки или конуса.

Если рассмотреть профиль крыла с криволинейным контуром, обтекаемый дозвуковым потоком (рис. 12.7.1, *а*), то на переднем участке (от точки O полного торможения до некоторой точки B) градиент давления будет величиной отрицательной ($dp_\delta/dx < 0$), а на участке от точки B до точки C на задней кромке — положительной ($dp_\delta/dx > 0$). Такой характер изменения градиента давления обусловлен особенностями обтекания профиля, при котором на переднем участке скорость в направлении от точки O к точке B

возрастает и, следовательно, давление на основании уравнения Бернулли снижается; на участке, примыкающем к задней кромке, скорость, наоборот, уменьшается, а давление увеличивается.

В случае сверхзвукового обтекания (рис. 12.7.1, *б*) скорость V_δ в направлении к задней кромке профиля непрерывно возрастает, следовательно, давление p_δ и производная dp_δ/dx уменьшаются, т. е. на всей поверхности течение в пограничном слое будет испытывать влияние отрицательного градиента давления.

Для качественной оценки изменения касательных напряжений при указанном распределении продольного градиента давления воспользуемся интегральным соотношением (12.2.16). Если производная $dp_\delta/dx<0$, то первый член в левой части будет положительным, а в случае $dp_\delta/dx>0$ — отрицательным. Это означает, что при прочих равных условиях касательные напряжения в зоне отрицательного градиента давления, где поток ускоряется, будут больше, чем при равномерном движении. Наоборот, на том участке поверхности, где давление повышается и течение замедляется, напряжение трения будет уменьшаться. На этом участке можно указать точку поверхности, в которой напряжение трения оказывается равным нулю, а за этой точкой его величина становится отрицательной.

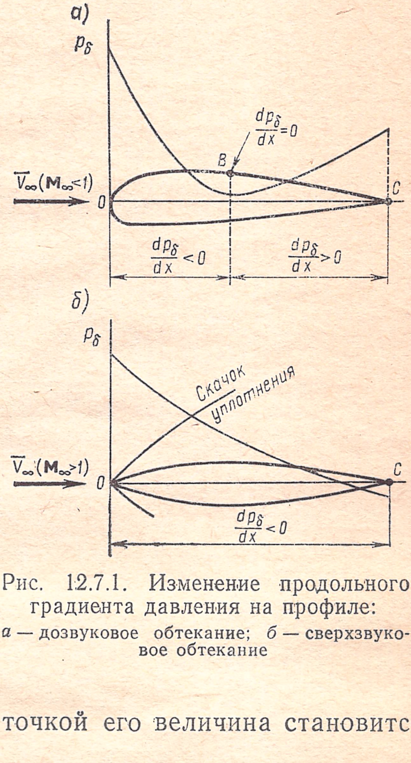


Рис. 12.7.1. Изменение продольного градиента давления на профиле:
а — дозвуковое обтекание; *б* — сверхзвуковое обтекание

Такой характер изменения напряжения трения тесно связан с распределением скорости V_x по сечению пограничного слоя. Если рассматривать ламинарный пограничный слой, для которого $\tau_{ст}=\mu_{ст}(\partial V_x/\partial y)_{ст}$, то в зоне с отрицательным градиентом давления, где $\tau_{ст}>0$, производная $(\partial V_x/\partial y)_{ст}>0$. Соответствующее распределение скоростей выглядит так, как показано на рис. 12.7.2, *а*, где скорость V_x вблизи стенки совпадает по направлению со скоростью свободного потока V_δ.

В точке профиля, где $\tau_{ст}=0$ и, следовательно, $(\partial V_x/\partial y)_{ст}=0$, касательная к кривой распределения скоростей в пограничном слое (рис. 12.7.2, *б*) совпадает с нормалью к стенке. За этой точкой напряжение $\tau_{ст}$ отрицательное и производная $(\partial V_x/\partial y)_{ст}<0$. Соответствующая картина течения в пограничном слое, как показано на рис. 12.7.2, *в,* характеризуется тем, что скорости частиц, находящихся вблизи стенки, направлены в сторону, противоположную направлению свободного потока.

Определение напряжения трения в этой зоне лишено физического смысла, так как его влияние на движение жидкости ничтожно мало́ по сравнению с нормальным напряжением (давлением). Практически это напряжение можно принять равным нулю. Что же касается участков криволинейной поверхности с безотрывным обтеканием, то исследование напряжения трения на этих участках можно вести с использованием интегрального соотношения пограничного слоя вместе с зависимостями, устанавливающими распределение скоростей по сечению слоя и закон изменения касательных напряжений.

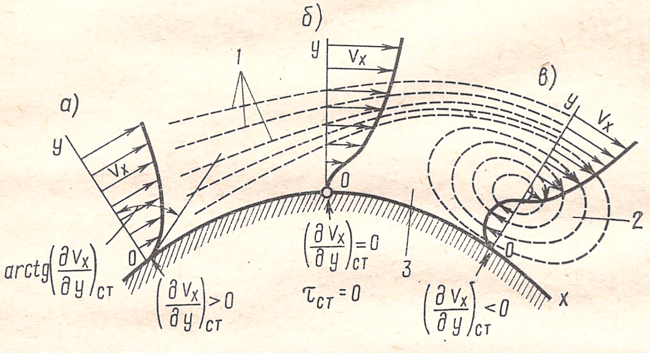

а)
б)
в)
y
y
y
V_x
V_x
V_x
1
2
3
0
0
0
x
$\operatorname{arctg}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{ст}$
$\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{ст}>0$
$\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{ст}=0$
$\tau_{ст}=0$
$\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{ст}<0$

Рис. 12.7.2. Схема изменения профиля скорости по сечению пограничного слоя и образования вихря в зоне его отрыва:
1 — линии тока; *2* — вихрь; *3* — зона отрыва

Рассмотрим метод расчета ламинарного пограничного слоя на криволинейной поверхности профиля, обтекаемого сжимаемым газом, разработанный акад. А. А. Дородницыным [3].

По этому методу, местный коэффициент трения

$$c_{fx}=\frac{2\tau_{ст}}{\rho_\delta V_\delta^2}=\frac{2}{V_\delta}\sqrt{\frac{\mu_\delta V'_\delta}{\rho_\delta}\left(1-\overline{V}_\delta^2\right)^{-\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{k-1}\right)}}\left(2+\frac{\lambda}{6}\right)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \tag{12.7.1}$$

а толщина пограничного слоя

$$\delta=\left(1-\overline{V}_\delta^2\right)^{-k/(k-1)}\eta_\delta\left[1-\overline{V}_\delta^2\Phi(\lambda)\right], \tag{12.7.2}$$

где функция

$$\Phi(\lambda)=367/630+(71/7560)\,\lambda+(1/9072)\,\lambda^2, \tag{12.7.3}$$

приведенная толщина слоя

$$\eta_\delta=\sqrt{\lambda\nu_0 V'_\delta/\left(1-\overline{V}_\delta^2\right)}, \tag{12.7.4}$$

а производная $V'_\delta=dV_\delta/d\xi$.

Существенным элементом расчета является определение параметра

$$\lambda=\eta_\delta^2 V'_\delta\left[\nu_0\left(1-\overline{V}_\delta^2\right)\right]^{-1}, \tag{12.7.5}$$

учитывающего влияние на вязкое обтекание криволинейности поверхности, которое сказывается в случае продольного градиента скорости ($V'_\delta \neq 0$). Этот параметр находится в результате решения дифференциального уравнения

$$d\lambda/d\bar{\xi} = M_1(\lambda)\,N_1(\bar{\xi}) + M_2(\lambda)\,N_2(\bar{\xi}), \tag{12.7.6}$$

в котором

$$M_1(\lambda) = \frac{\lambda\,(213 - 1{,}92\lambda - 0{,}2\lambda^2)}{213 - 5{,}76\lambda - \lambda^2};\quad M_2(\lambda) = \frac{7258 - 1336\lambda + 37{,}92\lambda^2 + 0{,}8\lambda^3}{213 - 5{,}76\lambda - \lambda^2}; \tag{12.7.7}$$

$$N_1(\bar{\xi}) = \frac{4\bar{V}_\delta \bar{V}'_\delta}{1 - \bar{V}^2_\delta} + \frac{\bar{V}''_\delta}{\bar{V}'_\delta};\quad N_2(\bar{\xi}) = \frac{\bar{V}_\delta \bar{V}'_\delta}{1 - \bar{V}^2_\delta} + \frac{\bar{V}'_\delta}{\bar{V}_\delta}. \tag{12.7.8}$$

В этих выражениях введены обозначения для относительной координаты $\bar{\xi} = \xi/L$, а также для первой и второй производных скорости в виде $\bar{V}'_\delta = d\bar{V}_\delta/d\bar{\xi}$, $\bar{V}''_\delta = d^2\bar{V}_\delta/d\bar{\xi}^2$.

Пограничный слой на криволинейной стенке рассчитывают следующим образом. Вначале находят теоретическое или экспериментальное распределение скоростей на внешней границе пограничного слоя $V_\delta(x)$, затем вычисляют производные V'_δ, V''_δ и соответствующие функции N_1, N_2 (12.7.8). Далее в результате численного интегрирования уравнения (12.7.6), которое можно провести на электронно-цифровой вычислительной машине, определяют величину λ. Эта величина должна удовлетворять граничному условию, согласно которому в точке разветвления потока, совпадающей с точкой полного торможения, т. е. при $\xi = 0\,(x = 0)$, функция λ равна некоторому конечному значению λ_0. По данным акад. А. А. Дородницына. $\lambda_0 = 7{,}052$.

Рассмотренный порядок расчета применим в одинаковой мере как к дозвуковому, так и сверхзвуковому обтеканию профилей с затупленной передней кромкой. В последнем случае необходимо в формулах (12.3.4) и (12.3.6) вместо давления и плотности торможения p_0, ρ_0 принять их соответствующие значения p_0', ρ_0', рассчитанные для условий течения за прямым участком отсоединенной от профиля криволинейной ударной волны.

При сверхзвуковом обтекании заостренного профиля значения p_0' и ρ_0' должны рассчитываться для числа $\mathbf{M}_\infty > 1$ и угла θ_c наклона скачка уплотнения у передней кромки. Начальное значение $\lambda = \lambda_0$ (при $\xi = 0$) определяется из условия, что на заостренной кромке профиля, как и на пластинке, толщина пограничного слоя равна нулю. Согласно этому значению, λ_0 также равно нулю.

Соответствующие значения для параметров пограничного слоя в несжимаемой жидкости можно найти, если в полученных зависимостях положить $1 - \bar{V}^2_\delta = 1 - V^2_\delta/V^2_{\max} = 1$ [это следует из формулы $1 - \bar{V}^2_\delta = \{1 + [(k-1)/2] \times \times \mathbf{M}^2_\delta\}^{-1}$, в которой для несжимаемой среды следует принять число Маха $\mathbf{M}_\delta = 0$]. Для коэффициента трения из (12.7.1) находим зависимость

$$c_{fx} = \frac{2\tau_{\text{ст}}}{\rho_\delta V^2_\delta} = \frac{2}{V_\delta}\sqrt{\frac{\mu_\delta V'_\delta}{\rho_\delta}}\left(2 + \frac{\lambda}{6}\right)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \tag{12.7.9}$$

Толщина пограничного слоя согласно формуле (12.7.2), в которой $\bar{V}_\delta = 0$, будет равна значению $\delta = \eta_\delta$. Это значение можно определить из (12.7.5) в виде

$$\delta = \sqrt{\lambda\mu_\delta/(\rho_\delta V'_\delta)}. \tag{12.7.10}$$

В формулах (12.7.9), (12.7.10) величину λ определяют в результате решения дифференциального уравнения (12.7.6), в котором вместо (12.7.8) следует принять

$$N_1(\bar{\xi}) = V''_{\delta}/V_{\delta},\ N_2(\bar{\xi}) = V'_{\delta}/V_{\delta}. \qquad (12.7.11)$$

Для профилей с малой кривизной контура применим метод определяющих параметров, при помощи которого характеристики несжимаемого пограничного слоя пересчитываются на их соответствующие значения с учетом сжимаемости и высоких температур.

Из приведенных соотношений для пограничного слоя на криволинейной поверхности можно получить как частный случай соответствующие зависимости для плоской пластинки, обтекаемой как сжимаемым, так и несжимаемым потоком, если принять в этих соотношениях продольный градиент скорости равным нулю.

Влияние отрыва пограничного слоя на аэродинамические характеристики. Отрыв пограничного слоя — одно из характерных явлений, сопровождающих движение жидкости или газа. При отрыве происходит перераспределение давления на поверхности летательного аппарата, вследствие чего изменяются аэродинамическое сопротивление и подъемная сила. В диапазоне трансзвуковых скоростей отрыв усложняет управляемость, так как увеличиваются нестационарные аэродинамические нагрузки. При высоких сверхзвуковых скоростях он приводит к большим тепловым потокам на отдельных участках обтекаемой поверхности.

Вместе с тем отрыв потока может оказаться полезным при использовании отдельных видов летательных аппаратов или их элементов. Например, тонкий профиль, пригодный для полета с большой скоростью, можно приспособить для малых скоростей, вызвав искусственным путем отрыв в каком-то месте на его верхней стороне и обеспечив последующее присоединение. В результате достигается эффект утолщенного профиля, который более приемлем для полета с малой скоростью.

Благодаря отрыву потока могут быть улучшены различные аэродинамические характеристики спускаемых на Землю космических аппаратов. Отдельные части таких аппаратов работают в условиях высоких температур. Используя отрыв, можно в отдельных случаях добиться уменьшения нагрева, обеспечив допустимый режим теплопередачи.

Отрыв потока — предмет интенсивных исследований. Классическая концепция такого отрыва связана со свойством вязкости, поэтому ее рассматривают часто как проблему отрыва пограничного слоя.

Необходимое условие отрыва потока — положительный градиент давления. Если такой градиент отсутствует, то отрыва не происходит. Например, поток не отрывается от плоской пластинки, для которой характерны постоянство давления во всех сечениях пограничного слоя и, следовательно, равенство нулю продольного градиента давления. Однако при обтекании гладкой криволинейной поверхности (например, профиля крыла или тела вращения с криволинейной образующей) этот градиент отличен от нуля. Это влечет за собой изменение местного напряжения трения, толщины пограничного слоя и распределения скорости по его сечению в сравнении со случаем обтекания плоской пластинки.

При этом, как уже отмечалось (см. рис. 12.7.2), в хвостовой части тела скорости частиц, находящихся вблизи стенки, будут направлены в сторону, противоположную направлению свободного потока. Такое явление объясняется воздействием вязкости, приводящим к уменьшению кинетической энергии частиц жидкости. В хвостовой части профиля запас этой энергии может оказаться недостаточным для преодоления положительного градиента давления. По этой причине жидкость вблизи поверхности сначала претерпевает полное торможение, а затем изменяет направление движения. В результате образования этого противотока происходит оттеснение линий тока и, как следствие, отрыв пограничного слоя от поверхности. Точка, где $\tau_{ст}=0$, называется точкой отрыва.

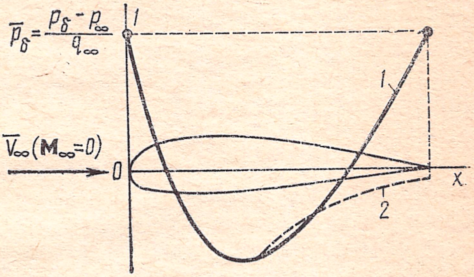


Рис. 12.7.3. Распределение давления по поверхности профиля в несжимаемом потоке ($M_\infty=0$):

1 — при безотрывном обтекании; 2 — при обтекании с отрывом потока

Отрыв пограничного слоя от поверхности обусловливает существенное изменение характера обтекания и оказывает заметное влияние на аэродинамические характеристики летательных аппаратов.

Пограничный слой за точкой отрыва характеризуется наличием двух противоположных потоков: внешнего, имеющего направление свободного течения, и внутреннего, движущегося в обратную сторону. Пограничный слой как бы скручивается, образуя вихрь (см. рис. 12.7.2). Возникновение и унос вихрей сопровождаются накоплением заторможенной жидкости и образованием застойной зоны.

Благодаря влиянию вихрей скорость частиц будет больше в кормовой части обтекаемого тела, находящейся в этой зоне, чем при безотрывном обтекании, а давление меньше (рис. 12.7.3). Поэтому появляется дополнительное сопротивление от перераспределения давления, называемое сопротивлением подсасывания или вихревым сопротивлением. Увеличение сопротивления можно объяснить тем, что на образование вихрей и отрыв потока затрачивается дополнительная часть кинетической энергии потока, обтекающего тело.

Положение точки отрыва, а следовательно, и размер области, определяющей величину дополнительного сопротивления, зависят от величины градиента давления. Для обтекаемых поверхностей в виде профилей или удлиненных тел вращения с малой кривизной и при небольших углах атаки положительный градиент давления невелик, отрыв практически не происходит и вихревое сопротивление пренебрежимо мало́. С увеличением угла атаки и кривизны поверхности возрастает градиент давления dp_δ/dx и появляется отрыв. При этом чем больше производная dp_δ/dx, тем ближе точка отрыва к вершине обтекаемой поверхности.

Все эти явления наблюдаются как при ламинарном, так и при турбулентном пограничных слоях. Однако в случае турбулентного течения можно отметить некоторые отличительные особенности отрывного обтекания. Участок такого турбулентного течения возникает, как известно, в том случае, когда число Рейнольдса становится больше критического значения. По сечению турбулентного пограничного слоя скорости распределены более равномерно, поэтому частицы вблизи поверхности имеют бо́льшую скорость и, следовательно, повышенную кинетическую энергию. Поэтому они сильнее противостоят тормозящему действию нарастающего вдоль потока давления, способствуя тем самым менее интенсивному снижению касательного напряжения, и продвигаются вдоль поверхности до точки отрыва, где $\tau_{\text{ст}}=0$, дальше, чем в ламинарном слое. Таким образом, переход через критическое число Рейнольдса сопровождается сдвигом вниз по потоку точки отрыва. В результате ширина и интенсивность вихревой области за телом уменьшаются и сопротивление от давления (вихревое сопротивление) резко снижается. При этом, несмотря на некоторое увеличение сопротивления, обусловленное турбулентным трением, полное сопротивление все же будет меньше, чем в случае ламинарного пограничного слоя. Это явление уменьшения лобового сопротивления неудобообтекаемых тел (так условно называют тела, обтекание которых сопровождается интенсивным отрывом, а их сопротивление обусловлено в основном силами от давления и в меньшей степени трением) при возникновении турбулентного пограничного слоя называют кризисом сопротивления. При дальнейшем (закризисном) увеличении чисел Рейнольдса сопротивление несколько возрастает, так как место отрыва перемещается вверх по потоку.

Необходимо заметить, что указанный эффект «кризиса сопротивления» имеет место лишь в случае неудобообтекаемых тел, таких, в частности, как цилиндр, сфера. Для удобообтекаемых поверхностей, например профилей крыльев, фюзеляжей самолетов, сужение зоны отрыва в кормовой части тела и некоторое уменьшение сопротивления давления перекрывается увеличением сопротивления трения вследствие образования турбулентного пограничного слоя в этой части тела.

Рассмотрим, как влияет сжимаемость на положение точки отрыва и сопротивление. Ранее было установлено, что для плоской пластинки с возрастанием числа Маха толщина пограничного слоя увеличивается и напряжение трения уменьшается. Эти положения остаются в основном в силе и для криволинейных поверхностей [см. (12.7.1) и (12.7.2)]. Отсюда следует, что с ростом M_∞ точка отрыва смещается против потока, т. е. к носку обтекаемого тела. В результате зона отрыва расширяется и сопротивление давления, а с ним и полное сопротивление возрастают.

Из сказанного следует, что расчет обтекания и определение аэродинамического сопротивления связаны с нахождением точки отрыва пограничного слоя с обтекаемой поверхности. Приближенное значение координаты точки отрыва ламинарного пограничного слоя в дозвуковом потоке можно определить по методу акад. А. А. Дородницына, изложенному в настоящем параграфе. Для этого следует воспользоваться уравнением (12.7.1). Приняв в нем $c_{fx}=0$, найдем значение параметра $\lambda=-12$, по которому из решения уравнения (12.7.5) находят для заданной формы тела положение точки отрыва.

Указанные методы основываются на решении дифференциальных уравнений пограничного слоя, на нижней границе которого параметры жидкости определяются из уравнений невязкого безотрывного обтекания заданной поверхности, т. е. эти методы не учитывают влияния оторвавшегося пограничного слоя на свободный поток. Полученные по этим методам данные об отрыве будут удовлетворительными для достаточно удобообтекаемых тел, у которых оторвавшийся вместе с пограничным слоем свободный поток незначительно отходит от поверхности и поэтому мало отличается от безотрывного невязкого течения. Однако при достаточно интенсивном отрыве, имеющем место у неудобообтекаемых тел, когда внешний поток значительно отходит от стенки, это отличие весьма существенно, и такой поток будет оказывать большое влияние на пограничный слой и место его отрыва.

Теоретически и экспериментально исследовался отрыв пограничного слоя, вызванный положительным градиентом давления, который возникает в результате обтекания свободным потоком кормовой части криволинейной поверхности и не связан с наличием каких-либо выступов или шероховатостей на этой поверхности. Такое явление отрыва может иметь место как в сжимаемом, так и в несжимаемом потоках. При этом в сжимаемом потоке могут протекать специфические процессы, обусловливающие тот же эффект отрыва, который был рассмотрен. Как известно из предыдущего, в сжимаемой среде при числах M_∞, бо́льших критических, в возмущенном потоке возникают местные скачки уплотнения. Повышенное давление за такими скачками распространяется не только вниз, но и вверх по течению через дозвуковую часть пограничного слоя, примыкающую к стенке. Кроме того, утолщение пограничного слоя перед скачком уплотнения вызывает оттеснение линий тока от поверхности тела в сверхзвуковой части пограничного слоя и во внешнем потоке. Это приводит к тому, что сверхзвуковой поток при обтекании этого участка испытывает дополнительный поворот, что влечет за собой возникновение косого скачка уплотнения (λ-образный скачок). В результате воздействия скачка уплотнения на пограничный слой происходит нарастание давления, которое приводит к отрыву пограничного слоя. Возрастание сопротивления при сверхкритических числах Маха обусловлено не только потерями в местных скачках уплотнения, но и отрывом пограничного слоя, вызванного скачками. Эффект отрыва усиливается при сверхзвуковых скоростях обтекания, если пограничный слой испытывает воздействие падающего скачка уплотнения. Такой скачок вызывает значительное повышение давления в пограничном слое, в результате чего он утолщается, а затем отрывается.

Отрыв потока с образованием скачка уплотнения может произойти в том случае, если пластинка имеет изломы. На рис. 12.7.4. показаны схемы такого отрыва, вызванного уступом и наклонной плоскостью. Скачок уплотнения обусловлен отклонением потока вблизи места отрыва на некоторый угол вследствие возникновения застойной зоны перед уступом или наклонной плоскостью. Появляющийся на стенке дополнительный градиент давления способствует смещению вперед точки отрыва.

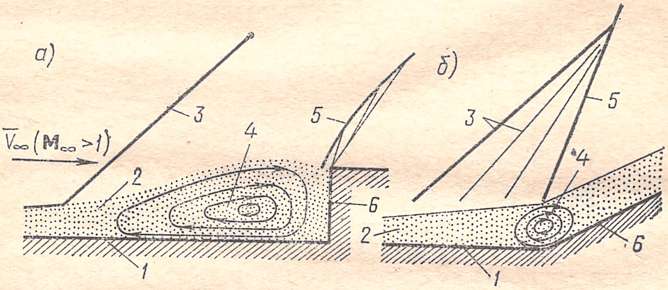


Рис. 12.7.4. Модели отрывных течений:

а — отрыв, вызванный уступом: *1* — пластина; *2* — пограничный слой; *3* — основной скачок уплотнения; *4* — зона отрыва и возвратного течения; *5* — скачок уплотнения; *6* — уступ; *б* — отрыв, вызванный клином: *1* — пластина; *2* — пограничный слой; *3* — волны сжатия; *4* — зона отрыва и возвратного течения; *5* — скачок уплотнения; *6* — наклонная плоскость

Как показывают исследования, все эти явления наиболее интенсивно протекают в случае ламинарного обтекания. Турбулизация ослабляет взаимодействие между скачками уплотнения и пограничным слоем, так как утолщение пограничного слоя, как и вообще роль градиента давления в его формировании, гораздо меньше заметны при турбулентном течении, чем при ламинарном. Благодаря меньшему оттеснению линий тока в турбулентном потоке перед прямым скачком, как показывают эксперименты, не возникает дополнительный косой скачок уплотнения.

Управление пограничным слоем (УПС). К числу распространенных методов управления обтеканием относят отсос и сдув пограничного слоя. В результате этого предотвращается срыв потока, который может возникнуть при возрастании угла атаки несущей или стабилизирующей поверхности до значений, бо́льших критического. Как следствие, увеличивается подъемная сила. При этом становятся больше критические углы атаки и максимальные значения коэффициентов подъемной силы.

Физический эффект от отсоса и сдува одинаков и состоит в увеличении кинетической энергии частиц в пограничном слое, благодаря чему уменьшается их торможение. При отсосе этот эффект достигается в основном за счет повышения скорости, а при сдуве — за счет увеличения массы воздуха, протекаемой через пограничный слой.

Отсос производится вакуум-насосами, а сдув — нагнетательными насосами через профилированную щель, систему отверстий или проницаемые поверхности (соответственно дискретный и распределенный отсос или сдув). Расположение отверстий или щелей при применении отсоса совпадает с местом предполагаемого отрыва, а при сдуве щели или отверстия находятся несколько выше по потоку.

Отсос и сдув пограничного слоя можно использовать для уменьшения аэродинамического сопротивления. В этих целях щели или отверстия должны быть расположены в хвостовой части обтекаемого тела, где достигается предотвращение отрыва, способствующее снижению подсасывающего эффекта за кормой и, как следствие, уменьшению сопротивления от давления.

Экспериментальные исследования показали, что для улучшения аэродинамических характеристик крыла (повышения $c_{y\,\max}$) наиболее целесообразен сдув пограничного слоя. Сдув производится обычно у передней кромки крыла, а также вблизи расположенных на нем различных органов управления и средств механизации (элеронов, элевонов, щитков и т. д.).

Отсос — важное средство стабилизации ламинарного пограничного слоя (ламинаризации), обеспечивающей снижение сопротивления трения, а также теплопередачи. Физически эффект стабилизации объясняется тем, что при помощи отсоса устраняются очаги пульсационного движения, характерного для турбулентного пограничного слоя, и тем самым обеспечивается бóльшая устойчивость ламинарного пограничного слоя.

Следует иметь в виду, что сдув нельзя использовать для стабилизации ламинарного пограничного слоя. Более того, он приводит к обратному эффекту — снижению его устойчивости, так как способствует развитию возникающих пульсаций скоростей в пограничном слое.

Щели или отверстия, через которые осуществляется отсос, должны быть расположены в точке потери устойчивости, расстояние до которой от передней кромки может быть рассчитано по значению критического числа Рейнольдса. Следует учитывать, что осуществление ламинаризации предполагает устранение возмущающих факторов (шероховатость поверхности, местные отрывы пограничного слоя, вибрации стенки), способствующих сохранению турбулентного течения.

Измерения показали, что на охлаждаемой поверхности сопротивление трения меньше, чем на горячей стенке. Это говорит о том, что при охлаждении переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный происходит на большем удалении от передней кромки обтекаемой стенки. Таким образом, охлаждение способствует повышению устойчивости пограничного слоя.

Физически эффект стабилизации пограничного слоя охлаждением объясняется воздействием пониженных температур на вязкость и плотность обтекающего газа. При охлаждении газа снижается его динамический коэффициент вязкости и возрастает плотность. Это способствует устранению причин неустойчивости ламинарного пограничного слоя в газе, который успешней противостоит действию возмущений, вызывающих турбулентные пульсации.

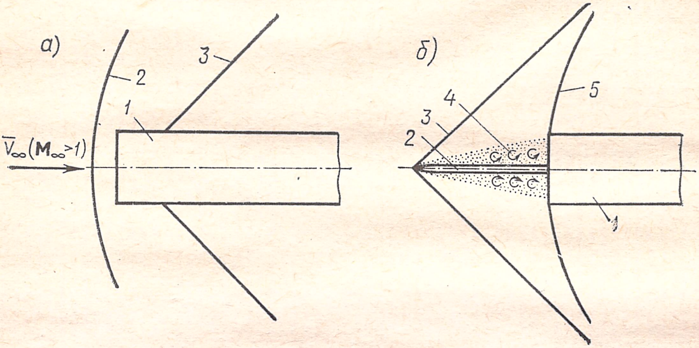


Рис. 12.7.5. Скачок уплотнения перед затупленным телом:

а — криволинейный отсоединенный скачок уплотнения: *1* — клин или цилиндр; *2* — головной скачок уплотнения; *3* — скачок уплотнения; *б* — присоединенный скачок уплотнения перед иглой: *1* — клин или цилиндр; *2* — игла; *3* — основной, присоединенный скачок уплотнения; *4* — зона отрыва; *5* — скачок уплотнения

Отвод тепла, благодаря которому температура на границе слоя становится меньше, чем на стенке, осуществляется различными техническими средствами, которые выбираются в зависимости от конструкции летательного аппарата и его назначения.

Повышению аэродинамического качества летательного аппарата и улучшению характеристик его устойчивости и управляемости способствует применение некоторых вспомогательных поверхностей на отдельных элементах конструкции. К числу их относятся аэродинамические гребни, представляющие собой небольшие выступы на верхней поверхности крыла, параллельные продольной оси летательного аппарата. Их назначение — воспрепятствовать перетеканию пограничного слоя вдоль размаха крыла и уменьшить срыв потока с его боковых кромок. Этой же цели служат концевые шайбы, установленные у этих кромок. Как и гребни, они способствуют улучшению обтекания, что проявляется в меньшем воздействии на крыло концевых вихрей. В результате снижается индуктивное сопротивление, возрастает аэродинамическое качество.

Снижению сопротивления и теплопередачи при больших сверхзвуковых скоростях способствует тонкая игла перед тупым телом.

Рассмотрим это явление. Отсоединенный почти прямой скачок уплотнения перед затупленным телом (рис. 12.7.5, *а*) может изменить свою форму, если перед этим телом установить тонкую иглу (рис. 12.7.5, *б*). Поток может оторваться на игле и образовать область течения клинообразного или конусообразного типа в зависимости от того, является ли тело плоским или цилиндрическим. Под влиянием такого отрывного течения изменится форма головного скачка уплотнения от почти прямого до косого, что обусловит снижение лобового сопротивления и теплопередачи в точке полного торможения затупленной поверхности. Однако в области между скачком и наконечником могут возникать высокие местные тепловые потоки, что несколько снизит эффективность использования иглы.

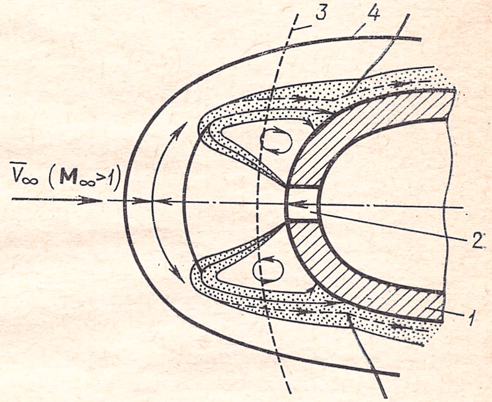


Рис. 12.7.6. Обтекание затупленного тела со вдувом газа:

1 — корпус; *2* — отверстие для вдува; *3* — положение скачка уплотнения без вдува; *4* — скачок уплотнения при вдуве

Экспериментальные исследования показали, что эффект, аналогичный использованию иглы, может быть достигнут струей газа, выдуваемой через небольшое отверстие на стенке головной части навстречу набегающему потоку, или применением системы малых отверстий (пористой стенки), через которые осуществляется инжекция газа в обтекающий поток. В обоих случаях благодаря вводу дополнительной массы газа происходит отрыв потока от затупленного тела, который образует как бы новую обтекаемую поверхность (псевдотело) с меньшей степенью затупления и большей длиной. В результате головной скачок уплотнения, сохраняя криволинейную форму, несколько отодвигается от носка и снижает свою интенсивность. Это приводит к более благоприятному перераспределению давлений и скоростей на затупленном носке и, как следствие, к снижению сопротивления и теплопередачи. Соответствующая модель течения приведена на рис. 12.7.6, на котором показана затупленная стенка с одним отверстием.

§ 12.8. СМЕШАННЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ. КРИТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО РЕЙНОЛЬДСА

Приступая к расчету пограничного слоя, следует проанализировать характер этого слоя на обтекаемой поверхности. Наблюдения показывают, что характер пограничного слоя существенно зависит от режима обтекания, определяемого числом Рейнольдса. Если рассмотреть поверхность в виде пластинки (рис. 12.8.1), то на переднем ее участке при сравнительно небольших числах $\mathrm{Re}=V_\delta x\rho_\delta/\mu_\delta$ образуется ламинарный пограничный слой, затем следует некоторая область перехода ламинарного слоя в турбулентный, которая может на хвостовых участках завершиться полностью турбулентным течением; последнему соответствуют достаточно большие числа Re. Такой пограничный слой на обтекаемой поверхности называют *смешанным пограничным слоем*.

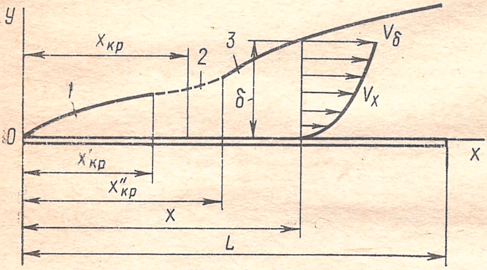


Рис. 12.8.1. Смешанный пограничный слой на пластинке:

1 — ламинарный пограничный слой; *2* — область перехода; *3* — турбулентный пограничный слой

Следует отметить, что как ламинарный, так и турбулентный пограничные слои возможны при любых числах Рейнольдса. Фактически на обтекаемой поверхности в пограничном слое устанавливается режим течения, который при данных условиях является *устойчивым*. При небольших числах Re устойчив ламинарный режим. При больших их значениях ламинарный пограничный слой оказывается неустойчивым. Некоторыми искусственными приемами, например обеспечивая плавный подвод жидкости к пластинке с гладкой поверхностью, можно добиться существования ламинарного пограничного слоя и при достаточно больших числах Рейнольдса. Однако такой режим течения неустойчив, и при всяком, даже малом, возмущении он переходит в устойчивый турбулентный режим. То же можно сказать и о неустойчивости турбулентного пограничного слоя, который может возникнуть на передней части пластинки (где числа Рейнольдса малы), если имеются какие-то начальные возмущения. Но, как бы велики ни были эти возмущения, при течении у передней кромки они затухают, если местное число $\mathrm{Re}=V_\delta x\rho_\delta/\mu_\delta$ не превышает некоторого предельного значения числа Рейнольдса. Число Re, отделяющее область устойчивого ламинарного течения от остальных участков поверхности, на которых имеются области перехода и устойчивого турбулентного течения, называют *критическим числом Рейнольдса* $\mathrm{Re}'_{\text{кр}}=V_\delta x'_{\text{кр}}\rho_\delta/\mu_\delta$. Иногда это число, определяемое по расстоянию $x'_{\text{кр}}$ до начала области перехода, называют первым или минимальным критическим числом в отличие от второго критического числа Рейнольдса $\mathrm{Re}''_{\text{кр}}=V_\delta x''_{\text{кр}}\rho_\delta/\mu_\delta$, отделяющего область перехода от зоны развитой турбулентности и вычисляемого по координате $x''_{\text{кр}}$ конца этой области. В области перехода течение носит перемежающийся характер: происходит смена ламинарных и турбулентных состояний через неравномерные промежутки времени. Физические свойства такого течения характеризуются коэффициентом перемежаемости, указывающим, какую долю некоторого промежутка времени в определенном сечении потока существует турбулентность.

В результате исследований обычно находят диапазон чисел Рейнольдса, ограниченный первым и вторым критическими их значениями и определяющий размеры области перехода. Приближенные значения этих чисел можно найти из графика (рис. 12.8.2), полученного по экспериментальным данным на пластинке, обтекаемой несжимаемым потоком с малой начальной турбулентностью.

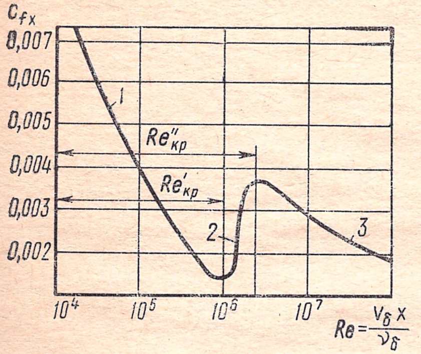


Рис. 12.8.2. Изменение местного коэффициента трения на пластинке и значения критических чисел Рейнольдса:

1 — ламинарный пограничный слой; *2* — область перехода; *3* — турбулентный пограничный слой

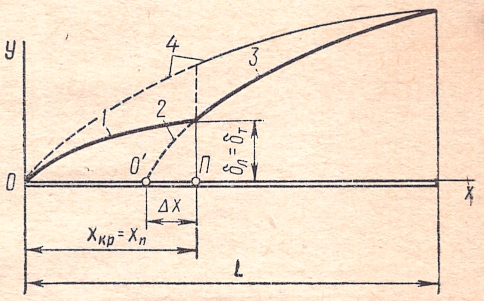


Рис. 12.8.3. Схема перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный:

1 — ламинарный пограничный слой; *2* — фиктивный участок турбулентного пограничного слоя; *3* — турбулентный пограничный слой за точкой перехода; *4* — турбулентный пограничный слой, начинающийся в точке *О*

Первое критическое число Рейнольдса определяется по минимальному значению коэффициента трения, соответствующему концу участка ламинарного пограничного слоя, и равно $\mathrm{Re}'_{\text{кр}} \approx 3\cdot 10^6$. За точкой минимума c_{fx} следует резкое, почти скачкообразное возрастание местного коэффициента трения, который достигает максимального значения, соответствующего границе области перехода и второму критическому числу Рейнольдса $\mathrm{Re}''_{\text{кр}} \approx 4\cdot 10^6$. Правее этой границы устойчивым будет турбулентный пограничный слой.

В приближенных практических расчетах можно исходить из того, что ламинарный пограничный слой отделен от турбулентного областью перехода с бесконечно малыми размерами, т. е. точкой. Координата $x_{\text{кр}}$ этой точки перехода *П* (рис. 12.8.3) определяется по критическому числу Рейнольдса, которое в свою очередь вычисляется как некоторое среднее между первым и вторым критическими значениями этого числа.

При оценке величины числа $\mathrm{Re}_{кр}$ приходится опираться в основном на экспериментальные данные. Такое экспериментальное критическое число Рейнольдса позволяет делать количественные оценки, а также анализировать качественно явление стабилизации ламинарного пограничного слоя, процесс перехода его в турбулентный пограничный слой и закономерности формирования потока в этом слое. В частности, установлено, что наличие ламинарного участка и области перехода не влияет на закон развития турбулентного пограничного слоя после точки перехода. Следовательно, для расчета пограничного слоя за точкой перехода можно использовать обычные зависимости, полученные в предположении, что течение в этом слое полностью турбулентное.

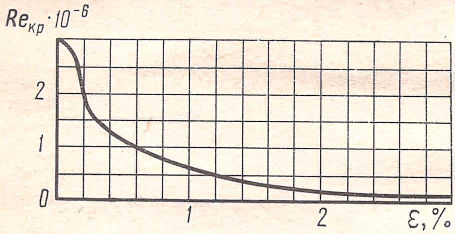


Рис. 12.8.4. Влияние степени турбулентности в несжимаемой жидкости на критическое число Рейнольдса в случае обтекания пластинки

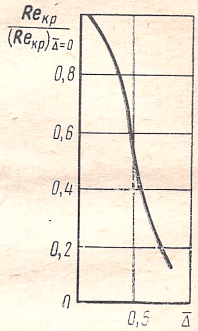


Рис. 12.8.5. Влияние шероховатости поверхности пластинки на критическое число Рейнольдса

Положение точки (или области) перехода на обтекаемой поверхности зависит от ряда факторов, основными из которых являются степень турбулентности внешнего потока, состояние поверхности, температура стенки, число $\mathbf{M}_{\delta}$ на внешней границе пограничного слоя, форма обтекаемой поверхности и продольный градиент давления.

Влияние степени турбулентности внешнего потока несжимаемой жидкости на число $\mathrm{Re}_{кр}$ показано на рис. 12.8.4. Увеличение степени турбулентности приводит к дополнительным возмущениям в пограничном слое, способствующим наступлению ранней турбулизации и, как результат, уменьшению критического числа Рейнольдса.

Наибольшее значение этого числа, найденное для шара в свободном полете, при котором начальная турбулентность принимается равной нулю, определяется величиной $\mathrm{Re}_{кр}=4\cdot 10^5$. В то же время по экспериментам в аэродинамической трубе с начальной турбулентностью потока 6% соответствующее число Рейнольдса в 4 раза меньше ($\mathrm{Re}_{кр}\approx 10^5$). Аналогичные измерения для пластинки дали уменьшение этого числа от 6 до 8 раз [от $2{,}8 \cdot 10^6$ до $(3{,}5 \div 5) \cdot 10^5$].

Качественно к такому же эффекту снижения устойчивости ламинарного пограничного слоя приводит имеющаяся на поверхности шероховатость, которую также следует рассматривать как источник возмущений. Если состояние поверхности охарактеризовать относительной шероховатостью $\overline{\Delta} = \Delta/\delta^*$ (где Δ — высота бугорков шероховатости; δ^* — толщина вытеснения), то влияние этого состояния на критическое число Рейнольдса для несжимаемой жидкости графически можно изобразить в виде кривой, показанной на рис. 12.8.5. Из этого рисунка видно, что небольшая шероховатость практически не влияет на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный. Согласно опытным данным, при малых скоростях в случае единичной цилиндрической или двухмерной шероховатости (например, в виде круглой тонкой проволочки, закрепленной поперек потока) высоту элемента этой шероховатости, при которой еще не сказывается ее влияние на переход, можно определить из соотношения $V^* \Delta_1 / \nu_\delta = 7$, где Δ_1 — высота элемента шероховатости; $V^* = \sqrt{\tau_{\text{ст}}/\rho_\delta}$ — динамическая скорость, определяемая по касательному напряжению на стенке в месте расположения этого элемента.

Высота элемента шероховатости, при которой переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный происходит непосредственно около этого элемента, определяется из соотношения $V^* \Delta_2 / \nu_\delta = 15 \div 20$. Значения высот Δ_1 и Δ_2, называемых критическими, соответствуют шероховатостям практически с любыми плоскими куполообразными элементами, а также в виде углублений. Причем эти значения для остроконечных элементов оказываются меньше. Дальнейшее увеличение толщины Δ_2 приводит к перемещению точки перехода вперед до тех пор, пока расстояние от этой точки до передней кромки не достигнет минимальной величины (этому расстоянию соответствует минимальное критическое число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = V_\delta x_{\text{кр}} / \nu_\delta$). Такая толщина является эффективной. Ее величина определяется при сверхзвуковых скоростях из условия

$$\frac{\Delta}{x_\Delta} = a \left(1 + \frac{k-1}{2} \mathrm{M}_\delta^2 \right) \mathrm{Re}_{x\Delta}^{-3/4}, \qquad (12.8.1)$$

в котором $\mathrm{Re}_{x\Delta} = V_\delta x_\Delta / \nu_\delta$, где x_Δ — расстояние до элемента шероховатости; $a = 32{,}8$ и $43{,}2$ — коэффициенты соответственно для конуса и пластинки.

Эффективной высоте шероховатости соответствует минимальное критическое число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$, определяемое при помощи экспериментальной зависимости

$$\mathrm{Re}_{\text{кр}} - \mathrm{Re}_{x\Delta} = 5{,}5 \cdot 10^4 \mathrm{M}_\delta^2. \qquad (12.8.1')$$

По этой зависимости, задавшись величиной $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$, можно вычислить величину $\mathrm{Re}_{x\Delta}$, определяющую расстояние до элемента шероховатости (турбулизатора), а по формуле (12.8.1) — соответствующее значение высоты этого элемента.

Оценка влияния сжимаемости на характер воздействия шероховатости показывает, что с увеличением M_δ интенсивность этого воздействия снижается.

Таким образом, пограничный слой в сжимаемой среде менее чувствителен к шероховатости, чем в несжимаемом потоке.

В соответствии с экспериментальными данными турбулентный пограничный слой нечувствителен к шероховатости, если высота элемента шероховатости меньше толщины ламинарного подслоя. Приближенно толщина для плоской поверхности может быть определена из соотношения $\Delta = 100(\nu_\delta/V_\delta)$.

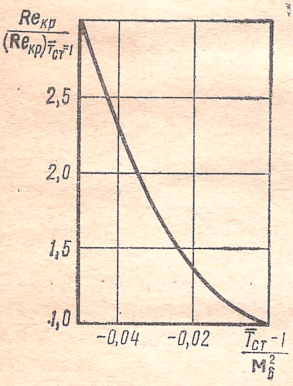


Рис. 12.8.6. Экспериментальная кривая, характеризующая зависимость числа $\mathrm{Re}_{кр}$ от относительной температуры и числа M_δ

Рассмотрим влияние температуры стенки на устойчивость ламинарного пограничного слоя. Установлено, что охлаждение обтекаемой поверхности способствует стабилизации пограничного слоя и повышению критических чисел Рейнольдса. Это объясняется тем, что от охлаждения снижается температура и увеличивается плотность газа у стенки, вследствие чего возрастает кинетическая энергия потока. Понятно, что частицы с большей энергией менее подвержены влиянию возмущающих пульсаций. При этом замечено, что при очень больших скоростях обтекания число Рейнольдса как критерий устойчивости имеет менее существенное значение по сравнению с такими параметрами, как относительная температура стенки $T_{ст}/T_\delta$ ($T_{ст}/T_\infty$ или $T_{ст}/T_r$) и числом M_δ. Результаты экспериментальных исследований зависимости критического числа Рейнольдса от температуры поверхности пластинки показаны на рис. 12.8.6. При помощи этих результатов можно найти зависимость величины $\mathrm{Re}_{кр}/(\mathrm{Re}_{кр})_{\bar T_{ст}=1}$ $[(\mathrm{Re}_{кр})_{\bar T_{ст}=1}$ — критическое число Рейнольдса при $\bar T_{ст} = T_{ст}/T_r = 1]$ от параметра $(\bar T_{ст} - 1)/\mathrm{M}_\delta^2$, включающего в себя, как видно, относительную температуру $\bar T_{ст}$ и число M_δ.

Таким образом, приведенные данные позволяют установить влияние на устойчивость ламинарного пограничного слоя также числа M_δ на внешней границе слоя. Нетрудно установить, что с увеличением M_δ критическое число Рейнольдса уменьшается, так как с возрастанием числа M_δ повышается температура восстановления, в связи с чем уменьшаются плотность и кинетическая энергия газа у стенки.

На частицы газа с меньшей кинетической энергией, естественно, сильнее сказывается воздействие возмущений, что приводит к более ранней турбулизации пограничного слоя.

Установим влияние на устойчивость ламинарного пограничного слоя степени турбулентности внешнего потока и шероховатости стенки при различных числах $\mathbf{M}_\delta$. Наблюдения показывают, что это влияние уменьшается с ростом $\mathbf{M}_\delta$ и при $\mathbf{M}_\delta > 4 \div 5$ критическое число Рейнольдса практически не зависит от степени турбулентности и шероховатости.

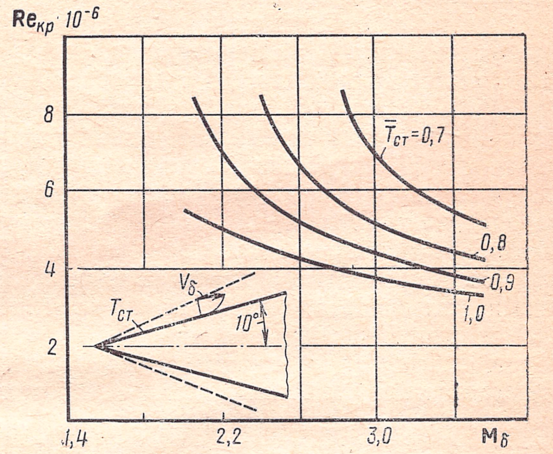


Рис. 12.8.7. Изменение критического числа Рейнольдса для конуса

Физическая природа этого явления состоит в следующем. Как известно, с ростом числа $\mathbf{M}_\delta$ увеличивается толщина пограничного слоя и, следовательно, бо́льшая масса газа вовлекается в вязкое течение. Именно поэтому такой утолщенный ламинарный пограничный слой испытывает меньшее возмущающее воздействие турбулентности внешнего потока и шероховатости. Из этого не следует делать вывод о стабилизирующем влиянии числа $\mathbf{M}_\delta$. В данном случае имеет место снижение роли в изменении критического числа Рейнольдса таких факторов, как турбулентность и шероховатость. Но одновременно величина этого числа снижается с ростом $\mathbf{M}_\delta$.

Критическое число Рейнольдса, рассчитанное по местным параметрам на границе слоя, зависит от формы обтекаемой поверхности. Рассмотрим это на примере обтекания конуса. При одном и том же значении числа $\mathbf{M}_\delta$ и температуры стенки толщина пограничного слоя на конусе меньше, чем на пластинке в соответствующей точке. В таком более тонком слое вязкой жидкости тенденция к поперечным перемещениям частиц ослабляется и критическое значение числа Рейнольдса увеличивается. Экспериментальные данные об изменении этого числа в зависимости от числа $\mathbf{M}_\delta$ и относительной температуры $\overline{T}_{ст} = T_{ст}/T_r$ приведены на рис. 12.8.7. Анализ этих данных показывает,

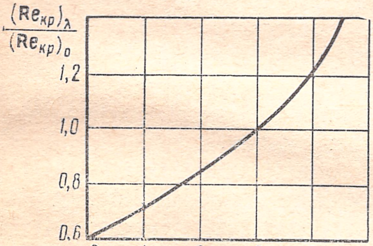


Рис. 12.8.8. Влияние продольного градиента давления на критическое число Рейнольдса потока, обтекающего плоскую криволинейную поверхность

что качественная картина влияния числа M_δ и температуры поверхности на устойчивость пограничного слоя для конуса такая же, как и для пластинки. Вместе с тем можно отметить особенность обтекания, согласно которой при $M_\delta > 4 \div 5$ критические числа Рейнольдса для конической поверхности практически остаются постоянными, соответствующими данному значению относительной температуры $\overline{T}_{\text{ст}}$. При этом, как показывают расчеты, значения критического числа Рейнольдса приблизительно обратно пропорциональны относительным температурам стенки $\overline{T}_{\text{ст}} = T_{\text{ст}}/T_r$, определяемым при помощи выражения (12.5.12) для T_r.

При исследовании устойчивости ламинарного пограничного слоя на криволинейной поверхности необходимо учитывать наряду с указанными факторами также влияние продольного градиента давления. Если он положительный, то частицы газа движутся с замедлением, поэтому их кинетическая энергия уменьшается. Это обусловливает меньшую сопротивляемость возмущающим воздействиям, что приводит к более интенсивному поперечному перемешиванию и, как следствие, к снижению критического числа Рейнольдса.

Ускорение частиц, вызванное отрицательным градиентом давления, способствует «затягиванию» ламинарного движения, характеризующегося бо́льшим числом Рейнольдса. На рис. 12.8.8 изображена кривая, найденная в результате экспериментального исследования дозвукового обтекания профиля и позволяющая оценить влияние продольного градиента давления на критическое число Рейнольдса. Этой кривой соответствует эмпирическая формула

$$(\mathrm{Re}_{\text{кр}})_\lambda / (\mathrm{Re}_{\text{кр}})_0 = 1/(1 - 0{,}048\lambda)^2, \qquad (12.8.2)$$

где $\lambda = -18x\, d\tilde{p}_\delta/dx$ — параметр, рассчитанный по величине градиента давления $d\tilde{p}_\delta/dx$; $\tilde{p}_\delta = 2p_\delta/(\rho_\delta V_\delta^2)$ — безразмерная величина давления в пограничном слое; $(\mathrm{Re}_{\text{кр}})_\lambda$ и $(\mathrm{Re}_{\text{кр}})_0$ — критические числа Рейнольдса, соответствующие $\lambda \neq 0$ (градиент давления отличен от нуля) и $\lambda = 0$ (градиент давления равен нулю).

Согласно экспериментальным исследованиям, для профилей крыльев точка перехода приблизительно совпадает с координатой точки минимума давления. В свою очередь, эта координата весьма близка к месту наибольшей толщины профиля. Поэтому ламинаризированные профили (с большой протяженностью ламинарного пограничного слоя) имеют смещенные к задней кромке участки наибольшей толщины. По экспериментальным данным, точка минимума давления может быть удалена от передней кромки на расстояние 60—65% хорды профиля. Сопротивление такого профиля, обусловленное воздействием ламинарного трения, может быть снижено по сравнению с обычным профилем в $1{,}5 \div 2$ раза.

После определения с учетом указанных факторов критического числа Рейнольдса можно рассчитывать параметры смешанного пограничного слоя, вычисляя их для участков ламинарного и турбулентного течений. Рассмотрим в качестве примера метод расчета такого пограничного слоя на плоской пластинке (см. рис. 12.8.3).

На участке пластинки от передней кромки до точки $П$ (длина участка $x_{кр}=x_П$) параметры вязкого обтекания (толщина слоя, коэффициент трения) рассчитывают по обычным соотношениям ламинарного пограничного слоя. Однако для расчета турбулентного течения, начинающегося за точкой $П$, нельзя непосредственно применить приведенные ранее зависимости для турбулентного пограничного слоя, так как этот слой начинается не с нулевой толщины, а с какого-то конечного значения. Опытным путем подтверждено, что эти зависимости можно с достаточным приближением использовать, если входящую в них координату x отсчитывать от условного начала турбулентного пограничного слоя, определяемого на рис. 12.8.3 точкой O'.

Для определения этой точки можно применить одну из следующих схем. В соответствии с первой схемой принимается, что расстояние $O'П=\Delta x$, равное длине условной пластинки с турбулентным пограничным слоем, должно быть таким, чтобы обеспечить толщину турбулентного пограничного слоя $\delta_т$ в точке перехода, равную толщине ламинарного пограничного слоя $\delta_л$ на длине $x_{кр}=$ $=x_П$. Если рассматривать несжимаемую жидкость, то это приводит к условию

$$A_1 x_П (\mathbf{Re}_{кр})_{x_П}^{-1/2} = A_2 \Delta x \left(\mathbf{Re}_{\Delta x}\right)^{-1/5}, \tag{12.8.3}$$

где согласно (12.3.19′) и (12.4.58) $A_1=4{,}64$; $A_2=0{,}37$;

$$(\mathbf{Re}_{кр})_{x_П} = V_\delta x_П/\nu_\delta,\ \mathbf{Re}_{\Delta x} = V_\delta \Delta x/\nu_\delta, \tag{12.8.4}$$

причем критическое число $(\mathbf{Re}_{кр})_{x_П}$ рассматривается как известная величина, равная $(1\div5)\cdot10^6$. Зная эту величину, можно из (12.8.3) найти Δx.

Чтобы учесть влияние сжимаемости и высоких температур, можно воспользоваться определяющими параметрами. С этой целью выражения для чисел Рейнольдса представим в следующем виде:

$$(\mathbf{Re}_{кр})_{x_П} = V_\delta x_П/\nu^*,\ \mathbf{Re}_{\Delta x} = V_\delta \Delta x/\nu^*. \tag{12.8.5}$$

В рассматриваемом случае критическое число $(\mathbf{Re}_{кр})_{x_П}$ следует находить, принимая во внимание температуру стенки и число $\mathbf{M}_\delta$. Внося значения (12.8.5) в (12.8.3), можно вычислить длину Δx, которая будет определяться уже с учетом влияния больших скоростей обтекания.

Согласно второй схеме предполагается, что в точке перехода одинаковы не толщины слоя, а толщины потери импульса δ^{**} для ламинарного и турбулентного пограничных слоев, т. е.

$$(\delta_л^{**})_{x_П} = (\delta_п^{**})_{\Delta x}. \tag{12.8.6}$$

Для несжимаемой жидкости толщину потери импульса находим по уравнению (12.2.19), в котором принимаем $\rho=\rho_\delta$:

$$\delta^{**}=\int_0^\delta \frac{V_x}{V_\delta}\left(1-\frac{V_x}{V_\delta}\right)dy.$$

Вводя обозначение для интеграла

$$Б=\int_0^1 \frac{V_x}{V_\delta}\left(1-\frac{V_x}{V_\delta}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right)=\mathrm{const}, \tag{12.8.7}$$

получим

$$\delta^{**}=\delta Б. \tag{12.8.8}$$

Внося это значение в (12.8.6) и принимая во внимание выражение для толщин (12.8.3), найдем

$$A_1 Б_1 x_П (\mathbf{Re}_{\text{кр}})_{x_П}^{-1/2}=A_2 Б_2 \Delta x (\mathbf{Re}_{\Delta x})^{-1/5}, \tag{12.8.9}$$

где $Б_1$ вычисляется из (12.8.7) с заменой V_x/V_δ по уравнению (12.3.15), в котором принимается $\eta/\eta_\delta=y/\delta$, а $Б_2$ находится из того же уравнения (12.8.7) с заменой V_x/V_δ согласно (12.4.54). Величина Δx, найденная из (12.8.9), будет несколько больше, чем полученная по (12.8.3). Можно предположить, что среднее между значениями Δx, полученными по этим формулам, будет ближе к действительному значению.

Результаты расчета координаты точки O' можно использовать для расчета толщин, распределения местных коэффициентов трения, а также средних величин этих коэффициентов в случае смешанного пограничного слоя. Средний коэффициент трения для пластинки длиной L

$$(c_{xf})_{\text{нсж}}=(c_{xf\,\text{л}})_{\text{нсж}}\frac{x_П}{L}+(c'_{xf\,\text{т}})_{\text{нсж}}\frac{x'}{L}-(c''_{xf\,\text{т}})_{\text{нсж}}\frac{\Delta x}{L}, \tag{12.8.10}$$

где $(c_{xf\text{л}})_{\text{нсж}}$ — средний коэффициент ламинарного трения на участке $O'П$ (см. рис. 12.8.3), рассчитанный по критическому числу Рейнольдса; $(c'_{xf\,\text{т}})_{\text{нсж}}$ и $(c''_{xf\,\text{т}})_{\text{нсж}}$ — средние коэффициенты турбулентного трения соответственно на участках длиной $x'=L-x_П+\Delta x$ и Δx. При этом коэффициент $(c'_{xf\,\text{т}})_{\text{нсж}}$ найден для числа Рейнольдса, вычисленного по длине x', а коэффициент $(c''_{xf\,\text{т}})_{\text{нсж}}$ — для числа $\mathbf{Re}$, подсчитанного по расстоянию Δx.

Приближенно можно рассчитать коэффициент трения, исходя из предположения, что турбулентный слой берет свое начало непосредственно в точке передней кромки (см. рис. 12.8.3). В этом случае величину Δx следует принять равной длине ламинарного участка, т. е. $\Delta x=x_П$. При этом условии формулу (12.8.10) можно переписать в виде

$$c_{xf}=c_{xf\,\text{л}}\frac{x_П}{L}+c'_{xf\,\text{т}}-c''_{xf\,\text{т}}\frac{x_П}{L}. \tag{12.8.11}$$

Здесь длина участка перехода $x_п$ считается величиной заданной, определяемой по известному критическому числу Рейнольдса.

Формулу (12.8.11) можно использовать при расчете коэффициента трения для корпусов (тел вращения). В этом случае вместо $x_п$ следует принять участок боковой поверхности $S_л$, а вместо L — боковую поверхность $S_{бок}$. Если при этом отнести коэффициент c_{xf} к характерной площади $S_{мид}$, то

$$c_{xf} = c_{xf\,л}\frac{S_л}{S_{мид}} + c'_{xf\,т}\frac{S_{бок}}{S_{мид}} - c''_{xf\,т}\frac{S_л}{S_{мид}}\,. \qquad (12.8.12)$$

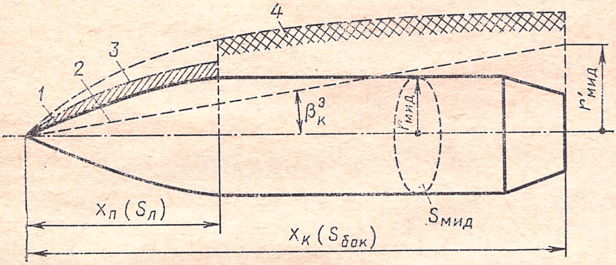


Рис. 12.8.9. Форма эквивалентного конуса:

1 — заданное тело вращения; *2* — эквивалентный конус; *3* — ламинарный пограничный слой; *4* — турбулентный пограничный слой

При дозвуковых скоростях обтекания критическое число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{кр}$, по которому вычисляется длина $x_п$, можно находить для корпуса так же, как и для пластинки. При этом следует иметь в виду, что у корпуса действительные значения этого числа несколько больше.

При сверхзвуковых скоростях число $\mathrm{Re}_{кр}$, как и составляющие коэффициенты трения в (12.8.12), можно найти, исходя из представления заданного тела вращения с криволинейной образующей в виде эквивалентного конуса, полуугол раствора которого $\beta_к^э$ вычисляют из условия $\pi r'_{мид} x_к = S_{бок}$, которое дает $\beta_к^э = r'_{мид}/x_к = S_{бок}/(\pi x_к^2)$ (рис. 12.8.9). Согласно сказанному

$$c_{xf} = \sqrt{3}\,(c_{xf\,л})_{пл}\frac{S_л}{S_{мид}} + 1{,}17\left[(c'_{xf\,т})_{пл}\frac{S_{бок}}{S_{мид}} - (c''_{xf\,т})_{пл}\frac{S_л}{S_{мид}}\right]. \qquad (12.8.13)$$

Коэффициенты трения в правой части определяются для плоской пластинки по значениям соответствующих параметров газа на эквивалентном конусе.

ГЛАВА XIII

ТЕПЛОПЕРЕДАЧА

§ 13.1. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЙ НАГРЕВ

Уравнение теплового баланса

При полете в атмосфере тепло от окружающей среды переходит к летательному аппарату, когда на близком расстоянии от его поверхности температура газа становится выше температуры тела. Области высоких температур возникают вследствие торможения потока в ударных волнах и в пограничном слое, вызывающего увеличение статической энтальпии воздуха.

Расчет теплопередачи заключается в определении удельного теплового потока (поверхностной плотности теплового потока), равного количеству тепла, подводимого к единице поверхности в единицу времени [*ккал*/(*м*^{2}·*сек*)] [МКГСС] или *вт*/*м*^{2} [СИ]], а также полного теплового потока к обтекаемой поверхности за определенный промежуток времени. Такой расчет позволяет правильно выбрать систему охлаждения или другие средства, обеспечивающие предохранение поверхности от перегрева, а также дает возможность определить участки, где достигаются чрезмерные тепловые напряжения и возможно разрушение поверхности, чтобы предпринять меры предосторожности.

Рассмотрим уравнение теплового баланса, которое в общем виде определяет суммарный удельный тепловой поток, идущий на нагревание стенки. Величина этого удельного теплового потока $q_{\text{ст}}$ равна разности подводимого $q_{\text{пд}}$ и отводимого от нее $q_{\text{от}}$ тепловых потоков, т. е.

$$q_{\text{ст}} = q_{\text{пд}} - q_{\text{от}}. \qquad (13.1.1)$$

Подводимый к стенке тепловой поток возникает за счет теплопроводности и диффузии в газе (аэродинамический тепловой поток $q_{\text{к}} = q_{\text{т}} + q_{\text{д}}$), излучения газа ($q_{\text{рад}}$), солнечной ($q_{\text{с}}$) и земной ($q_{\text{з}}$) радиации и передачи тепла от оборудования ($q_{\text{об.п}}$):

$$q_{\text{пд}} = q_{\text{к}} + q_{\text{рад}} + q_{\text{с}} + q_{\text{з}} + q_{\text{об.п}}. \qquad (13.1.2)$$

Отводимый поток складывается из тепла ($q_{\text{из}}$), излучаемого нагретой поверхностью, тепла ($q_{\text{аб}}$), поглощаемого материалом стенки и рассеиваемого в окружающую среду при уносе массы, тепла ($q_{\text{ох}}$), отводимого различными охлаждающими устройствами, и тепла ($q_{\text{об.о}}$), идущего на разогрев оборудования. Следовательно,

$$q_{\text{от}}=q_{\text{из}}+q_{\text{аб}}+q_{\text{ох}}+q_{\text{об.о}}. \tag{13.1.3}$$

В тепловом балансе тепла ($q_{\text{об.п}}$) от оборудования или к нему ($q_{\text{об.о}}$), а также тепло ($q_{\text{ох}}$), отводимое путем охлаждения, могут иметь большой удельный вес. Проблемы, связанные с допустимыми значениями $q_{\text{об.п}}$, $q_{\text{об.о}}$ и потребными величинами $q_{\text{ох}}$, носят прежде всего конструктивно-технологический характер и решаются в каждом конкретном случае с учетом специфических особенностей летательного аппарата. Коснемся здесь лишь процессов естественного подвода и отвода тепла, связанных с разогревом газа, излучением стенки, а также тепловой радиацией от Солнца и Земли.

Подвод тепла от разогретого газа

Молекулярная теплопроводность. При изучении явлений, связанных с обтеканием тел высокоскоростным потоком, приходится иметь дело с неравномерным нагревом газа, приводящим к пространственному распределению как температур, так и состава газа. Возникающие градиенты температур вызывают поток тепла, обусловленный молекулярной теплопроводностью. Этот тепловой поток определяется законом Фурье

$$q_{\text{т}}=-\lambda_{\text{ст}}(\partial T/\partial y)_{\text{ст}}, \tag{13.1.4}$$

где $\lambda_{\text{ст}}$, $(\partial T/\partial y)_{\text{ст}}$ — соответственно коэффициент теплопроводности и температурный градиент для разогретого газа у стенки. Знак минус в правой части поставлен с учетом того, что величина $q_{\text{т}}$ является положительной, а температурный градиент $(\partial T/\partial y)_{\text{ст}}$ — отрицательным, так как температура в направлении распространения тепла снижается.

Диффузионный тепловой поток. Одной из особенностей процесса теплопередачи в пограничном слое при очень больших скоростях обтекания является то, что атомы и ионы, появившиеся в результате диссоциации и ионизации, участвуют в переносе тепла, диффундируя в области с меньшей атомарной и ионной концентрацией. Диффузия, сопровождающаяся рекомбинацией атомов и ионов, приводит к выделению дополнительного тепла (см. подробнее в § 3.2)

$$q_{\text{д}}=\sum Q_{i\text{д}}i_i, \tag{13.1.5}$$

где $Q_{i\text{д}}$ — диффузионный поток вещества, i_i — энтальпия i-го компонента смеси, определяемая соответственно по (3.2.1) и (1.6.28).

Для модели воздуха, представляющего собой реагирующую атомно-молекулярную смесь,

$$q_{\text{д}}=Q_{\text{Ад}}i_{\text{А}}+Q_{\text{Мд}}i_{\text{М}}, \tag{13.1.5$'$}$$

где

$$i_{\text{А}}=\int_{0}^{T} c_{p\text{А}}dT+i_{\text{хим}},\quad i_{\text{М}}=\int_{0}^{T} c_{p\text{М}}dT. \tag{13.1.6}$$

Кроме того, можно считать, что перенос вещества в заданном направлении y

$$Q_{\text{АД}}=-Q_{\text{МД}}=-\rho D_{\text{АМ}}(\partial c_{\text{А}}/\partial y);\; D_{\text{АМ}}=D_{\text{МА}}=\overline{D}, \tag{13.1.7}$$

где $D_{\text{АМ}}=D_{\text{МА}}=\overline{D}$ — коэффициент диффузии атомарного (молекулярного) компонента в молекулярный (атомарный); $c_{\text{А}}$ — массовая концентрация атомов.

Очевидно, с известным приближением можно исходить из указанной бинарной структуры диссоциированного воздуха, так как коэффициенты переноса, характеризующие вязкость, теплопроводность и диффузию, а также атомные веса кислорода и азота близки друг к другу. К тому же принимаем, что концентрация окиси азота низка и ее влиянием на перенос энергии можно пренебречь. Можно также не учитывать влияние ионизации, которая начинает сказываться лишь при $\mathrm{M}_\infty > 20 \div 25$.

Внося (13.1.7) в (13.1.5′) и рассматривая условия на стенке, получим

$$q_{\text{Д}}=-\rho_{\text{ст}}\overline{D}(\partial c_{\text{А}}/\partial y)_{\text{ст}}(i_{\text{А}}-i_{\text{М}}). \tag{13.1.8}$$

Энтальпии атомарной $i_{\text{А}}$ и молекулярной $i_{\text{М}}$ компонентов определяют энтальпию смеси i:

$$i=i_{\text{А}}c_{\text{А}}+i_{\text{М}}(1-c_{\text{А}}). \tag{13.1.9}$$

Согласно (13.1.6) разность

$$i_{\text{А}}-i_{\text{М}}=\int_{0}^{T}(c_{p\text{А}}-c_{p\text{М}})\,dT+i_{\text{хим}}. \tag{13.1.10}$$

В реальных случаях второй член в правой части значительно больше первого и, следовательно, можно принять $i_{\text{А}}-i_{\text{М}}\approx i_{\text{хим}}$, где $i_{\text{хим}}=u_d$ [см. (1.6.9)].

Кроме переноса вещества, обусловленного переменной концентрацией, имеют место диффузионные потоки, вызванные наличием градиентов температур (термодиффузия) и давления (бародиффузия). Эти две составляющие диффузионного потока не имеют существенного значения и поэтому при изучении теплопроводности в потоке газа, обтекающем тело, не учитываются. Компоненты газа, диффундирующие вследствие наличия градиента концентрации, перенося энтальпию, являются источниками потока энергии, который при определенных условиях может превысить поток тепла за счет теплопроводности.

Полный удельный тепловой поток. Величина полного удельного теплового потока определяется теплопередачей за счет обычной молекулярной теплопроводности и выделением тепла в результате рекомбинации атомов, участвовавших в диффузии. Отсюда полный удельный тепловой поток к стенке в соответствии с (13.1.4) и (13.1.8)

$$q_{к}=q_{т}+q_{Д}=-\lambda_{ст}(\partial T/\partial y)_{ст}-\rho_{ст}\overline{D}(i_{А}-i_{М})(\partial c_{А}/\partial y)_{ст}. \quad (13.1.11)$$

Производную $(\partial T/\partial y)_{ст}$ в этом выражении можно определить следующим образом. Продифференцируем по y (13.1.9):

$$\frac{\partial i}{\partial y}=\frac{\partial c_{А}}{\partial y}(i_{А}-i_{М})\,\frac{\partial i_{А}}{\partial y}c_{А}+\frac{\partial i_{М}}{\partial y}(1-c_{А}). \quad (13.1.9')$$

Воспользуемся формулой (1.6.28), преобразовав ее к дифференциальной форме $di_i=c_{pi}dT$ и приняв при этом во внимание, что $d(i_{хим})_i=0$, так как для каждого компонента энтальпия его образования $(i_{хим})_i=\mathrm{const}$. В соответствии с полученным выражением для di_i запишем, что $di_{А}=c_{pА}dT$, $di_{М}=c_{pМ}dT$. Следовательно, (13.1.9′) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial i}{\partial y}=\frac{\partial c_{А}}{\partial y}(i_{А}-i_{М})+\frac{\partial T}{\partial y}[c_{pА}c_{А}+c_{pМ}(1-c_{А})],$$

где согласно (1.6.25) $c_{pА}c_{А}+c_{pМ}(1-c_{А})=(c_p)_{cp}$. Из полученного выражения для $\partial i/\partial y$ находим производную

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{ст}=\frac{1}{(c_p)_{ст}}\left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_{ст}-\frac{1}{(c_p)_{ст}}\left(\frac{\partial c_{А}}{\partial y}\right)_{ст}(i_{А}-i_{М})_{ст},$$

где $[(c_p)_{cp}]_{ст}$ обозначено через $(c_p)_{ст}$.

Внося полученные выражения для $(\partial T/\partial y)_{ст}$ в (13.1.11), получим

$$q_{к}=-\frac{\lambda_{ст}}{(c_p)_{ст}}\left[\left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_{ст}-\left(\frac{\partial c_{А}}{\partial y}\right)_{ст}(i_{А}-i_{М})_{ст}+\right.$$
$$\left.+\frac{\rho_{ст}(c_p)_{ст}\overline{D}}{\lambda_{ст}}\left(\frac{\partial c_{А}}{\partial y}\right)_{ст}(i_{А}-i_{М})_{ст}\right], \quad (13.1.12)$$

или

$$q_{к}=-\frac{\lambda_{ст}}{(c_p)_{ст}}\left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_{ст}\left\{\underbrace{\left[1-\frac{(\partial c_{А}/\partial y)_{ст}(i_{А}-i_{М})_{ст}}{(\partial i/\partial y)_{ст}}\right]}_{\text{Теплопроводность (1)}}+\right.$$
$$\left.+\underbrace{\mathbf{Le}\,\frac{(\partial c_{А}/\partial y)_{ст}(i_{А}-i_{М})_{ст}}{(\partial i/\partial y)_{ст}}}_{\text{Диффузия (2)}}\right\}. \quad (13.1.12')$$

В уравнение (13.1.12′) введен безразмерный параметр

$$\mathbf{Le}=\rho_{ст}(c_p)_{ст}\overline{D}/\lambda_{ст}, \quad (13.1.13)$$

называемый числом Льюиса — Семенова, являющийся одним из важных критериев диффузионной теплопередачи. Физический смысл этого критерия состоит в том, что он определяет отношение интенсивности теплопередачи при массообмене в результате диффузии к интенсивности теплообмена путем теплопроводности. В общем случае $\mathbf{Le}>1$, а следовательно теплопроводность менее интенсивна, чем передача тепла диффузией. Перепишем число $\mathbf{Le}$ (13.1.13) в форме $\mathbf{Le}=\frac{\mu_{ст}(c_p)_{ст}}{\lambda_{ст}}\cdot\frac{\rho_{ст}\overline{D}}{\mu_{ст}}$. Первый сомножитель в правой части представляет собой число Прандтля $\mathbf{Pr}=\mu_{ст}(c_p)_{ст}/\lambda_{ст}$, а второй — безразмерную величину, которую можно рассматривать в качестве характеристики диффузионного переноса тепла. В теории теплопередачи вводят параметр, обратный по значению этой величине, называемый диффузионным числом Прандтля или числом Шмидта:

$$\mathbf{Sc}=\mu_{ст}/(\rho_{ст}\overline{D}). \qquad (13.1.14)$$

Физический смысл параметра $\mathbf{Sc}$ заключается в том, что он определяет соотношение между кинетической энергией, обусловленной молекулярным переносом, и энергией, передаваемой путем диффузии. Как и критерии Прандтля, число Шмидта для газов $\mathbf{Sc}<1$, причем $\mathbf{Sc}<\mathbf{Pr}$. Зависимость между числами Шмидта и Льюиса — Семенова следующая:

$$\mathbf{Le}=\mathbf{Pr}/\mathbf{Sc}. \qquad (13.1.13')$$

Важное значение для практики имеют исследования численных величин приведенных параметров. Теоретически установлено, что для двухкомпонентной атомно-молекулярной смеси число Шмидта меняется весьма мало в широком интервале температур. Например, если при $T=252$ К значение $\mathbf{Sc}=0{,}495$, то при $T=3360$ К число $\mathbf{Sc}=0{,}482$. То же можно сказать и о характере изменения числа Прандтля, значение которого $\mathbf{Pr}\approx 0{,}71$. Если принять число Шмидта равным некоторому среднему значению $\mathbf{Sc}=0{,}49$, то параметр Льюиса — Семенова

$$\mathbf{Le}=\mathbf{Pr}/\mathbf{Sc}=\rho\overline{D}c_p/\lambda=0{,}71/0{,}49=1{,}45.$$

По имеющимся данным, этот параметр слабо зависит от температуры вплоть до значений $T\approx 9000$ К.

Анализ возможных случаев теплопередачи. Рассмотрим уравнение (13.1.12′) и проанализируем различные случаи теплопередачи в пограничном слое. Из (13.1.12′) следует, что если температура у стенки ниже предела диссоциации, то концентрация атомов равна нулю, следовательно, $(\partial c_A/\partial y)_{ст}=0$ и тепловой поток

$$q_к=q_т=-\frac{\lambda_{ст}}{(c_p)_{ст}}\left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_{ст}. \qquad (13.1.15)$$

В рассматриваемом случае предельного термодинамического равновесия теплообмен характеризуется молекулярной теплопроводностью, заключающейся в передаче кинетической энергии поступательного движения молекул, а также их колебательной и вращательной энергией.

Реальное течение в диссоциированном пограничном слое характеризуется наличием градиента концентрации атомов и молекул и неравновесностью химических реакций. В этом случае механизм теплоотдачи в пограничном слое может существенно отличаться от процесса чисто молекулярной теплопроводности. Наряду с молекулярной теплопередачей перенос тепла происходит за счет химической энергии, выделившейся при рекомбинации. Для этого процесса характерны следующие предельные случаи.

В первом предельном случае, когда $\mathrm{Le}=1$, тепловой поток, как видно из (13.1.12′), точно равен (13.1.15). В этом случае особенность процесса теплопередачи состоит в том, что количество тепла, поглощаемое при диссоциации [1-й член в (13.1.12′)], точно равно потоку тепла за счет диффузии [2-й член в (13.1.12′)]. Очевидно, рассматриваемый случай характеризуется бесконечно большой скоростью рекомбинации, так что в каждой точке пограничного слоя устанавливается термодинамическое равновесие. В соответствии с этим диффузионная теплопередача в слое обусловлена наличием профиля равновесных концентраций.

В практических случаях условия течения, близкие к такому гипотетическому «равновесному» пограничному слою, будут иметь место тогда, когда скорость диффузии пренебрежимо мала по сравнению со скоростью диссоциации и рекомбинации (а в случае ионизации — также и электронных реакций).

Во втором предельном случае, который имеет место при очень больших скоростях полета, когда газ в пограничном слое сильно диссоциирован, параметр $(\partial c_{\mathrm{A}}/\partial y)_{\text{ст}}(i_{\mathrm{A}}-i_{\mathrm{M}})_{\text{ст}}/[(\partial i/\partial y)_{\text{ст}}]\approx 1$. Это можно доказать, если воспользоваться (13.1.9′). По предположению, при очень больших скоростях $c_{\mathrm{A}}\to 1$, следовательно,

$$\frac{\partial i}{\partial y}\to\frac{\partial c_{\mathrm{A}}}{\partial y}(i_{\mathrm{A}}-i_{\mathrm{M}})+\frac{\partial i_{\mathrm{A}}}{\partial y}.$$

Здесь производная

$$\frac{\partial i_{\mathrm{A}}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int\limits_0^T c_{p\mathrm{A}}\,dT+(i_{\text{хим}})_{\mathrm{A}}\right].$$

Учитывая, что в реальных случаях теплота образования $(i_{\text{хим}})_{\mathrm{A}}\gg\int\limits_0^T c_{p\mathrm{A}}\,dT$ и является величиной постоянной, можно принять $\partial i_{\mathrm{A}}/\partial y\approx 0$. Следовательно, для условий на стенке $(\partial i/\partial y)_{\text{ст}}\to$ $\to(\partial c_{\mathrm{A}}/\partial y)_{\text{ст}}(i_{\mathrm{A}}-i_{\mathrm{M}})_{\text{ст}}$. В соответствии с этим

$$q_{\text{к}}=q_{\text{д}}=-\frac{\lambda_{\text{ст}}}{(c_p)_{\text{ст}}}\,\mathrm{Le}\left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_{\text{ст}}. \qquad (13.1.15')$$

Таким образом, в рассматриваемом предельном случае все тепло передается за счет диффузии. Этот процесс теплопередачи характеризуется весьма малыми скоростями рекомбинаций. Вследстние этого хотя диффузия атомов и возникает, однако энергия в пограничном слое не выделяется. Практически это может иметь место в потоке, если время химической реакции велико по сравнению с характерным временем движения частиц. Такие потоки называют «замороженными». В замороженном течении атомы, образующиеся при диссоциации, диффундируют по направлению к холодной стенке, где затем рекомбинируют. Освобождающаяся при этом энергия зависит от каталитических свойств стенки, проявляющихся в различных значениях скорости каталитической реакции рекомбинации.

Можно ожидать, что все действительные процессы теплопередачи лежат между указанными двумя предельными случаями.

Формула Ньютона. Общий тепловой поток от разогретого газа к стенке $q_к = q_т + q_д$, определяемый по уравнению (13.1.11), можно представить как конвективную теплоотдачу, под которой понимают процесс теплообмена, осуществляемый между какой-либо твердой стенкой и омывающим газом. Величину такой теплоотдачи в практических расчетах обычно выражают при помощи формулы Ньютона

$$q_к = \alpha_{ст}(T - T_{ст}), \qquad (13.1.16)$$

где T — некоторая характерная температура потока, обтекающего поверхность; $T_{ст}$ — температура стенки.

Коэффициент $\alpha_{ст}$ в (13.1.16), имеющий размерность *ккал/(м²×сек·град)* в системе МКГСС или *вт/(м²·град)* в СИ, называют коэффициентом теплоотдачи. Численно он равен количеству тепла, воспринимаемому (или отдаваемому) участком поверхности единичного размера в единицу времени при разности температур между стенкой и газом в один градус.

При выборе температуры T в (13.1.16) исходят из следующего. Известно, что если стенка теплоизолирована, то температура газа достигает максимальной величины у поверхности и равна температуре восстановления T_r. Эту температуру физически оправдано рассматривать как наиболее существенный фактор, определяющий теплопередачу от разогретого газа к поверхности в зависимости от того, какая будет температура этой поверхности. При этом важно отметить, что для заданных условий величина T_r является слабой функцией параметров обтекания. Именно за эту характерную температуру принимают температуру T в (13.1.16), что дает возможность избежать неопределенности в понятии температуры омывающего потока. В соответствии со сказанным формула Ньютона записывается в виде

$$q_к = \alpha_{ст}(T_r - T_{ст}). \qquad (13.1.16')$$

Такое представление об удельном тепловом потоке имеет важную особенность, заключающуюся в том, что коэффициент теплоотдачи $\alpha_{ст}$ оказывается слабой функцией разности температур, и в практических расчетах влиянием этой разности можно пренебречь. При этом, однако, учитывается, что коэффициент теплоотдачи является параметром, зависящим от ряда других факторов, таких, как скорость движения газа, форма, размеры, положение (угол атаки) обтекаемого тела, структура пограничного слоя (ламинарный или турбулентный), физические параметры среды (теплопроводность, вязкость, теплоемкость и др.).

Уравнение теплопередачи (13.1.16′) применимо при скоростях обтекания, когда химические реакции в пограничном слое отсутствуют. В условиях очень больших скоростей химические процессы имеют большое значение, поэтому при расчете теплопередачи следует учитывать изменение энтальпии в соответствии с формулой

$$q_{к}=[\alpha_{ст}/(c_p)_{ст}](i_r-i_{ст}), \qquad (13.1.17)$$

где $(c_p)_{ст}$ — средняя удельная теплоемкость для условий газа на стенке; i_r, $i_{ст}$ — соответственно энтальпия восстановления и энтальпия газа на поверхности стенки.

Напомним, что ранее было принято считать температуру стенки и температуру газа (или соответственно энтальпии) на ее поверхности одинаковыми. Результаты вычислений показывают, что отношение $\alpha_{ст}/(c_p)_{ст}$ в (13.1.17) в случае диссоциации меняется мало (до 10÷15%) и в первом приближении может выбираться из решений для пограничного слоя без химических реакций. При этом энтальпии i_r, $i_{ст}$ вычисляются с учетом диссоциации. Из данных расчетов по формуле (13.1.17) следует, что, несмотря на небольшое изменение $\alpha_{ст}/(c_p)_{ст}$, тепловые потоки могут существенно отличаться от значений, вычисленных по (13.1.16′) без учета диссоциации.

Для характеристики теплопередачи удобно применять вместо размерного коэффициента теплопередачи безразмерные критерии. Среди этих критериев число Стантона

$$\mathbf{St}=q_{к}/[\rho_\delta V_\delta(i_r-i_{ст})]=\alpha_{ст}/[\rho_\delta V_\delta(c_p)_{ст}] \qquad (13.1.18)$$

и число Нуссельта

$$\mathbf{Nu}=\alpha_{ст}l/\lambda_{ст}, \qquad (13.1.19)$$

где l — произвольный линейный размер; $\lambda_{ст}$ — коэффициент теплопроводности газа у стенки.

Связь между этими двумя числами устанавливается очевидным соотношением

$$\mathbf{Nu}=\mathbf{St}\,\mathbf{Re}\,\mathbf{Pr}, \qquad (13.1.20)$$

где $\mathbf{Re}=V_\delta\rho_\delta l/\mu_\delta$; $\mathbf{Pr}=(c_p)_{ст}\mu_\delta/\lambda_{ст}$.

В определении коэффициента теплоотдачи $\alpha_{ст}$ или безразмерных критериев теплопередачи заключается основная задача теории аэродинамического теплообмена. При этом можно принять во внимание, что поскольку в формулах (13.1.18) и (13.1.19) выделены дополнительные члены, влияющие на тепловой поток, то числа **St** и **Nu** зависят от условий течения слабее, чем $\alpha_{ст}=\rho_\delta V_\delta(c_p)_{ст}\cdot\mathbf{St}$ и $\alpha_{ст}=(\lambda_{ст}/l)\,\mathbf{Nu}$. В общем случае значения **St** и **Nu** в свою очередь являются функциями безразмерных критериев **Re**; **Pr**; **Sc**$=\mu_\delta/(\rho_\delta \overline{D})$, **M**$_\delta = V_\delta/a_\delta$, определяющих условия течения, и зависят от характера пограничного слоя и температуры стенки.

Радиационный тепловой поток. В результате сильного повышения температуры за ударной волной или в пограничном слое увеличивается степень диссоциации и, следовательно, в воздухе возрастает количество атомарного кислорода и азота. Это способствует более интенсивному протеканию реакций с образованием окиси азота и увеличению ее концентрации.

Повышение давления приводит к ускорению рекомбинации согласно реакции $A+A \rightleftarrows A_2$ и вызывает увеличение концентрации окиси азота NO, образующейся в соответствии с уравнением $O_2+N_2 \rightleftarrows 2NO$. Окись азота в отличие от азота и кислорода оптически непрозрачна, т. е. ей свойственна способность поглощать и излучать лучистую энергию. Таким свойством непрозрачности обладает воздух, содержащий даже небольшую долю окиси азота. Поэтому воздух, разогретый до очень высоких температур, становится источником радиационного теплового потока.

Оптические свойства воздуха характеризуются некоторым параметром ε, представляющим собой излучательную способность единицы длины излучающего слоя и имеющим размерность $1/l$. Для излучающего слоя толщиной s_0 безразмерной характеристикой излучательной способности будет величина εs_0, называемая эффективной излучательной способностью газа.

По закону Стефана — Больцмана, излучаемое абсолютно черным телом тепло $q_{\text{рад}}=\sigma T^4$, где σ — постоянная Стефана — Больцмана, или коэффициент излучения абсолютно черного тела [$\sigma=1{,}36\cdot10^{-11}$ *ккал*/(*м*^{2}·*сек*·*град*^{4}) или $\sigma=5{,}6\cdot10^{-8}$ *вт*(*м*^{2}·*град*^{4})]; T — температура излучающего газа. Для учета прозрачности в эту формулу должна быть введена некоторая функция $f(\varepsilon s_0)$, зависящая от эффективной излучательной способности и характеризующая степень черноты газа. Таким образом, зависимость для определения радиационного теплового потока к стенке будет иметь вид

$$q_{\text{рад}} = f(\varepsilon s_0)\,\sigma T^4. \tag{13.1.21}$$

Формула (13.1.21) относится к тому случаю, когда стенка не излучает и ее температура $T=T_{\text{ст}}<3000$ K.

На рис. 13.1.1 приведена кривая, характеризующая изменение функции $f(\varepsilon s_0)$ в зависимости от эффективной излучательной способности воздуха. Эту кривую можно аппроксимировать уравнением

$$f = 1-\exp(-\varepsilon s_0), \tag{13.1.22}$$

которое дает ошибку не более 20%.

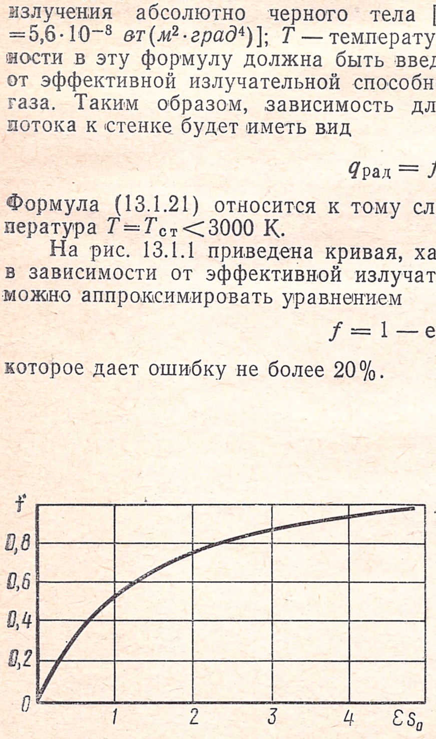


Рис. 13.1.1. Функция, характеризующая степень черноты излучающего газа

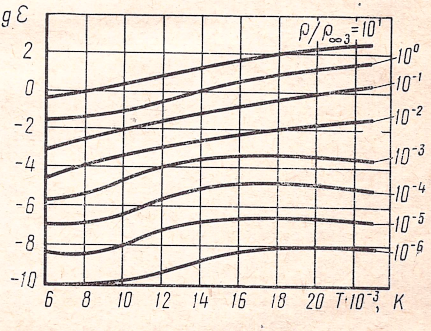


Рис. 13.1.2. Экспериментальные данные об излучательной способности газа (ε, см$^{-1}$)

Из рис. 13.1.2, где приведены результаты экспериментальных исследований, видно, что параметр $\varepsilon (см^{-1})$ зависит от температуры и плотности воздуха. В интервале температур 8000 К$\leqslant T \leqslant$16 000 К семейство кривых хорошо аппроксимируется формулой

$$\varepsilon = 0,138 \left(\rho / \rho_{\infty з}\right)^{1,28} (T/10^4)^{6,54}, \qquad (13.1.23)$$

где $\rho_{\infty з}$ — плотность атмосферного воздуха у поверхности Земли.

Наибольшие радиационные тепловые потоки возникают в точке полного торможения и ее окрестности. Их значения можно вычислять по (13.1.21) при условии, что отход волны s_0 определяется с учетом пространственной формы носка, а плотность и температура равны их соответствующим значениям в точке полного торможения ($\rho = \rho_0'$, $T = T_0'$). Наряду с этим можно пользоваться экспериментальной зависимостью для сферы [9]:

$$q_{рад} = 2,12 \cdot 10^4 R_т \left(\frac{V_\infty}{10^4}\right)^{8,5} \left(\frac{\rho_{\infty н}}{\rho_{\infty з}}\right)^{1,6}, \qquad (13.1.21')$$

где $q_{рад}$ — тепловой поток, *ккал*/(*м*^{2}·*сек*); $R_т$ — радиус, *м*; V_∞ — скорость, *м*/*сек*; $\rho_{\infty н}$, $\rho_{\infty з}$ — плотность атмосферы соответственно на некоторой высоте H и у поверхности Земли. Заменяя здесь радиус $R_т$ соответствующим эквивалентным значением (см. § 9.4), можно с известным приближением вычислить величину $q_{рад}$ в центре плоского торца.

На рис. 13.1.3 показано изменение радиационного теплового потока на траектории при некоторых условиях полета. Можно заметить, что тепловой поток $q_{рад}$ принимает большие значения на малых высотах. При этом его величина соответствует максимуму аэродинамической теплопередачи $q_к$ и составляет примерно одну треть этого максимального значения.

Солнечная и земная радиации

Радиационный поток тепла от Солнца

$$q_с = \bar{q} \beta_с \cos \psi, \qquad (13.1.24)$$

где ψ — угол между направлением солнечных лучей и нормалью к поверхности тела; $\bar{q}$ — облучательная способность Солнца, зависящая в основном от высоты полета и метеорологических условий.

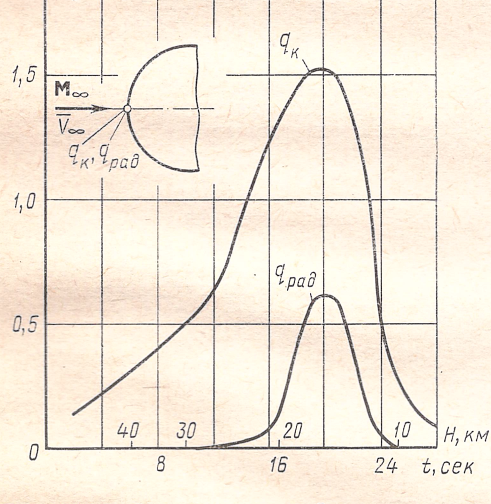


Рис. 13.1.3. Аэродинамический и радиационный тепловые потоки в точке полного торможения:

t — время полета; H — высота

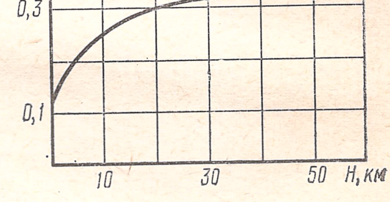


Рис. 13.1.4. Облучательная способность Солнца в зависимости от высоты H атмосферы Земли

Для средних географических условий значения $\bar{q}$ для Солнца в зените и без учета поглощения лучей атмосферой приведены на рис. 13.1.4.

Данные о коэффициенте $\beta_с$, учитывающем поглощательную способность материала, приведены в табл. 13.1.1.

Таблица 13.1.1

Материалы	Вид радиации	
	от Земли ($\beta_з$)	от Солнца ($\beta_с$)
Al	0,04÷0,10	0,10÷0,49
Fe	0,06÷0,74	0,45
Ni	0,04÷0,39	0,40
Сплавы:		
типа дюралюмин	0,04÷0,55	0,53
легированные стали	0,12÷0,62	0,60
Изоляционные материалы:		
плексиглас	0,89	—
стекло	0,85	—
Крашеные поверхности:		
темные	0,80÷0,99	0,97
светлые	0,80÷0,90	0,14÷0,18

Примечание. Данные о коэффициентах $\beta_з$ и $\beta_с$ приведены для интервала температур стенки 200÷600° С.

При полете на малых высотах ($H \approx 10 \div 15$ *км*) облучательная способность $\bar{q}$ уменьшается из-за наличия облачности. Так, при средней облачности действительная величина $\bar{q}$ составляет 0,5÷0,7 от значений, соответствующих данным, приведенным на рис. 13.1.3, а в случае сплошной облачности — 0,1÷0,2. В ночных условиях облучательная способность равна нулю.

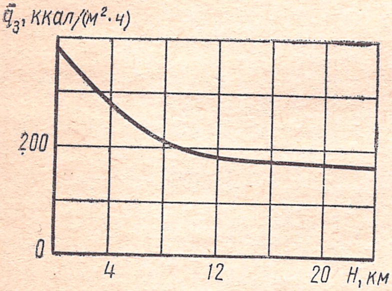


Рис. 13.1.5. Облучательная способность Земли в зависимости от высоты атмосферы

Формула (13.1.24) относится к части поверхности летательного аппарата, обращенной к Солнцу. Между тем теневые участки этой поверхности также получают тепло за счет рассеянного солнечного излучения. Величина этого теплового потока примерно в 3—4 раза меньше.

Удельный тепловой поток от земного излучения весьма мал; его можно рассматривать в виде суммы $q_з = q_{з.с} + q_{з.о}$, где $q_{з.с}$ — собственно радиационный поток Земли, а $q_{з.о}$ — энергия отраженных от земной поверхности и облаков солнечных лучей. Исследования показывают, что для условий полета на высоте 500 *км*

$$q_{з.с} = 0{,}007\,(1 + 2\cos\varphi)\,\beta_з, \tag{13.1.25}$$

где φ — угол между нормалью к поверхности и линией тело — Земля. По имеющимся экспериментальным данным, максимальная величина радиационного потока Земли

$$q_{з.с\,\max} = \bar{q}_з\beta_з, \tag{13.1.26}$$

где $\bar{q}_з$ — облучательная способность Земли.

Значения $\bar{q}_з$ и $\beta_з$ приведены соответственно на рис. 13.1.5 и в табл. 13.1.1.

Данные об удельном тепловом потоке $q_{з.о}$ также являются экспериментальными и получены при условии, что тело расположено на высоте 500 *км* на линии Земля — Солнце. Согласно этим данным,

$$q_{з.о} = 0{,}016\,(1 + 2\cos\varphi)\,\beta_з. \qquad (13.1.27)$$

Лучистый тепловой поток с поверхности стенки

По закону Стефана — Больцмана, тепловой поток, излучаемый с единицы поверхности стенки,

$$q_{из} = \varepsilon\sigma T_{ст}^4, \qquad (13.1.28)$$

где ε — степень черноты поверхности, зависящая от материала, способа обработки поверхности и ее температуры.

Степень черноты показывает, во сколько раз коэффициент излучения данной поверхности меньше коэффициента излучения абсолютно черного тела. Значение ε повышается с увеличением шероховатости поверхности. Если высота бугорков шероховатости превышает в несколько раз длину волны излучения максимальной интенсивности λ, то величину $\varepsilon_ш$ для шероховатой поверхности можно выразить через степень черноты гладкой поверхности ε следующим образом:

$$\varepsilon_ш = \varepsilon\,[1 + 2{,}8\,(1 - \varepsilon)^2], \qquad (13.1.29)$$

причем длина волны λ, *мк*, зависит от температуры и равна

$$\lambda = 2898/T. \qquad (13.1.30)$$

§ 13.2. СВЯЗЬ МЕЖДУ ТРЕНИЕМ И ТЕПЛОПЕРЕДАЧЕЙ

Задача об аэродинамическом теплообмене сводится к определению коэффициента теплоотдачи $\alpha_{ст}$, входящего в (13.1.16) и (13.1.16′), или соответствующих безразмерных критериев **St** или **Nu**. Это определение связано в общем случае с решением системы дифференциальных уравнений пограничного слоя, включающей уравнения движения, энергии, неразрывности и диффузии. В результате этого решения устанавливается связь между параметрами теплопередачи и трения. При некоторых упрощающих предпосылках такая связь имеет форму элементарных соотношений, дающих возможность непосредственного определения $\alpha_{ст}$, **St** или **Nu** по коэффициенту трения в соответствующей точке поверхности.

Чтобы получить эти соотношения, применим уравнение ламинарного движения газа (12.1.8), а также уравнение энергии, преобразованное к виду, который используется в теории пограничного слоя. Вначале, используя общую форму уравнения энергии (3.2.14), напишем его в таком виде, чтобы оно содержало введенные выше числа **Le**, **Sc**, **Pr**. Полученное уравнение энергии удобнее для анализа различных явлений и процессов теплопередачи. Затем это уравнение преобразуем применительно к условиям течения вязкого газа в тонком пристеночном слое и найдем тем самым в упрощенном виде уравнение энергии для пограничного слоя. Имея в виду выражение (1.6.27) для энтальпии смеси, можно найти, что

$$di = \sum_i i_i dc_i + \sum_i c_i di_i,$$

где согласно (1.6.28) $di_i = c_{pi}dT$. Принимая далее во внимание формулу (1.6.25) для средней теплоемкости смеси, находим

$$di = \sum_i i_i dc_i + (c_p)_{\text{ср}} dT.$$

Переходя к градиенту температуры, можно написать

$$\operatorname{grad} T = \frac{1}{(c_p)_{\text{ср}}} \operatorname{grad} i - \frac{1}{(c_p)_{\text{ср}}} \sum_i i_i \operatorname{grad} c_i.$$

Подставив это значение в (3.2.14) и введя для местных значений числа Прандтля $\mathbf{Pr} = \mu (c_p)_{\text{ср}}/\lambda$ и Шмидта $\mathbf{Sc} = \mu/(\rho\overline{D})$, получим уравнение энергии

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dt} + \nu \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{2}{3} (\operatorname{div} \overline{V})^2 + 4\varepsilon_z^2 \right] + \\ + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \left[\frac{\lambda}{(c_p)_{\text{ср}}} \operatorname{grad} i \right] + \sum_i i_i \operatorname{div} \left[\overline{D} \left(1 - \frac{\mathbf{Sc}}{\mathbf{Pr}} \right) \operatorname{grad} c_i \right] + \frac{\varepsilon}{\rho}, \quad (13.2.1)$$

где вместо отношения $\mathbf{Sc}/\mathbf{Pr}$ можно ввести $1/\mathbf{Le}$, т. е. величину, обратную числу Льюиса — Семенова.

Уравнение энергии, записанное в виде (13.2.1) и выраженное через энтальпию, является основным при исследовании динамики диссоциирующих газов. В наиболее общем случае число $\mathbf{Sc} < \mathbf{Pr}$ ($\mathbf{Le} > 1$). Физический смысл этого состоит в том, что процессы диффузии протекают более интенсивно, чем процессы теплопроводности, и, следовательно, химическая энергия неполностью переходит в тепло. В частном случае, когда $\mathbf{Pr} = \mathbf{Sc}$, уравнение (13.2.1) принимает вид

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dt} + \nu \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{2}{3} (\operatorname{div} \overline{V})^2 + 4\varepsilon_z^2 \right] + \\ + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \left[\frac{\lambda}{(c_p)_{\text{ср}}} \operatorname{grad} i \right] + \frac{\varepsilon}{\rho}. \quad (13.2.1')$$

Уравнение (13.2.1′) по форме представляет собой уравнение энергии для потоков, в которых отсутствуют химические реакции. При $\mathbf{Sc} = \mathbf{Pr}$ интенсивность передачи тепла путем теплопроводности и диффузии одинакова. Это соответствует тому, что часть химической энергии на границе пограничного слоя, превышающая химическую энергию при температуре стенки, полностью преобразуется в тепло.

Для дальнейших исследований примем, что излучение не учитывается, т. е. положим в уравнении (13.2.1′) величину $\varepsilon = 0$. В целях преобразования этого уравнения применительно к условиям течения в пограничном слое определим порядок величин его слагаемых [см. (12.1.3), (12.1.4) и др.].

В отличие от уравнения движения в уравнение энергии входят члены, содержащие энтальпию i. Поэтому целесообразно дополнительно рассмотреть вопрос об оценке порядка этих членов. С этой целью воспользуемся формулой для энтальпии торможения в виде

$$i_0 = i + V_x^2/2. \qquad (13.2.2)$$

В частном случае, когда **Pr** $=1$, величина $i_0=\text{const}$. Однако для реальных условий течения эта энтальпия является величиной переменной ввиду наличия термодинамически необратимых процессов, вызванных химическими реакциями и диссоциацией газа в пограничном слое, т. е. $i_0 \neq I_0$ (где I_0 — энтальпия торможения при изэнтропическом течении). Однако порядок этих величин одинаков ($i_0 \sim I_0=\text{const}$). Учитывая это, найдем, что $\partial i/\partial x \sim \partial V_x{}^2/\partial x$, $\partial i/\partial y \sim \sim \partial V_x{}^2/\partial y$, откуда порядок производных $\partial i/\partial x \sim V_\delta{}^2/L$, $\partial i/\partial y \sim V_\delta{}^2/\delta$. Эти данные использованы при определении порядка слагаемого в правой части уравнения (13.2.1′), содержащего энтальпию i. Оценивая порядок величин всех членов в правой части (13.2.1′) [за исключением первого члена $(1/\rho)dp/dt$] и принимая при этом, что порядок числа $\mathbf{Pr}=\mu(c_p)_{\text{ср}}/\lambda \sim 1$, напишем результаты этой оценки непосредственно под каждым слагаемым уравнения, представленного в развернутой форме:

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{dp}{dt} + \frac{\mu}{\rho}\Bigg\{\underbrace{\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2}_{(\mu/\rho)V_\delta^2/L^2} +$$

$$+\underbrace{\frac{2}{3}\left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2 + 2\,\frac{\partial V_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial V_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2\right]}_{(\mu/\rho)V_\delta^2/L^2} +$$

$$+\underbrace{\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)^2}_{(\mu/\rho)V_\delta^2/\delta^2} + \underbrace{2\,\frac{\partial V_x}{\partial y}\cdot\frac{\partial V_y}{\partial x}}_{(\mu/\rho)V_\delta^2/L^2} + \underbrace{\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)^2}_{(\mu/\rho)V_\delta^2\delta^2/L^4}\Bigg\} +$$

$$+\frac{1}{\rho}\Bigg[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\mathbf{Pr}}\cdot\frac{\partial i}{\partial x}\right)}_{(\mu/\rho)V_\delta^2/L^2} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\mathbf{Pr}}\cdot\frac{\partial i}{\partial y}\right)}_{(\mu/\rho)V_\delta^2/\delta^2}\Bigg]. \qquad (13.2.3)$$

Рассматривая правую часть уравнения (13.2.3), можно сделать вывод, что члены $\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)^2$ и $\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\mathbf{Pr}}\cdot\frac{\partial i}{\partial y}\right)$ имеют бо́льший порядок, чем остальные члены. Сохраняя члены с большим порядком, получим уравнение энергии

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{dp}{dt} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\mathbf{Pr}}\cdot\frac{\partial i}{\partial y}\right). \qquad (13.2.4)$$

Заменяя в (13.2.4) согласно (12.1.8)

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp_\delta}{dt} = V_x\,\frac{dp_\delta}{dx} = -\rho V_x\left[V_x\,\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y\,\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\,\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\right],$$

получим

$$\frac{di}{dt}=-\frac{V_x}{2}\cdot\frac{\partial V_x^2}{\partial x}-\frac{V_y}{2}\cdot\frac{\partial V_x^2}{\partial y}+\frac{V_x}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\,\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)+$$
$$+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\mathbf{Pr}}\cdot\frac{\partial i}{\partial y}\right).$$

Первые два члена в правой части уравнения можно представить в виде $-\frac{1}{2}\cdot\frac{dV_x^2}{dt}$, а третий и четвертый как $\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{2}\cdot\frac{\partial V_x^2}{\partial y}\right)$. Учитывая это, можно написать

$$\rho\,\frac{d}{dt}\left(i+\frac{V_x^2}{2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mu}{\mathbf{Pr}}\left(i+\frac{V_x^2}{2}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mu}{2}\left(1-\frac{1}{\mathbf{Pr}}\right)\frac{\partial V_x^2}{\partial y}\right]. \tag{13.2.5}$$

Принимая во внимание выражение (13.2.2) для энтальпии i_0 и раскрывая полную производную в левой части (13.2.5), получим

$$\rho V_x\,\frac{\partial i_0}{\partial x}+\rho V_y\,\frac{\partial i_0}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\mathbf{Pr}}\cdot\frac{\partial i_0}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mu}{2}\left(1-\frac{1}{\mathbf{Pr}}\right)\frac{\partial V_x^2}{\partial y}\right]. \tag{13.2.5'}$$

Рассмотрим течение, характеризующееся величиной $\mathbf{Pr}=1$. Для такого течения уравнение энергии имеет вид

$$\rho V_x\,\frac{\partial i_0}{\partial x}+\rho V_y\,\frac{\partial i_0}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\,\frac{\partial i_0}{\partial y}\right). \tag{13.2.6}$$

Если рассматриваемый поток обтекает плоскую пластинку, для которой $dp_\delta/dx=0$, то уравнение движения в пограничном слое в соответствии с (12.1.8) будет иметь вид

$$\rho V_x\,\frac{\partial V_x}{\partial x}+\rho V_y\,\frac{\partial V_x}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\,\frac{\partial V_x}{\partial y}\right). \tag{13.2.7}$$

Как видно, уравнения энергии (13.2.6) и движения (13.2.7) подобны друг другу. Если перейти к переменным

$$\theta=(i_0-i_{\text{ст}})/(i_{0\delta}-i_{\text{ст}}),\ \overline{V}_x=V_x/V_\delta, \tag{13.2.8}$$

где

$$i_{0\delta}=i_\delta+V_\delta^2/2, \tag{13.2.9}$$

то уравнения (13.2.6) и (13.2.7) станут тождественными, так как θ и $\overline{V}_x$ удовлетворяют одним и тем же граничным условиям: на стенке θ и $\overline{V}_x$ равны нулю, так как $V_x=0$ и $i_0=i_{\text{ст}}$, а на внешней границе пограничного слоя, где $V_x=V_\delta$ и $i_0=i_{0\delta}$, — единице. Следовательно, согласно теореме о единственности решения, должны совпадать функции $\overline{V}_x$ и θ, т. е.

$$(i_0-i_{\text{ст}})/(i_{0\delta}-i_{\text{ст}})=V_x/V_\delta. \tag{13.2.10}$$

Таким образом, принятое выше условие (**Pr**=1) и другие допущения определяют подобие профилей скорости и энтальпии в пограничном слое. Если профиль скорости известен, то можно определить напряжение трения:

$$\tau_{\text{ст}}=\mu_{\text{ст}}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{\text{ст}}=\frac{\mu_{\text{ст}}V_\delta}{i_{0\delta}-i_{\text{ст}}}\left(\frac{\partial i_0}{\partial y}\right)_{\text{ст}}=\frac{\mu_{\text{ст}}V_\delta\,(c_p)_{\text{ст}}}{i_{0\delta}-i_{\text{ст}}}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{\text{ст}}.$$

Умножая числитель и знаменатель правой части уравнения на $\lambda_{\text{ст}}$ и полагая, что $q_{\text{ст}}=q_{\text{к}}=\lambda_{\text{ст}}(\partial T/\partial y)_{\text{ст}}$, найдем

$$\tau_{\text{ст}}=\frac{\mu_{\text{ст}}V_\delta\,(c_p)_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}}(i_{0\delta}-i_{\text{ст}})}\,q_{\text{к}}.$$

Подставив сюда значение $q_{\text{к}}$ из (13.1.17) и заменив $\tau_{\text{ст}}$ на $c_{fx}(\rho_\delta V_\delta^2/2)$, получим

$$c_{fx}\,\frac{\rho_\delta V_\delta^2}{2}=\alpha_{\text{ст}}\frac{\mu_{\text{ст}}V_\delta}{\lambda_{\text{ст}}}\cdot\frac{i_r-i_{\text{ст}}}{i_{0\delta}-i_{\text{ст}}}.$$

Так как **Pr**=1, то коэффициент восстановления $r=1$ и

$$i_r=i_\delta+r\,\frac{V_\delta^2}{2}=i_\delta+\frac{V_\delta^2}{2}=i_{0\delta};\quad \frac{i_r-i_{\text{ст}}}{i_{0\delta}-i_{\text{ст}}}=1.$$

Таким образом, получаем зависимость между коэффициентами теплоотдачи и трения в следующей форме:

$$\alpha_{\text{ст}}=\alpha_x=\frac{c_{fx}}{2}\cdot\frac{\rho_\delta V_\delta\lambda_{\text{ст}}}{\mu_{\text{ст}}}. \qquad (13.2.11)$$

Из выражения (13.2.11) следует формула для местного числа Нуссельта:

$$\mathbf{Nu}_{\text{ст}}=\mathbf{Nu}_x=\alpha_x x/\lambda_{\text{ст}}=(c_{fx}/2)\mathbf{Re}_x, \qquad (13.2.12)$$

где $\mathbf{Re}_x=\rho_\delta V_\delta x/\mu_{\text{ст}}$.

Из (3.1.20) при **Pr**=1 находим

$$\mathbf{St}_{\text{ст}}=\mathbf{St}_x=\mathbf{Nu}_x/\mathbf{Re}_x=c_{fx}/2. \qquad (13.2.13)$$

Установленная связь между параметрами трения и теплопередачи приближенная, так как в действительности числа **Pr** и **Sc** отличаются от единицы. Влияние этих параметров можно учесть, если выражения для критериев Нуссельта и Стантона написать в виде:

$$\mathbf{Nu}_x=(c_{fx}/2)\mathbf{Re}_x f_1(\mathbf{Pr},\ \mathbf{Sc}); \qquad (13.2.14)$$

$$\mathbf{St}_x=(c_{fx}/2)\,f_2(\mathbf{Pr},\ \mathbf{Sc}), \qquad (13.2.15)$$

где f_1 и f_2 — некоторые функции чисел **Pr** и **Sc**. Физически учет влияния этих чисел, отличных по величине от единицы, означает, что принимается во внимание преобразование части химической и кинетической энергий в тепло. Конкретный вид зависимостей f_1, f_2

определяется в результате решения уравнений пограничного слоя при условии, что $\mathbf{Pr} \neq 1$, $\mathbf{Sc} \neq 1$ ($\mathbf{Le} \neq 1$).

Исследования показывают, что если учитывать условие $\mathbf{Le}=1$, то $f_1=\mathbf{Pr}^{1/3}$, а согласно (13.1.20), и $f_2=\mathbf{Pr}^{2/3}$. В соответствии с этим можно написать, в частности, для местного числа Стантона

$$\mathbf{St}_x=(c_{fx}/2)\,\mathbf{Pr}^{-2/3}. \tag{13.2.16}$$

Выражение для числа Нуссельта находят из (13.1.20). От местного критерия Нуссельта или Стантона можно перейти к соответствующим средним величинам по длине пластинки, опустив индекс «x». При этом можно принять, что местное и среднее числа Прандтля одинаковы.

Формула (13.2.16) имеет большое практическое значение и отражает аналогию Рейнольдса, согласно которой критерий теплопередачи зависит в основном от того же параметра, что и коэффициент трения — от числа $\mathbf{Re}_x$. В соответствии с этим величина $f_2=\mathbf{Pr}^{-2/3}$ в (13.2.16) называется фактором аналогии Рейнольдса.

Как показывают исследования, формула (13.2.15) пригодна и для турбулентного пограничного слоя, но с той разницей, что коэффициент трения c_{fx} и параметр f_2 должны вычисляться по соответствующим зависимостям для турбулентного пограничного слоя. В частности,

$$f_2=\left[1+2,135\mathbf{Re}_x^{-0,1}\,(\mathbf{Pr}-1)\right]^{-1}. \tag{13.2.17}$$

При вычислении средней по длине пластинки величины числа Стантона параметр

$$f_2=[1+2,2\,\mathbf{Re}\,(\mathbf{Pr}-1)]^{-1}, \tag{13.2.18}$$

где $\mathbf{Re}=V_\delta\rho_\delta L/\mu_{\text{ст}}$. При этом расчеты показывают, что, как и для ламинарного пограничного слоя, величина f_2 при отсутствии диффузии в турбулентном пограничном слое может быть принята с известным приближением равной $\mathbf{Pr}^{-2/3}$.

Влияние физико-химических превращений на теплопередачу в пограничном слое при высоких температурах может быть учтено путем использования определяющих параметров. В частности, применяя аналогию Рейнольдса, получим в соответствии с (13.2.16) следующее выражение для определяющей величины числа Стантона:

$$\mathbf{St}_x^*=(c_{fx}^*/2)(\mathbf{Pr}^*)^{-2/3}, \tag{13.2.19}$$

где $c_{fx}^*=(c_{fx})_{\text{сж}}$ — коэффициент трения. Для ламинарного пограничного слоя этот коэффициент находят из формулы (12.6.15), а для турбулентного — из зависимости (12.6.22); определяющее число Прандтля вычисляют по определяющим параметрам: $\mathbf{Pr}^*=c_p^*\mu^*/\lambda^*$.

В соответствии с этим тепловой поток к стенке

$$q_x^*=(\alpha_x^*/c_p^*)(i_r-i_{\text{ст}})=\mathbf{St}_x^*\rho_\delta V_\delta\,(i_r-i_{\text{ст}}), \tag{13.2.20}$$

где определяющий коэффициент теплоотдачи

$$\alpha_x^* = c_p^* q_x^* / (i_r - i_{\text{ст}}) = \mathbf{St}_x^* c_p^* \rho_\delta V_\delta. \qquad (13.2.21)$$

Из формулы (13.2.16) или (13.2.19) следует, что безразмерный параметр теплопередачи изменяется вдоль пластинки так же, как местный коэффициент трения. Аналогично этому будет изменяться, как следует из (13.2.20), удельный тепловой поток. Его средняя величина по длине пластинки $q_{\text{ср}}$ определяется, очевидно, как среднее интегральное местных тепловых потоков. Осуществляя расчет по определяющим параметрам [см. (13.2.20)], получим

$$q_{\text{ср}}^* = \frac{1}{L}\int_0^L q_x dx = \rho_\delta V_\delta \int_0^1 \mathbf{St}_x^* (i_r - i_{\text{ст}})\, d\bar{x}, \qquad (13.2.22)$$

где $\bar{x} = x/L$.

Полагая вдоль пластинки $i_{\text{ст}}$ постоянной величиной и заменяя $\mathbf{St}_x^*$ по формуле (13.2.19), найдем

$$q_{\text{ср}}^* = 0{,}5 \rho_\delta V_\delta (\mathbf{Pr}^*)^{-2/3} (i_r - i_{\text{ст}}) \int_0^1 c_{fx}^* d\bar{x}.$$

Интеграл в правой части уравнения определяет средний по длине пластинки коэффициент трения $c_{xf}^* = (c_{xf})_{\text{сж}}$, вычисляемый из формулы (12.6.15) для ламинарного и из выражения (12.6.22) для турбулентного пограничных слоев. Следовательно, средний тепловой поток

$$q_{\text{ср}}^* = (c_{xf}^*/2)(\mathbf{Pr}^*)^{-2/3} \rho_\delta V_\delta (i_r - i_{\text{ст}}). \qquad (13.2.23)$$

Вводя понятие о среднем значении числа Стантона

$$\mathbf{St}_{\text{ср}}^* = (c_{xf}^*/2)(\mathbf{Pr}^*)^{-2/3}, \qquad (13.2.24)$$

получим

$$q_{\text{ср}}^* = \mathbf{St}_{\text{ср}}^* \rho_\delta V_\delta (i_r - i_{\text{ст}}). \qquad (13.2.25)$$

Параметры теплопередачи для пластинки могут быть непосредственно использованы с целью расчета соответствующих параметров для конуса, обтекаемого сверхзвуковым потоком. Этот расчет ведется при помощи формул (12.6.34), (12.6.35), (12.6.52), (12.6.53), связывающих между собой коэффициенты трения (местный и средний) на пластинке и конусе. Умножив левую и правую части этих формул на $(\mathbf{Pr}^*)^{-2/3}$, получим:

для местного коэффициента трения

$$(c_{fx\text{к}}^*/2)(\mathbf{Pr}^*)^{-2/3} = \mathbf{A}\,(c_{fx\,\text{пл}}^*/2)(\mathbf{Pr}^*)^{-2/3};$$

для средней величины этого коэффициента

$$(c_{xf\text{к}}^*/2)(\mathbf{Pr}^*)^{-2/3} = \mathbf{A}\,(c_{xf\,\text{пл}}^*/2)(\mathbf{Pr}^*)^{-2/3},$$

где для ламинарного пограничного слоя коэффициент $\mathbf{A}=\sqrt{3}$; для турбулентного $\mathbf{A}=1{,}17$.

Согласно (13.2.19) и (13.2.24), левые части этих равенств определяют соответственно местное и среднее числа Стантона на конусе, а правые — на пластинке. Таким образом,

$$\mathbf{St}^*_{x\text{к}}=\mathbf{A}\,\mathbf{St}^*_{x\text{пл}}; \qquad (13.2.26)$$

$$\mathbf{St}^*_{\text{ср.к}}=\mathbf{A}\,\mathbf{St}^*_{\text{ср.пл}}. \qquad (13.2.27)$$

В соответствии с формулами (13.2.26) и (13.2.27) расчет числа Стантона на конусе ведется по его соответствующему значению, найденному для пластинки по параметрам пограничного слоя на конической поверхности. Внося в правые части этих формул вместо чисел Стантона их значения $\mathbf{St}^*_x=\mathrm{St}^*_x$, $\mathbf{St}^*_{\text{ср.пл}}=\mathbf{St}^*_{\text{ср}}$, вычисленные соответственно по (13.2.19) и (13.2.24), получим:

$$\mathbf{St}^*_{x\text{к}}=(\mathbf{A}c^*_{fx\,\text{пл}}/2)(\mathbf{Pr}^*)^{-2/3}; \qquad (13.2.28)$$

$$\mathbf{St}^*_{\text{ср.к}}=(\mathbf{A}c^*_{xf\,\text{пл}}/2)(\mathbf{Pr}^*)^{-2/3}. \qquad (13.2.29)$$

Суммарное количество тепла, передаваемое газом стенке в единицу времени для конуса с боковой поверхностью $S_{\text{бок}}=\pi r_{\text{мид}}\cdot x_{\text{к}}$ (где $r_{\text{мид}}$ и $x_{\text{к}}$ — соответственно радиус основания и длина образующей конуса), согласно (13.2.25) и (13.2.28) будет

$$Q_{\text{к}}=q^*_{\text{ср}}\pi r_{\text{мид}}x_{\text{к}}=(\mathbf{A}/2)\,c^*_{xf\,\text{пл}}\,(\mathbf{Pr}^*)^{-2/3}\rho_\delta V_\delta\,(i_r-i_{\text{ст}})\,\pi r_{\text{мид}}x_{\text{к}}. \qquad (13.2.30)$$

Формулы для параметров теплопередачи указывают на прямую зависимость нагрева от трения на обтекаемой поверхности. Напряжение трения, а следовательно, и теплопередача будут значительно больше при турбулентном пограничном слое. Вот почему для уменьшения теплопередачи от разогретого газа к обтекаемой поверхности следует обеспечивать ламинаризацию пограничного слоя, при которой достигается снижение потерь на трение.

§ 13.3. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА В ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Произвольная форма поверхности

Рассмотрим расчет теплопередачи на криволинейной поверхности при ламинарном пограничном слое, в котором может происходить равновесная диссоциация. Если принять в соответствии с этим число $\mathbf{Le}=1$, что с известным приближением оправдано для случая гиперзвуковых течений, то указанный расчет, основанный на применении формулы (13.1.15), сводится к решению системы уравнений для ламинарного пограничного слоя, включающей уравнения неразрывности (2.4.48′), движения (12.1.8) и энергии (13.2.5′):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial(\rho V_x r_0^{\varepsilon})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho V_y r_0^{\varepsilon})}{\partial y}=0;\\
&\rho\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)=-\frac{dp_{\delta}}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial V_x}{\partial y}\right);\\
&\rho\left(V_x\frac{\partial i_0}{\partial x}+V_y\frac{\partial i_0}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\mathbf{Pr}}\cdot\frac{\partial i_0}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mu}{2}\left(1-\frac{1}{\mathbf{Pr}}\right)\frac{\partial V_x^2}{\partial y}\right].
\end{aligned}\right\}\qquad(13.3.1)$$

Здесь уравнение неразрывности отличается от (2.4.48′) тем, что радиальная координата r точки пограничного слоя заменена координатой r_0 точки контура, расположенной в соответствующем сечении пограничного слоя. В этом уравнении значение $\varepsilon=0$ соответствует профилю крыла, а $\varepsilon=1$ — телу вращения. В уравнении энергии, как и прежде, число $\mathbf{Pr}=(c_p)_{\text{ср}}\mu/\lambda$.

Уравнение энергии, входящее в систему (13.3.1), получено из общего уравнения (3.2.14), в котором принято $\mathbf{Sc}=\mathbf{Pr}$ ($\mathbf{Le}=1$). Однако при этом может быть выполнено условие, в соответствии с которым $\operatorname{grad} c_i \neq 1$. Поэтому к системе (13.3.1), казалось бы, необходимо добавить уравнение диффузии (3.2.4), связывающее между собой концентрацию c_i и скорость образования каждого компонента смеси газов. Но при термодинамическом равновесии концентрация каждого компонента однозначно определяется местными значениями давления и температуры, а скорость образования компонентов $(W_{\text{хим}})_i$ достаточно велика, чтобы компенсировать их унос за счет конвекции и диффузии. Поэтому уравнение диффузии (3.2.4) в рассматриваемом случае равновесной теплопередачи будет лишним.

Система уравнений (13.3.1) решается при следующих граничных условиях:

на стенке (при $y=0$)

$$V_x=V_y=0,\ i_0=i_{\text{ст}},\ \rho=\rho_{\text{ст}},\ i=i_{\text{ст}},\ T=T_{\text{ст}};\qquad(13.3.2)$$

на границе слоя (при $y\to\infty$)

$$V_x=V_{\delta},\ V_y=0,\ i_0=i_{0\delta},\ \rho=\rho_{\delta},\ i=i_{\delta},\ T=T_{\delta}.\qquad(13.3.3)$$

Для коэффициентов μ и λ имеют место также функциональные зависимости

$$\mu=\mu(p,\ T),\ \lambda=\lambda(p,\ T).\qquad(13.3.4)$$

Преобразуем уравнения (13.3.1), введя некоторые новые независимые переменные и искомые функции. Следуя Лизу [30], введем переменные, близкие по форме к переменным Дородницына [см. (12.3.2)]:

$$\eta(x,\ y)=\frac{V_{\delta}r_0^{\varepsilon}}{(2\tilde{x})^{1/2}}\int_0^y\rho\,dy,\ \ \tilde{x}(x)=\int_0^x\rho_{\delta}V_{\delta}\mu_{\delta}r_0^{2\varepsilon}dx,\qquad(13.3.5)$$

откуда находим, что

$$\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\rho V_\delta r_0^\varepsilon}{(2\tilde{x})^{1/2}}, \quad \frac{d\tilde{x}}{dx}=\rho_\delta V_\delta \mu_\delta r_0^{2\varepsilon}. \qquad (13.3.6)$$

Для перехода от координат x, y к координатам $\tilde{x}, \eta$ следует воспользоваться известными из курса математического анализа соотношениями:

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\rho V_\delta r_0^\varepsilon}{(2\tilde{x})^{1/2}}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}; \qquad (13.3.7)$$

$$\frac{\partial}{dx}=\frac{\partial}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\cdot\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}+\rho_\delta V_\delta \mu_\delta r_0^{2\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}. \qquad (13.3.8)$$

Для дальнейших преобразований введем функцию тока ψ, которая определяется соотношениями (2.5.1). Заменим в них r на r_0 и перепишем в виде:

$$\partial\psi/\partial y=\rho V_x r_0^\varepsilon, \quad \partial\psi/\partial x=-\rho V_y r_0^\varepsilon. \qquad (13.3.9)$$

Подставив эти значения в уравнение неразрывности системы (13.3.1), можно убедиться в том, что это уравнение превращается в тождество $\partial^2\psi/\partial x\partial y-\partial^2\psi/\partial y\partial x\equiv 0$. Таким образом, с введением функции тока ψ уравнение неразрывности автоматически удовлетворяется.

Рассмотрим, как преобразуются остальные два уравнения системы (13.3.1) при помощи функции тока. Используя (13.3.7), можно написать

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\frac{\rho V_\delta r_0^\varepsilon}{(2\tilde{x})^{1/2}},$$

откуда с учетом первого соотношения (13.3.9) производная

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=(2\tilde{x})^{1/2}\frac{V_x}{V_\delta}. \qquad (13.3.10)$$

Интегрируя, находим функцию тока:

$$\psi=\int_0^\eta(2\tilde{x})^{1/2}\frac{V_x}{V_\delta}\,d\eta.$$

В соответствии с (13.3.5) выражение $(2\tilde{x})^{1/2}$ не зависит от η. Поэтому можно написать, опуская постоянную, что

$$\psi=(2\tilde{x})^{1/2}f(\eta), \qquad (13.3.11)$$

где

$$f(\eta)=\int_0^\eta\frac{V_x}{V_\delta}\,d\eta. \qquad (13.3.12)$$

В соответствии с этим выражением

$$V_x/V_\delta=\partial f/\partial\eta=f'. \qquad (13.3.13)$$

Воспользовавшись соотношениями (13.3.7), (13.3.8), зависимостями (13.3.9) и (13.3.11) для функции тока, а также выражениями (13.3.12) и (13.3.13), преобразуем оператор, стоящий в левой части уравнений движения и энергии системы (13.3.1):

$$\rho V_x \frac{\partial}{\partial x} + \rho V_y \frac{\partial}{\partial y} = r_0^{-\varepsilon}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right) =$$

$$= r_0^{-\varepsilon}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial\tilde{x}} - \frac{\partial\psi}{\partial\tilde{x}}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}\cdot\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x}.$$

Здесь производные $\partial\psi/\partial\eta$ и $\partial\psi/\partial\tilde{x}$ определяются в результате дифференцирования (13.3.11):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial\eta} &= (2\tilde{x})^{1/2}\frac{\partial f}{\partial\eta}, \\ \frac{\partial\psi}{\partial\tilde{x}} &= (2\tilde{x})^{-1/2} f + (2\tilde{x})^{1/2}\frac{\partial f}{\partial\tilde{x}}. \end{aligned}\right\} \qquad (13.3.14)$$

После подстановки этих величин, а также замены производных $\partial\eta/\partial y$ и $\partial\tilde{x}/\partial x$ их значениями из (13.3.6) получим для оператора

$$\rho V_x \frac{\partial}{\partial x} + \rho V_y \frac{\partial}{\partial y} = \rho\rho_\delta V_\delta^2 \mu_\delta r_0^{2\varepsilon}\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial\tilde{x}} - \frac{f}{2\tilde{x}}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta} - \frac{\partial f}{\partial\tilde{x}}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\right). \qquad (13.3.15)$$

В правые части уравнений движения и энергии (13.3.1) входят выражения вида

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad (13.3.16)$$

где $h(x, y)$ — некоторая функция координат x, y. В новых переменных η, $\tilde{x}$ оператор (13.3.16) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(h\frac{\partial}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y},$$

или с учетом значения (13.3.6) для производной $\partial\eta/\partial y$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\rho V_\delta^2 r_0^{2\varepsilon}}{2\tilde{x}}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\rho h\frac{\partial}{\partial\eta}\right). \qquad (13.3.17)$$

Применим операторы (13.3.15) и (13.3.17) для преобразования уравнения движения:

$$\rho\rho_\delta V_\delta^2\mu_\delta r_0^{2\varepsilon}\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial V_x}{\partial\tilde{x}} - \frac{f}{2\tilde{x}}\cdot\frac{\partial V_x}{\partial\eta} - \frac{\partial f}{\partial\tilde{x}}\cdot\frac{\partial V_x}{\partial\eta}\right) =$$

$$= -\frac{dp_\delta}{dx} + \frac{\rho V_\delta^2 r_0^{2\varepsilon}}{2\tilde{x}}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\rho\mu\frac{\partial V_x}{\partial\eta}\right).$$

Здесь производная dp_δ/dx может быть определена по уравнению

$$\frac{dp_\delta}{dx} = -\rho_\delta V_\delta\frac{dV_\delta}{d\tilde{x}}\cdot\frac{d\tilde{x}}{dx},$$

или с учетом значения (13.3.6) для $d\tilde{x}/dx$

$$\frac{dp_\delta}{dx} = -\rho_\delta^2 V_\delta^2 \mu_\delta r_0^{2\varepsilon}\,\frac{dV_\delta}{d\tilde{x}}. \tag{13.3.18}$$

Принимая это во внимание и заменяя согласно (13.3.13)

$$V_x = V_\delta\,(\partial f/\partial\eta), \tag{13.3.13$'$}$$

получим

$$\frac{\partial f}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\left(V_\delta\frac{\partial f}{\partial\eta}\right) - \frac{V_\delta f}{2\tilde{x}}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2} - V_\delta\frac{\partial f}{\partial\tilde{x}}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2} =$$

$$= \frac{\rho_\delta}{\rho}\cdot\frac{dV_\delta}{d\tilde{x}} + \frac{V_\delta}{2\tilde{x}\rho_\delta\mu_\delta}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\rho\mu\,\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\right).$$

Учитывая, что производная

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\left(V_\delta\frac{\partial f}{\partial\eta}\right) = \frac{dV_\delta}{d\tilde{x}}\cdot\frac{\partial f}{\partial\eta} + V_\delta\,\frac{\partial^2 f}{\partial\tilde{x}\partial\eta},$$

получим преобразованное уравнение движения в окончательной форме:

$$2\tilde{x}\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\tilde{x}\partial\eta} - \frac{\partial f}{\partial\tilde{x}}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\right) = f\,\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2} + \frac{2\tilde{x}}{V_\delta}\cdot\frac{dV_\delta}{d\tilde{x}}\left[\frac{\rho_\delta}{\rho} - \left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)^2\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\overline{\rho\mu}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\right), \tag{13.3.19}$$

где

$$\overline{\rho\mu} = \rho\mu/\rho_\delta\mu_\delta. \tag{13.3.20}$$

Теперь при помощи тех же операторов (13.3.15) и (13.3.17), а также выражения (13.3.13′) напишем уравнение энергии

$$\rho\rho_\delta V_\delta^2\mu_\delta r_0^{2\varepsilon}\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial i_0}{\partial\tilde{x}} - \frac{f}{2\tilde{x}}\cdot\frac{\partial i_0}{\partial\eta} - \frac{\partial f}{\partial\tilde{x}}\cdot\frac{\partial i_0}{\partial\eta}\right) =$$

$$= \frac{\rho V_\delta^2 r_0^{2\varepsilon}}{2\tilde{x}}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\rho\mu}{\mathbf{Pr}}\cdot\frac{\partial i_0}{\partial y}\right) + \frac{\rho V_\delta^4 r_0^{2\varepsilon}}{2\tilde{x}}\,\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\rho\mu\left(1 - \frac{1}{\mathbf{Pr}}\right)\frac{\partial f}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\right].$$

Для дальнейших преобразований введем безразмерную зависимую переменную

$$g\,(\eta) = i_0/i_{0\delta}, \tag{13.3.21}$$

определяющую отношение энтальпии торможения в некоторой точке сечения пограничного слоя $i_0 = i_\delta + V_x^2/2$ к ее значению $i_{0\delta} = i_\delta + V_\delta^2/2$ на границе слоя. Тогда, принимая во внимание, что

$$\frac{\partial i_0}{\partial\eta} = i_{0\delta}\,\frac{\partial g}{\partial\eta}, \quad \frac{\partial i_0}{\partial\tilde{x}} = \frac{\partial\,(g i_{0\delta})}{\partial\tilde{x}} = i_{0\delta}\,\frac{\partial g}{\partial\tilde{x}} + g\,\frac{\partial i_{0\delta}}{\partial\tilde{x}},$$

получим

$$2\tilde{x}\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial g}{\partial\tilde{x}} - \frac{\partial f}{\partial\tilde{x}}\cdot\frac{\partial g}{\partial\eta}\right) = f\,\frac{\partial g}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\overline{\rho\mu}}{\mathbf{Pr}}\cdot\frac{\partial g}{\partial\eta}\right) +$$

$$+ \frac{V_\delta^2}{i_{0\delta}}\,\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\overline{\rho\mu}\left(1 - \frac{1}{\mathbf{Pr}}\right)\frac{\partial f}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\right] - \frac{2\tilde{x}g}{i_{0\delta}}\cdot\frac{\partial i_{0\delta}}{\partial\tilde{x}}\cdot\frac{\partial f}{\partial\eta}. \tag{13.3.22}$$

Функции $f(\eta)$ и $g(\eta)$, являющиеся решениями системы уравнений (13.3.19), (13.3.22), должны удовлетворять следующим граничным условиям:

на стенке при $\eta=0$ $(y=0)$

$$f(0) = (\partial f/\partial \eta)_{\eta=0} = 0, \ g(0) = g_{\text{ст}}; \tag{13.3.23}$$

на внешней границе слоя при $\eta \to \infty$ $(y \to \infty)$

$$f(\infty) = 0, \ (\partial f/\partial \eta)_{\eta\to\infty} = 1, \ g(\infty) = 1, \ (\partial g/\partial \eta)_{\eta\to\infty} = 0. \tag{13.3.24}$$

Приведенная система уравнений (13.3.19) и (13.3.22) включает, как видно, сложные нелинейные уравнения в частных производных. Хотя в таком виде они несколько проще, чем исходные уравнения (13.3.1), тем не менее для их решения необходимо преодолеть большие трудности. Однако в записанной форме система уравнений весьма удобна, так как она дает возможность отыскать большой класс задач, представляющих значительный практический интерес, для которых при определенных предпосылках эта система может быть сведена к системе так называемых «подобных» обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решения такой системы, называемые автомодельными, обладают тем свойством, что искомые функции f и g будут зависеть лишь от одной переменной η. Это свойство решения позволяет сразу упростить уравнения (13.3.19) и (13.3.22), так как их левые части обращаются в нуль вследствие того, что $dg/d\tilde{x} = df/d\tilde{x} = 0$. В результате упрощения уравнения принимают вид:

$$ff'' + \frac{2\tilde{x}}{V_\delta} \cdot \frac{dV_\delta}{d\tilde{x}} \left(\frac{\rho_\delta}{\rho} - f'^2 \right) + (\overline{\rho\mu} f'')' = 0; \tag{13.3.25}$$

$$fg' + \left(\frac{\overline{\rho\mu}}{\mathbf{Pr}} g' \right)' + \frac{V_\delta^2}{i_{0\delta}} \left[\overline{\rho\mu} \left(1 - \frac{1}{\mathbf{Pr}} \right) f' f'' \right]' - \frac{2\tilde{x} g}{i_{0\delta}} \cdot \frac{di_{0\delta}}{d\tilde{x}} f' = 0, \tag{13.3.26}$$

где штрихи означают дифференцирование по переменному η. Эта система имеет автомодельные решения, если выполняются следующие условия:

$$\text{а)} \ \frac{\tilde{x}}{V_\delta} \cdot \frac{dV_\delta}{d\tilde{x}} = \text{const}, \quad \frac{\tilde{x}}{i_{0\delta}} \cdot \frac{di_{0\delta}}{d\tilde{x}} = \text{const}, \quad \frac{V_\delta^2}{i_{0\delta}} = \text{const};$$

б) отношение ρ_δ/ρ, число **Pr** и величина $\overline{\rho\mu}$ являются функциями η или постоянны;

в) функция g на стенке всюду одинакова, т. е. $g(0) = g_{\text{ст}} = \text{const}$, что соответствует постоянной температуре поверхности.

За исключением частного случая (равномерный внешний поток около пластинки, клина, конуса, обтекание которых сопровождается образованием присоединенной ударной волны), все эти условия автомодельности никогда одновременно не удотвлетворяются, даже если сохраняется постоянной температура поверхности. Отношение плотностей ρ_δ/ρ, число Прандтля и величина $\overline{\rho\mu} = \rho\mu/(\rho_\delta \mu_\delta)$ являются функциями не только отношения энтальпий i/i_δ, но также самой энтальпии i_δ и давления p_δ, поскольку они влияют на диссоциацию газа. Правда, можно указать еще на один частный случай обтекания, для которого решение будет автомодельным: обтекание малого участка затупленной поверхности вблизи точки полного торможения, где энтальпия i_δ и давление p_δ почти не изменяются.

Можно ли получить автомодельное решение, которое распространялось бы на бóльшую часть криволинейной поверхности? Такое решение может быть получено в следующих двух случаях, представляющих практический интерес: 1) при слабом изменении параметров внешнего потока; 2) при сильном охлаждении обтекаемой поверхности, т. е. когда $g_{\text{ст}} = i_{\text{ст}}/i_{0\delta} \ll 1$.

В первом случае предполагаются постоянными вдоль всей поверхности градиент скорости

$$\beta=\frac{2\tilde{x}}{V_\delta}\cdot\frac{dV_\delta}{d\tilde{x}}=\frac{2d\,\ln V_\delta}{d\,\ln\tilde{x}}\tag{13.3.27}$$

и значение $V_\delta^2/i_{0\delta}$. Одновременно принимается $di_{0\delta}/d\tilde{x}=0$, что соответствует условию сохранения полной энергии во внешнем потоке $(i_{0\delta}=i_\delta+V_\delta^2/2=\text{const})$. Кроме того, считаются постоянными $\overline{\rho\mu}$ и число **Pr**, а отношение плотностей $\rho_\delta/\rho=T/T_\delta=i/i_\delta$ рассматривается только как функция η.

Второй случай характеризуется тем, что температура стенки очень низка, т. е. $T_{\text{ст}}/T_\delta\ll 1$ и, следовательно, $\rho_{\text{ст}}/\rho_\delta\gg 1$. При этом плотность у стенки повышается при снижении температуры стенки не только за счет отвода тепла (с использованием для этой цели специальных средств охлаждения), но и вследствие увеличения степени диссоциации при гиперзвуковом обтекании.

Так как продольный градиент давления зависит от плотности ρ_δ на внешней границе $(dp_\delta/dx=-\rho_\delta V_\delta dV_\delta/dx)$ и является постоянным для данного сечения слоя, то при $\rho_{\text{ст}}\gg\rho_\delta$ профиль скорости у стенки значительно менее чувствителен к градиенту давления, чем в случае малой температурной разности поперек пограничного слоя. Это объясняется меньшей податливостью сильно уплотненного газа к изменению характера течения при воздействии перепада давления. Поэтому оказалось возможным пренебречь в уравнении (13.3.25) членом, в который входит градиент давления β (13.3.27), и написать это уравнение в виде

$$ff''+(\overline{\rho\mu}f'')'=0.\tag{13.3.28}$$

Из сопоставления уравнений (13.3.25) и (13.3.26) следует, что градиент скорости еще в меньшей степени влияет на распределение энтальпий торможения. Действительно, рассматривая (13.3.25), можно установить, что функция f, определяемая из этого уравнения, зависит (хотя и в слабой форме) от градиента β, который присутствует в уравнении в явной форме. В то же время функция $g=i_0/i_{0\delta}$ находится из уравнения (13.3.26), где величина β в явном виде отсутствует. При этом зависимость g от градиента проявляется через слабую зависимость функции f от β. Таким образом, система уравнений (13.3.25) и (13.3.26), упрощенная в соответствии с условием $\rho_{\text{ст}}/\rho_\delta\gg 1$, более предпочтительна для расчета параметров теплопередачи, определяемых производной g', чем для вычисления параметров трения (функции f').

Уравнение (13.3.26) можно упростить, имея в виду, что полная энтальпия свободного потока постоянна $(di_{0\delta}/d\tilde{x}=0)$. Величина $V_\delta^2/i_{0\delta}$ на затупленных телах меняется от нуля в точке торможения, где $V_\delta=0$, до значения $V_\delta^2/\left(i_\delta+V_\delta^2/2\right)\approx 2$ (на участках обтекания, где скорости V_δ таковы, что $i_\delta\ll V_\delta/2$). Принимая это во внимание и учитывая, что $\mathbf{Pr}\approx 0{,}7\div 1$, придем к заключению, что третий член в (13.3.26) численно мал.

Отбрасывая третий и четвертый члены в этом уравнении, получим

$$fg'+\left(\frac{\overline{\rho\mu}}{\mathbf{Pr}}g'\right)'=0.\tag{13.3.29}$$

Функцию $\overline{\rho\mu}$ можно оценить при помощи уравнений состояния $p=R_0\rho T/\mu_{\text{ср}}$ и $p=p_\delta=R_0\rho_\delta T_\delta/(\mu_{\text{ср}})_\delta$ (где R_0 — универсальная газовая постоянная):

$$\overline{\rho\mu}=\frac{\rho\mu}{\rho_\delta\mu_\delta}=\frac{T_\delta}{T}\cdot\frac{\mu_{\text{ср}}}{(\mu_{\text{ср}})_\delta}\left(\frac{T}{T_\delta}\right)^n=\left(\frac{T_\delta}{T}\right)^{1-n}\frac{\mu_{\text{ср}}}{(\mu_{\text{ср}})_\delta}.$$

Заменим здесь T и $\mu_{\text{ср}}$ их определяющими значениями T^* и $\mu^*_{\text{ср}}$:

$$\overline{\rho\mu} = \left(\frac{T_\delta}{T^*}\right)^{1-n} \frac{\mu^*_{\text{ср}}}{(\mu_{\text{ср}})_\delta}. \qquad (13.3.30)$$

Из (12.5.32) и (12.5.31) следует, что

$$T^* = 0{,}5\,(T_{\text{ст}} + T_\delta) + 0{,}11\,(k^* - 1)\,r^*\,\mathrm{M}_\delta^2 T_\delta.$$

Для пограничного слоя в окрестности точки полного торможения, где $\mathrm{M}_\delta = 0$, определяющая температура $T^* = 0{,}5(T_{\text{ст}} + T_\delta)$.

Для оценки T^* в каком-либо другом сечении слоя на затупленной поверхности, обтекаемой сильно разогретым газом, зададимся, в частности, значениями

$$k^* = 1{,}3,\ \mathrm{M}_\delta = 2,\ r^* = \sqrt{0{,}71} \approx 0{,}84:$$

$$T^* = 0{,}5\,(T_{\text{ст}} + T_\delta) + 0{,}11\,(1{,}3 - 1)\,0{,}84 \cdot 4T_\delta = 0{,}5T_{\text{ст}} + 0{,}6T_\delta. \qquad (13.3.31)$$

Таким образом, для рассматриваемого слоя определяющая температура приблизительно такая же, что и в окрестности точки полного торможения.

Внося значение T^* из (13.3.31) в (13.3.30), получим

$$\overline{\rho\mu} = \frac{\mu^*_{\text{ср}}}{(\mu_{\text{ср}})_\delta}\left[\frac{2}{T_{\text{ст}}/T_\delta + 1{,}2}\right]^{1-n}.$$

Из этого выражения следует, что при $T_{\text{ст}}/T_\delta \ll 1$ и $n \approx 0{,}75 \div 0{,}8$ величина $\overline{\rho\mu}$ близка к единице.

Теперь рассмотрим зависимость теплового потока от величины $\overline{\rho\mu}$. Применяя закон Фурье, а также используя выражение (13.3.6) для производной $\partial\eta/\partial y$, найдем

$$q_x = \frac{\lambda_{\text{ст}}}{(c_p)_{\text{ст}}}\left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_{\text{ст}} = \frac{\lambda_{\text{ст}}}{(c_p)_{\text{ст}}}\left(\frac{\partial i_0}{\partial \eta}\right)_{\text{ст}}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_{\text{ст}} = \frac{\lambda_{\text{ст}} g'(0)\,\rho_{\text{ст}} V_\delta r_0^\varepsilon i_{0\delta}}{(c_p)_{\text{ст}}(2\tilde{x})^{1/2}}, \qquad (13.3.32)$$

где в соответствии с (13.3.5)

$$(2\tilde{x})^{1/2} = \left[2\int_0^x \rho_\delta \mu_\delta V_\delta r_0^{2\varepsilon} dx\right]^{1/2} = \left[2\int_0^x \frac{\rho_{\text{ст}}\mu_{\text{ст}}}{(\overline{\rho\mu})_{\text{ст}}} V_\delta r_0^{2\varepsilon} dx\right]^{1/2}. \qquad (13.3.33)$$

Как видно, в выражение (13.3.33), определяющее величину удельного теплового потока, значение $\overline{\rho\mu} = \overline{(\rho\mu)}_{\text{ст}}$ входит в степени $^1/_2$, что уменьшает общую погрешность, вносимую приближенным выбором этого значения. Поэтому в расчетах достаточно принять $\overline{\rho\mu} = 1$, т. е.

$$\rho\mu \approx \rho_\delta \mu_\delta \approx \rho_{\text{ст}}\mu_{\text{ст}}. \qquad (13.3.34)$$

Таким образом, получаем систему уравнений пограничного слоя:

$$ff'' + f''' = 0; \qquad (13.3.35)$$

$$\mathrm{Pr}\, fg' + g'' = 0. \qquad (13.3.36)$$

Эти уравнения отражают местное подобие, которое следует понимать в том смысле, что в случае $\mathrm{Pr} = \mathrm{const}$ безразмерные скорость V_x/V_δ и энтальпия $i_0/i_{0\delta}$ одинаковы в тех точках различных потоков, где одинаков параметр η, являющийся параметром подобия.

Интегрируя систему обыкновенных дифференциальных уравнений (13.3.35) и (13.3.36) при указанных ранее граничных условиях, можно найти автомодельные решения для функций $f(\eta)$ и $g(\eta)$, а также, в частности, для производной $g'(\eta)$. Интегрируя (13.3.36) дважды, получаем

$$g(\eta) - g(0) = g'(0) \int_0^\eta e^{-\int_0^\eta \mathbf{Pr}\, f d\eta} d\eta. \qquad (13.3.37)$$

Численные расчеты показали, что для $\eta \to \infty$ величина интеграла равна приблизительно $(0{,}5\,\mathbf{Pr}^{1/3})^{-1}$. Поэтому, принимая во внимание, что $g(\eta) = i_0/i_{0\delta} \to 1$ при $\eta \to 0$, найдем

$$g'(0) = \frac{1}{i_{0\delta}} \left(\frac{\partial i_0}{\partial \eta} \right)_{\text{ст}} = \frac{1}{i_{0\delta}} \left(\frac{\partial i}{\partial \eta} \right)_{\text{ст}} = 0{,}5\mathbf{Pr}^{1/3} [1 - g(0)], \qquad (13.3.38)$$

где $g(0) = g_{\text{ст}} = i_{\text{ст}}/i_{0\delta}$; число $\mathbf{Pr} = (c_p)_{\text{ст}} \mu_{\text{ст}}/\lambda_{\text{ст}}$.

Внося полученное значение для $g'(0)$ в (13.3.32), а также учитывая, что $g(0) = g_{\text{ст}} = i_{\text{ст}}/i_{0\delta}$, получим

$$q_x = 0{,}5 \frac{\lambda_{\text{ст}} \rho_{\text{ст}} V_\delta r_0^\varepsilon \mathbf{Pr}^{1/3}}{(c_p)_{\text{ст}} (2\tilde{x})^{1/2}} (i_{0\delta} - i_{\text{ст}}).$$

Подставляя значение $\lambda_{\text{ст}}/(c_p)_{\text{ст}} = \mu_{\text{ст}}/\mathbf{Pr}$ и заменяя $\rho_{\text{ст}} \mu_{\text{ст}}$ на $\rho_\varepsilon \mu_\delta$, а $i_{0\delta}$ — на энтальпию восстановления i_r [имея в виду применение этой энтальпии в уравнении (13.1.15) для теплового потока], найдем

$$q_x = 0{,}5\mathbf{Pr}^{-2/3} \frac{\rho_\delta V_\delta r_0^\varepsilon}{(2\tilde{x})^{1/2}} (i_r - i_{\text{ст}}). \qquad (13.3.39)$$

В такой форме это уравнение позволяет, как показали исследования, определить с известным приближением теплопередачу в том случае, когда охлаждение не обеспечивает достаточно низкой температуры стенки.

В (13.3.39) удобно перейти, используя уравнение состояния, к безразмерному параметру

$$\frac{\rho_\delta \mu_\delta}{\rho_0' \mu_0'} = \frac{p_\delta}{p_0'} \cdot \frac{\mu_\delta}{\mu_0'} \cdot \frac{(\mu_{\text{ср}})_\delta}{(\mu_{\text{ср}})_0} \cdot \frac{T_0'}{T_\delta}. \qquad (13.3.40)$$

Вводя обозначения

$$\omega_\delta = \mu_\delta (\mu_{\text{ср}})_\delta / T_\delta, \quad \omega_0' = \mu_0' (\mu_{\text{ср}})_0 / T_0', \qquad (13.3.41)$$

напишем этот безразмерный параметр в виде

$$\frac{\rho_\delta \mu_\delta}{\rho_0' \mu_0'} = \frac{p_\delta}{p_0'} \cdot \frac{\omega_\delta}{\omega_0'}. \qquad (13.3.42)$$

Здесь параметры p_0', ρ_0', μ_0', $(\mu_{\text{ср}})_0$ [см. (13.3.40)] относятся к внешней границе пограничного слоя у точки полного торможения затупленной поверхности. Внося значение ρ_δ из (13.3.42) в (13.3.39) и принимая во внимание зависимость (13.3.5), найдем

$$q_x=0{,}5\mathbf{Pr}^{-2/3}\sqrt{\rho_0'\mu_0'V_\infty}\,F(x)(i_r-i_{\text{ст}}), \tag{13.3.43}$$

где функция

$$F(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{p_\delta}{p_0'}\cdot\frac{\omega_\delta}{\omega_0'}\frac{V_\delta}{V_\infty}r_0^\varepsilon\left(\int\limits_0^x\frac{p_\delta}{p_0'}\frac{V_\delta}{V_\infty}\frac{\omega_\delta}{\omega_0'}r_0^{2\varepsilon}dx\right)^{-1/2}. \tag{13.3.44}$$

Рассмотрим изменение величины ω_δ/ω_0' в соответствии с (13.3.40) равной

$$\frac{\omega_\delta}{\omega_0'}=\frac{\mu_\delta}{\mu_0'}\cdot\frac{(\mu_{\text{ср}})_\delta}{(\mu_{\text{ср}})_0}\cdot\frac{T_0'}{T_\delta}=\left(\frac{T_0'}{T_\delta}\right)^{1-n}\frac{(\mu_{\text{ср}})_\delta}{(\mu_{\text{ср}})_0}.$$

Это отношение меняется от единицы в точке торможения, где $T_0'=T_\delta$, до значения в некоторой точке поверхности

$$\frac{\omega_\delta}{\omega_0'}\approx\left[T_0'\left(1+r^*\frac{k^*-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right)/T_0'\right]^{1-n}\frac{(\mu_{\text{ср}})_\delta}{(\mu_{\text{ср}})_0}.$$

При сильном разогреве газа за ударной волной числа $\mathbf{M}_\delta$ во внешнем потоке невелики. Следовательно, температура T_δ, как следует из выражения $T_\delta=T_0'\left(1+r^*\frac{k^*-1}{2}\mathbf{M}_\delta^2\right)^{-1}$, мало отличается от температуры T_0' в точке полного торможения. Например, для $\mathbf{M}_\delta=2$

$$T_\delta=T_0'\left(1+r^*\frac{k^*-1}{2}4\right)^{-1}.$$

Приняв ориентировочно $r^*=0{,}84$ и $k^*=1{,}3$, найдем $T_\delta=T_0'/1{,}5$. В соответствии с этим

$$\frac{\omega_\delta}{\omega_0'}=(1{,}5)^{1-n}\frac{(\mu_{\text{ср}})_\delta}{(\mu_{\text{ср}})_0}.$$

При $n=0{,}75\div0{,}8$ эта величина примерно на 10% больше единицы.

Если учесть, что отношение ω_δ/ω_0' входит в выражение (13.3.44), определяющее теплопередачу, примерно в степени $^1/_2$, то погрешность в результате замены $\omega_\delta/\omega_0'=1$ будет составлять всего несколько процентов. В соответствии с этим функцию (13.3.44) напишем в виде

$$F(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{p_\delta}{p_0'}\frac{V_\delta}{V_\infty}r_0^\varepsilon\left(\int\limits_0^x\frac{p_\delta}{p_0'}\cdot\frac{V_\delta}{V_\infty}r_0^{2\varepsilon}dx\right)^{-1/2}. \tag{13.3.44'}$$

Таким образом, для определения удельного теплового потока в какой-либо точке поверхности заданной формы необходимо знать распределение скорости и давления на всем ее участке между точкой полного торможения и рассматриваемой точкой. В частности, для расчета теплопередачи в точках поверхности вблизи точки торможения можно принять

$$p_\delta / p_0' \approx 1, \quad r_0 \approx x, \tag{13.3.45}$$

а также считать согласно уравнению (9.4.74) при условии замены в нем V_x на V_δ

$$V_\delta = \tilde{\lambda} x, \tag{13.3.46}$$

где градиент скорости $\tilde{\lambda}$ находится при помощи одного из выражений: (9.4.72) или (9.4.78). С учетом (13.3.45) и (13.3.46) функция

$$F = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\tilde{\lambda} x}{V_\infty} x^\varepsilon \left(\int_0^x \frac{\tilde{\lambda} x}{V_\infty} x^{2\varepsilon} dx \right)^{-1/2}.$$

После интегрирования

$$F = F_0 = \sqrt{(\tilde{\lambda}/V_\infty)(\varepsilon + 1)}. \tag{13.3.47}$$

Внося это в (13.3.43) и вводя обозначение $q_x = q_0$ для теплового потока в точке полного торможения, найдем

$$q_0 = 0{,}5\,\mathbf{Pr}^{-2/3} \sqrt{\rho_0' \mu_0' \tilde{\lambda} (\varepsilon + 1)} (i_r - i_{\text{ст}}). \tag{13.3.48}$$

В этой формуле в энтальпию включено ускорение силы тяжести $g = 9{,}81$ *м/сек*^{2}, так что ее размерность будет *ккал·м/(кГ·сек*^{2}*)* [4,19·10^3 *дж·м/(кг·сек*^{2}*)*]. В тех случаях, когда вычисляемая энтальпия имеет размерность *м*^{2}*/сек*^{2}, это ее значение при подстановке в (13.3.48) необходимо разделить на механический эквивалент тепла $\mathbf{A} = 427$ *кГм/ккал* (4,19 *дж/ккал*).

Величину теплопередачи q_x в произвольной точке поверхности удобно оценить при помощи безразмерного параметра, определяемого из (13.3.43) и (13.3.48) в виде

$$q_x / q_0 = \sqrt{V_\infty / [\tilde{\lambda} (\varepsilon + 1)]}\, F(x). \tag{13.3.49}$$

Таким образом, тепловой поток в произвольной точке криволинейной поверхности зависит непосредственно от его величины в точке полного торможения. Определение значения q_0 — весьма важная задача и потому, что такое значение соответствует наиболее теплонапряженному месту обтекаемой поверхности. Характер изменения удельного теплового потока на траектории показан на рис. 13.1.3 ($q_c = q_к$). Можно заметить, что максимальное его значение достигается на относительно небольшой высоте ($H \approx 15$—16 *км*).

Обработка результатов численных расчетов, а также экспериментальных данных при очень больших сверхзвуковых скоростях позволила получить приближенную формулу для удельного теплового потока [*ккал*/(*м*^{2}·*сек*)] в точке полного торможения [9]:

$$q_0=(31\,500/\sqrt{R_\text{т}})\sqrt{\rho_{\infty\text{н}}/\rho_{\infty\text{з}}}(V_\infty/V_\text{с})^{3,25}(1-i_\text{ст}/i_r), \quad (13.3.48')$$

где $V_\text{с}=7{,}93$ *м*/*сек* — первая космическая скорость.

Энтальпия восстановления может быть принята равной энтальпии торможения. Как видно из приведенной зависимости, теплопередача изменяется в обратной зависимости от радиуса сферической поверхности ($q_0\sim 1/\sqrt{R_\text{т}}$, где $R_\text{т}$ — измеряется в метрах). В соответствии с этим приток тепла в точке полного торможения можно уменьшить за счет увеличения этого радиуса. Наименьшее значение q_0 достигается в центре плоского торца. В этой точке невелик местный градиент скорости $\widetilde{\lambda}$, величина которого определяет удельный тепловой поток. Согласно экспериментальным данным для плоского торца

$$q_{0\text{т}}=(0{,}55\pm 0{,}05)\,q_{0\,\text{сф}}. \quad (13.3.48'')$$

Значение $q_{0\text{т}}$ можно также найти приближенно из (13.3.48′) по величине эквивалентного радиуса $R_{\text{т}}^{\text{э}}$ (см. § 9.4).

Полусфера

В качестве иллюстрации рассмотрим применение (13.3.49) для вычисления теплового потока на полусферической поверхности. Принимая в формуле (13.3.44)

$$\varepsilon=1,\ dx=R_\text{т}d\varphi,\ r_0=R_\text{т}\sin\varphi, \quad (13.3.50)$$

а также учитывая, что в соответствии с (9.4.74′) и (9.4.76) на большей части сферического носка

$$V_\delta=\widetilde{\lambda}R_\text{т}\varphi, \quad (13.3.51)$$

$$\frac{p_\delta}{p_0'}=\cos^2\varphi+\frac{p_\infty}{p_0'}\sin^2\varphi, \quad (13.3.52)$$

найдем

$$F(\varphi)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\left(\cos^2\varphi+\frac{p_\infty}{p_0'}\sin^2\varphi\right)\widetilde{\lambda}R_\text{т}^2\varphi\sin\varphi}{\left[\int\limits_0^\varphi\left(\cos^2\varphi+\frac{p_\infty}{p_0'}\sin^2\varphi\right)\widetilde{\lambda}R_\text{т}^4V_\infty\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi\right]^{1/2}}.$$

Подставляя это выражение в формулу (13.3.49), в которой принимаем $\varepsilon=1$, получим

$$\frac{q_x}{q_0}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\varphi\sin\varphi\left(\cos^2\varphi+\frac{p_\infty}{p_0'}\sin^2\varphi\right)}{\left[\int\limits_0^\varphi\left(\cos^2\varphi+\frac{p_\infty}{p_0'}\sin^2\varphi\right)\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi\right]^{1/2}}.$$

Обозначив

$$D(\varphi)=16\int\limits_0^{\varphi}\left(\cos^2\varphi+\frac{p_\infty}{p_0'}\sin^2\varphi\right)\varphi\sin^2\varphi d\varphi, \qquad (13.3.53)$$

получим

$$\frac{q_x}{q_0}=2\varphi\sin\varphi\left(\cos^2\varphi+\frac{p_\infty}{p_0'}\sin^2\varphi\right)[D(\varphi)]^{-1/2}. \qquad (13.3.54)$$

Напомним, что по формуле (13.3.54), как и по другим аналогичным зависимостям, распределение тепловых потоков следует рассчитывать для условий обтекания с достаточно большими сверхзвуковыми скоростями. При этих условиях должно быть выполнено неравенство $p_\infty/p_0'<0{,}03\div0{,}04$. Приблизительно такие же результаты получают, если воспользоваться эмпирической зависимостью

$$q_x/q_0=0{,}2\,(1+4\cos^2\varphi). \qquad (13.3.54')$$

Характер изменения величины q_x/q_0 показан на рис. 13.3.1. Данные на этом рисунке получены при условии, что в каждой точке сферической поверхности температура стенки постоянна и достаточно низка ($T_{\text{ст}}/T_\delta\ll1$). Эти данные соответствуют теоретическим и экспериментальным результатам, согласно которым теплопередача достигает максимума в точке полного торможения и монотонно уменьшается на удаленных участках полусферы вследствие снижения давления и плотности.

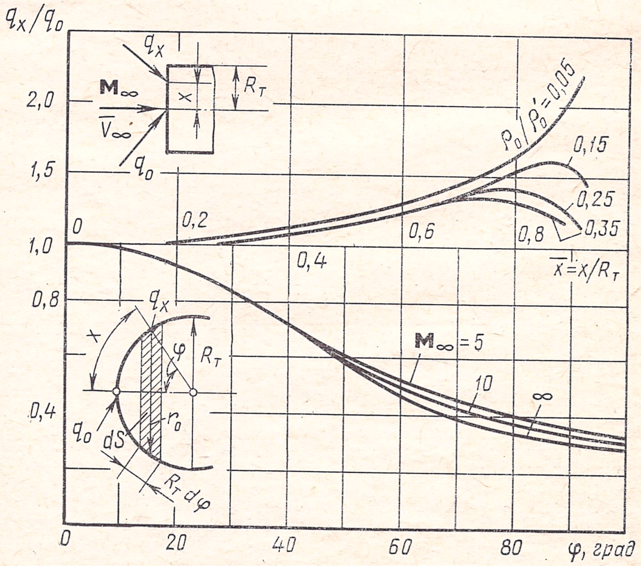


Рис. 13.3.1. Изменение отношения удельных тепловых потоков для сферы и плоского торца (ламинарный пограничный слой)

По известному распределению удельных тепловых потоков можно найти их суммарное значение для части или полной поверхности полусферы (рис. 13.3.1):

$$Q=\int\limits_{(S)} q_x dS = 2\pi R_т^2 q_0 \int\limits_0^{\varphi} (q_x/q_0)\sin\varphi d\varphi.$$

Для части поверхности угол $\varphi<\pi/2$, а для всей полусферы следует принять $\varphi=\pi/2$. Внося под интеграл значение q_x/q_0 из (13.3.54′), можно получить простое соотношение для расчета суммарной теплопередачи на сферической поверхности. Для $\varphi\neq\pi/2$ его величина $Q=Q_0\bar{q}$, где $Q_0=2\pi R_т{}^2 q_0$ — тепловой поток, рассчитанный для полусферы по удельному тепловому потоку в точке полного торможения; коэффициент $\bar{q}=0{,}2\int\limits_0^{\varphi}(1+4\cos^2\varphi)\cdot\sin\varphi d\varphi$. Этот коэффициент изменяется в пределах $0\leqslant\bar{q}<1$.

Затупленный конус

Рассмотрим расчет теплового потока на поверхности усеченного конуса со сферическим носком (рис. 13.3.2). Примем, что на конической поверхности «невязкие» параметры газа постоянны и равны соответствующим значениям в конце носка сферической формы. В частности, скорость

$$V_\delta=\lambda\tilde{R}_т\varphi_к=\lambda\tilde{R}_т(\pi/2-\beta_к), \qquad (13.3.55)$$

где $\beta_к$ — угол наклона образующей конуса.

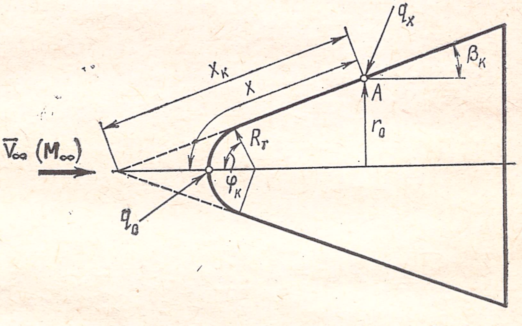


Рис. 13.3.2. Конус с затупленным сферическим носком

Отношение давлений

$$\frac{p_\delta}{p_0'}=\cos^2\varphi_к+\frac{p_\infty}{p_0'}\sin^2\varphi_к=\sin^2\beta_к+\frac{p_\infty}{p_0'}\cos^2\beta_к. \qquad (13.3.56)$$

Для одного из геометрических параметров, а именно радиальной координаты произвольной точки A поверхности конуса (рис. 13.3.2), можно написать

$$r_0=x_к\cos\varphi_к=x_к\sin\beta_к, \qquad (13.3.57)$$

где $x_к$ — расстояние вдоль поверхности, отсчитываемое от воображаемой вершины острого конуса до рассматриваемой точки:

$$x_к=x-R_т\varphi_к+R_т\,\mathrm{tg}\,\varphi_к, \qquad (13.3.58)$$

или, учитывая, что $\varphi_{\text{к}}=\pi/2-\beta_{\text{к}}$,

$$x_{\text{к}}=x-R_{\text{т}}(\pi/2-\beta_{\text{к}})+R_{\text{т}}\operatorname{ctg}\beta_{\text{к}}. \qquad (13.3.58')$$

Найдем значения функции $F(x)$. Очевидно, интеграл в (13.3.44′), вычисляемый в пределах от 0 до x (x — криволинейная координата точки A), находится как сумма двух интегралов: одного с пределами от 0 до $x=R_{\text{т}}\varphi_{\text{к}}=R_{\text{т}}(\pi/2-\beta_{\text{к}})$ (или для углов — от 0 до $\varphi_{\text{к}}$) и другого с пределами от $\varphi_{\text{к}}R_{\text{т}}$ до x. Очевидно, один интеграл соответствует значению теплового потока в конце сферического участка (или, что то же самое, в начале конической поверхности). Понятно, что распределение теплового потока на этом участке такое же, как и полученное ранее для полусферы. Учитывая сказанное, находим функцию $F(x)$ (13.3.44′) в следующей форме:

$$F(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos^2\varphi_{\text{к}}+\frac{p_\infty}{p_0'}\sin^2\varphi_{\text{к}}\right)\tilde{\lambda}R_{\text{т}}\varphi_{\text{к}}\times$$

$$\times\cos\varphi_{\text{к}}x_{\text{к}}V_\infty^{-1/2}\Bigg/\left[\int\limits_0^{\varphi_{\text{к}}}\left(\cos^2\varphi+\frac{p_\infty}{p_0'}\sin^2\varphi\right)\tilde{\lambda}R_{\text{т}}^4\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{R_{\text{т}}\varphi_{\text{к}}}^{x}\left(\cos^2\varphi_{\text{к}}+\frac{p_\infty}{p_0'}\sin^2\varphi_{\text{к}}\right)\tilde{\lambda}R_{\text{т}}\varphi_{\text{к}}r_0^2\,dx\right]^{1/2}. \qquad (13.3.59)$$

Другой интеграл, вычисляемый для участка прямолинейной образующей конуса, напишем с учетом (13.3.58) в виде

$$\int\limits_{R_{\text{т}}\varphi_{\text{к}}}^{x}\left(\cos^2\varphi_{\text{к}}+\frac{p_\infty}{p_0'}\sin^2\varphi_{\text{к}}\right)\tilde{\lambda}R_{\text{т}}\varphi_{\text{к}}r_0^2\,dx=$$

$$=\left(\cos^2\varphi_{\text{к}}+\frac{p_\infty}{p_0'}\sin^2\varphi_{\text{к}}\right)\tilde{\lambda}R_{\text{т}}\varphi_{\text{к}}\cos^2\varphi_{\text{к}}\int\limits_{R_{\text{т}}\operatorname{tg}\varphi_{\text{к}}}^{x_{\text{к}}}x_{\text{к}}^2\,dx_{\text{к}}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\cos^2\varphi_{\text{к}}+\frac{p_\infty}{p_0'}\sin^2\varphi_{\text{к}}\right)\tilde{\lambda}R_{\text{т}}\varphi_{\text{к}}\cos^2\varphi_{\text{к}}\left(x_{\text{к}}^3-R_{\text{т}}^3\operatorname{tg}^3\varphi_{\text{к}}\right). \qquad (13.3.60)$$

Введем обозначение:

$$G(\bar{x}_{\text{к}})=\frac{16}{3}\left(\cos^2\varphi_{\text{к}}+\frac{p_\infty}{p_0'}\sin^2\varphi_{\text{к}}\right)\left(\bar{x}_{\text{к}}^3-\operatorname{tg}^3\varphi_{\text{к}}\right)\varphi_{\text{к}}\cos^2\varphi_{\text{к}}, \qquad (13.3.61)$$

где $\bar{x}_{\text{к}}=x_{\text{к}}/R_{\text{т}}$, с учетом которого подстановка (13.3.59) и (13.3.49) при $\varepsilon=1$ приводит к зависимости

$$\frac{q_x}{q_0}=2\left(\cos^2\varphi_{\text{к}}+\frac{p_\infty}{p_0'}\sin^2\varphi_{\text{к}}\right)\bar{x}_{\text{к}}\varphi_{\text{к}}\cos\varphi_{\text{к}}\Big/\sqrt{D(\varphi_{\text{к}})+G(\bar{x}_{\text{к}})}, \qquad (13.3.62)$$

здесь функция $D(\varphi_{\text{к}})$ определяется по (13.3.53) для $\varphi=\varphi_{\text{к}}$.

Следует подчеркнуть, что уравнение (13.3.62) пригодно лишь для конической поверхности, т. е. для значений $\bar{x}_к = x_к/R_т \geqslant \operatorname{tg}\varphi_к$.

В точке сопряжения сферического носка и конуса, т. е. при $\bar{x}_к = \operatorname{tg}\varphi_к$, выражение (13.3.62) согласуется с уравнением (13.3.54). Для участков конической поверхности, расположенных вдали от этой точки ($\bar{x}_к \gg 1$),

$$\frac{q_x}{q_0} \to 2\bar{x}_к\varphi_к\cos\varphi_к \Big/ \sqrt{\frac{16}{3}\bar{x}_к^3\varphi_к\cos^2\varphi_к} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{\varphi_к}{\bar{x}_к}}. \quad (13.3.63)$$

При выводе формулы (13.3.63) принято, что для весьма длинного конуса влияние затупления мало и такой конус можно рассматривать условно как заостренный, для которого давление на носке $p_0' = p_\delta$ и, следовательно, $p_\delta/p_0' = \cos^2\varphi_к + (p_\infty/p_0')\sin^2\varphi_к \approx 1$. Заменяя в соответствии с этим условием ρ_0' на $\rho_\delta = \rho_к$ и μ_0' на $\mu_\delta = \mu_к$ и полагая $\varepsilon = 1$, получим из (13.3.48)

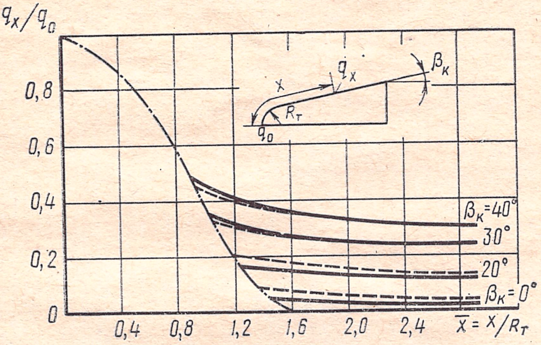


Рис. 13.3.3. Распределение теплового потока вдоль поверхности затупленного конуса, обтекаемого сверхзвуковым потоком (при наличии ламинарного пограничного слоя):

—.—.— — по (13.3.54); ———— — по (13.3.62); — — — — по 13.3.63)

$$q_0 = (\sqrt{2}/2)\,\mathbf{Pr}^{-2/3}\sqrt{\rho_к\mu_к\tilde{\lambda}}\,(i_r - i_{ст}).$$

Поэтому на удаленных участках такой «эквивалентной» заостренной конической поверхности тепловой поток

$$q_к = 0{,}61\,\mathbf{Pr}^{-2/3}\sqrt{\rho_к\mu_к\tilde{\lambda}\varphi_к/\bar{x}_к}\,(i_r - i_{ст}), \qquad (31.3.64)$$

где $\rho_к$, $\mu_к$ — плотность и динамический коэффициент вязкости на заостренном конусе.

Распределение тепловых потоков, вычисленное по (13.3.54), (13.3.62) и (13.3.63), показано на рис. 13.3.3. Из этого рисунка видно, что при углах $\beta_к$, равных 30 и 40°, распределение теплового потока на затупленном и эквивалентном конусах практически одинаково, в то время как на поверхности тонких затупленных тел тепловые потоки меньше, чем на поверхности соответствующих «эквивалентных» конусов.

От «эквивалентного» конуса можно перейти к обычному заостренному, если в формуле (13.3.64), в которой $\bar{x}_{\text{к}}=x_{\text{к}}/R_{\text{т}}$, заменить $\tilde{\lambda}\varphi_{\text{к}}R_{\text{т}}=(\partial V_\delta/\partial x)_{x\to 0}x=V_\delta$ на величину скорости $V_{\text{к}}$ на конической поверхности. В соответствии с этим для обычного заостренного конуса

$$q_x=q_{\text{к}}=0{,}61\,\mathbf{Pr}^{-2/3}\sqrt{\rho_{\text{к}}\mu_{\text{к}}V_{\text{к}}/x_{\text{к}}}\,(i_r-i_{\text{ст}}). \qquad (13.3.65)$$

Суммарный тепловой поток на конусе $Q_{\text{к}}=2\pi\int\limits_0^{x_{\text{к}}}q_{\text{к}}r\,dx$. После подстановки сюда $q_{\text{к}}$ из формулы (13.3.65), полагая в ней $x_{\text{к}}=x$, получим

$$Q_{\text{к}}=0{,}81\,\mathbf{Pr}^{-2/3}S_{\text{к}}\sqrt{\rho_{\text{к}}\mu_{\text{к}}V_{\text{к}}/x_{\text{к}}}\,(i_r-i_{\text{ст}}), \qquad (13.3.66)$$

где $S_{\text{к}}=\pi x_{\text{к}}^2\sin\beta_{\text{к}}$ — боковая поверхность конуса с длиной образующей $x_{\text{к}}$ и углом полураствора $\beta_{\text{к}}$.

Плоский торец

Исследования показывают, что тепловые потоки к плоской поверхности меньше, чем к сферической. Это объясняется не только меньшей поверхностью торца, но и более интенсивным торможением потока на нем, что, в частности, приводит к существенному уменьшению скорости и градиента $\tilde{\lambda}$ на внешней границе пограничного слоя.

Если картина распределения параметров обтекания известна, то приближенный характер изменения отношения q_x/q_0 можно определить с помощью формулы (13.3.49), в которой надо принять $r_0=x$. На рис. 13.3.1 показаны результаты расчета этого изменения для нескольких значений величины ρ_∞/ρ_0', которым соответствуют различные скорости набегающего потока. При очень больших числах $\mathbf{M}_\infty$ (отношение плотностей для точки полного торможения $\rho_\infty/\rho_0'=0{,}05$) удельные тепловые потоки возрастают при приближении к острой кромке торца. Это объясняется влиянием давления и плотности, которые в этом месте претерпевают небольшое снижение, оставаясь по величине достаточно большими.

При снижении скорости обтекания характер распределения удельных тепловых потоков изменяется (кривые, соответствующие значениям $\rho_\infty/\rho_0'=0{,}15$; $0{,}25$; $0{,}35$). До некоторой величины $\bar{x}=x/R_{\text{т}}<1$ отношение q_x/q_0 увеличивается, достигая при определенном значении $\bar{x}$, зависящем от числа $\mathbf{M}_\infty$, максимальной величины, а затем снижается. Это снижение объясняется тем, что вблизи острой кромки при сравнительно небольших скоростях обтекания уменьшение давления может оказать решающее влияние и, несмотря на рост скорости, тепловой поток после достижения некоторой наибольшей величины начинает снижаться.

§ 13.4. ДИФФУЗИОННАЯ ТЕПЛОПЕРЕДАЧА

Для количественной оценки диффузионной теплопередачи необходимо в общем случае решить систему уравнений пограничного слоя, включающую уравнения движения и энергии (13.3.1), а также уравнения диффузии (3.2.4). При сделанных в § 13.3 предпосылках уравнения движения и энергии в переменных η, $\tilde{x}$ (13.3.5) имеют вид (13.3.35) и (13.3.36). Рассмотрим уравнение диффузии применительно к условиям течения в «замороженном» пограничном слое. Такое течение, как отмечалось, характеризуется малыми скоростями рекомбинаций, которыми можно пренебречь по сравнению со скоростью диффузии поперек линий тока. Концентрация атомов в таком «замороженном» пограничном слое определяется диффузией вещества к стенке, где и происходит рекомбинация. В этом случае концентрация не является равновесной, определяемой локальными значениями температуры и давления. Распределение концентраций и температур практически не зависит друг от друга.

Полагая в уравнении (3.2.4) $(W_{\text{хим}})_i=0$ и относя это уравнение к условиям течения в пограничном слое путем замены производной $\partial/\partial r$ на $\partial/\partial y$, а также принимая в нем $r=r_0$ и $V_r=V_y$, напишем

$$\frac{\partial(\rho V_x r_0 c_i)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho V_y r_0 c_i)}{\partial y}=-\frac{\partial(Q_i r_0)}{\partial y}.$$

Раскрывая производную в левой части и заменяя Q_i согласно (13.1.7), найдем

$$\left[\frac{\partial(\rho V_x r_0)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho V_y r_0)}{\partial y}\right]c_i+\rho r_0\left(V_x\frac{\partial c_i}{\partial x}+V_y\frac{\partial c_i}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\overline{D}r_0\frac{\partial c_i}{\partial y}\right).$$

В соответствии с уравнением неразрывности (2.4.48) двучлен в квадратных скобках равен нулю. Принимая также во внимание, что r_0 для данного сечения пограничного слоя является величиной постоянной, найдем

$$\rho\left(V_x\frac{\partial c_i}{\partial x}+V_y\frac{\partial c_i}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\overline{D}\frac{\partial c_i}{\partial y}\right). \quad (13.4.1)$$

Для атомарного компонента уравнение (13.4.1) примет вид

$$\rho\left(V_x\frac{\partial c_{\text{A}}}{\partial x}+V_y\frac{\partial c_{\text{A}}}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\overline{D}\frac{\partial c_{\text{A}}}{\partial y}\right). \quad (13.4.2)$$

Для молекулярной составляющей уравнение диффузии будет по форме таким же с заменой $c_{\text{А}}$ на $c_{\text{М}}$, что следует из условия $c_{\text{А}}=1-c_{\text{М}}$.

Преобразуем уравнение (13.4.2) к переменным η, $\tilde{x}$, принимая во внимание значения операторов (13.3.15) и (13.3.17):

$$\rho\rho_\delta V_\delta^2 \mu_\delta r_0^{2\varepsilon}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial c_A}{\partial \tilde{x}}-\frac{f}{2\tilde{x}}\cdot\frac{\partial c_A}{\partial \eta}-\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}}\cdot\frac{\partial c_A}{\partial \eta}\right)=$$

$$=\frac{\rho V_\delta^2 r_0^{2\varepsilon}}{2\tilde{x}}\cdot\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\rho^2 \overline{D}\,\frac{\partial c_A}{\partial \eta}\right).$$

Полагая, что концентрация и профиль скорости являются только функцией η (рассматривается автомодельное решение), получим

$$\rho_\delta \mu_\delta f\,\frac{\partial c_A}{\partial \eta}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\rho^2 \overline{D}\,\frac{\partial c_A}{\partial \eta}\right)=0.$$

Введем безразмерную зависимую переменную:

$$z(\eta)=c_A/c_{A\delta}. \qquad (13.4.3)$$

Преобразуя уравнение диффузии к этой переменной в предположении, что $\rho\mu=\rho_\delta\,\mu_\delta$, а число Шмидта $\mathbf{Sc}=\mu/(\rho\overline{D})$ является постоянным и равным его значению на стенке, запишем

$$\mathbf{Sc}\, f z' + z'' = 0, \qquad (13.4.4)$$

где штрих означает дифференцирование по η.

Уравнение (13.4.4) по форме такое же, как и (13.3.36), с той разницей, что число $\mathbf{Pr}$ заменено числом $\mathbf{Sc}$. Граничные условия для функции z, при которых решается уравнение (13.4.4), будут аналогичны граничным условиям для функции g [см. (13.3.23) и (13.3.24)], т. е. при $\eta=0\,(y=0)$ величина $z(0)=z_{\text{ст}}=c_{\text{A ст}}/c_{A\delta}$, при $\eta\to\infty\,(y\to\infty)$ функция $z(\infty)\to 1$, а производная $\partial z/\partial\eta\to 0$.

Двойное интегрирование (13.4.4) приводит к уравнению, аналогичному (13.3.37):

$$z(\eta)-z(0)=z'(0)\int\limits_0^\eta e^{-\int\limits_0^\eta \mathbf{Sc}\, f d\eta}\, d\eta. \qquad (13.4.5)$$

Учитывая эту аналогию, определим при $\eta\to\infty$ интеграл:

$$\int\limits_0^\eta e^{-\int\limits_0^\eta \mathbf{Sc}\, f d\eta}\, d\eta=(0{,}5\ \mathbf{Sc}^{1/3})^{-1}.$$

Принимая во внимание, что при $\eta\to\infty$ функция $z(\eta)\to 1$, находим

$$z'(0)=0{,}5\,\mathbf{Sc}^{1/3}\,[1-z(0)]. \qquad (13.4.6)$$

Одновременно можно найти производную $z'(0)=(\partial z/\partial\eta)_{\text{ст}}$, воспользовавшись соотношением из химической кинетики для определения количества вещества, выделившегося на стенке в результате каталитической реакции

$$Q_{\text{ст}}=k_{\text{ст}} c_{\text{A ст}} \rho_{\text{ст}}, \qquad (13.4.7)$$

где $k_{\text{ст}}$ — константа скорости каталитической реакции.

Это количество вещества равно диффузионному потоку (по абсолютной величине):

$$Q_{\text{ст}}=\rho_{\text{ст}}\overline{D}\left(\frac{\partial c_A}{\partial y}\right)_{\text{ст}}=\rho_{\text{ст}}\overline{D}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\text{ст}} c_{A\delta}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\text{ст}} = \frac{k_{\text{ст}}}{\overline{D}} \cdot \frac{c_{\text{А ст}}}{c_{\text{А}\delta}} = \frac{k_{\text{ст}}}{\overline{D}} z(0)$$

или в переменных η, $\widetilde{x}$ согласно (13.3.5)

$$z'(0) = \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)_{\text{ст}} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\text{ст}} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)_{\text{ст}} = \frac{(2\widetilde{x})^{1/2}}{V_\delta r_0^\varepsilon} \cdot \frac{k_{\text{ст}}}{\rho_{\text{ст}}\overline{D}} z(0). \quad (13.4.8)$$

Решаем систему уравнений (13.4.6) и (13.4.8) относительно $z(0)$ и $z'(0)$:

$$z(0) = z_{\text{ст}} = \left[\frac{(2\widetilde{x})^{1/2}}{V_\delta r_0^\varepsilon} \cdot \frac{k_{\text{ст}}}{0{,}5\,\mathbf{Sc}^{1/3}\rho_{\text{ст}}\overline{D}} + 1\right]^{-1}; \quad (13.4.9)$$

$$z'(0) = 0{,}5\,\mathbf{Sc}^{1/3}\left[1 + \frac{V_\delta r_0^\varepsilon}{(2\widetilde{x})^{1/2}} \cdot \frac{0{,}5\,\mathbf{Sc}^{1/3}\rho_{\text{ст}}\overline{D}}{k_{\text{ст}}}\right]^{-1}. \quad (13.4.10)$$

Величину удельного потока тепла, выделившегося при рекомбинации на стенке, можно получить из (13.1.8). Определяя тепловой поток по абсолютной величине, найдем его текущее значение:

$$q_{\text{Д}x} = \rho_{\text{ст}}\overline{D}\,(\partial c_{\text{А}}/\partial\eta)_{\text{ст}}\,(\partial\eta/\partial y)_{\text{ст}}\,(i_{\text{А}} - i_{\text{М}})$$

или, принимая во внимание, что $(\partial c_{\text{А}}/\partial\eta)_{\text{ст}} = c_{\text{А}\delta} z'(0)$, получим с учетом значения (13.3.6) для $(\partial\eta/\partial y)_{\text{ст}}$ зависимость

$$q_{\text{Д}x} = 0{,}5\,\mathbf{Sc}^{1/3}\overline{D}\rho_{\text{ст}}^2 V_\delta r_0^\varepsilon (2\widetilde{x})^{-1/2}\left[1 + \frac{V_\delta r_0^\varepsilon}{(2\widetilde{x})^{1/2}} \cdot \frac{0{,}5\,\mathbf{Sc}^{1/3}\rho_{\text{ст}}\overline{D}}{k_{\text{ст}}}\right]^{-1} c_{\text{А}\delta}(i_{\text{А}} - i_{\text{М}}). \quad (13.4.11)$$

Из полученных выражений следует, что в предельном случае, соответствующем бесконечно большой скорости рекомбинации (стенка каталитическая, коэффициент каталитической реакции $k_{\text{ст}}\to\infty$), величина $z(0)=0$ и, следовательно, концентрация на стенке равна нулю. В соответствии с (13.4.11) при таком бесконечно быстром катализе тепловой поток

$$q_{\text{Д}x} = 0{,}5\,\mathbf{Sc}^{1/3}\rho_{\text{ст}}^2 V_\delta \overline{D} r_0^\varepsilon (2\widetilde{x})^{-1/2} c_{\text{А}\delta}(i_{\text{А}} - i_{\text{М}}). \quad (13.4.12)$$

Таким образом, в рассматриваемом предельном случае атомы достигают стенки даже при условии нулевой концентрации на поверхности. При этом выделяется максимальное количество тепла, обусловленное рекомбинацией этих атомов в молекулы. В другом предельном случае бесконечно медленной каталитической реакции (стенка некаталитическая, $k_{\text{ст}}\to 0$) концентрация на стенке остается такой, как и на внешней границе, т. е. $z(0)=1$. В этом случае поток атомов за счет диффузии равен нулю и, следовательно, дополнительное тепло не выделяется, т. е. $q_{\text{Д}x}=0$. Этот же результат следует из (13.4.11), если принять коэффициент каталитической реакции $k_{\text{ст}}\to 0$.

Произведем некоторые преобразования в уравнении (13.4.11).

Полагая $\rho_{ст}\mu_{ст}=\rho_\delta\mu_\delta$ и вводя отношение $\rho_\delta\mu_\delta/(\rho_0'\mu_0')$ согласно формуле (13.3.42), в которой принимаем $\omega_\delta/\omega_0'=1$, напишем

$$A=\frac{0{,}5\,\mathbf{Sc}^{1/3}\rho_{ст}^2\overline{D}V_\delta r_0^\varepsilon}{(2\tilde{x})^{1/2}}=\frac{0{,}5\,\mathbf{Sc}^{-2/3}\left(p_\delta/p_0'\right)V_\delta r_0^\varepsilon\sqrt{\rho_0'\mu_0'}}{\left[2\int\limits_0^x\left(p_\delta/p_0'\right)V_\delta r_0^{2\varepsilon}dx\right]^{1/2}}, \qquad (13.4.13)$$

или в соответствии с формулой (13.3.44) для функции $F(x)$ — выражение

$$A=0{,}5\,\mathbf{Sc}^{-2/3}\sqrt{\rho_0'\mu_0'V_\infty}F(x), \qquad (13.4.13')$$

в котором число $\mathbf{Sc}=\mu_{ст}/(\rho_{ст}\overline{D})$.

Учитывая (13.3.13′) и принимая во внимание, что

$$c_{A\delta}(i_A-i_M)\approx c_{A\delta}i_{хим}, \qquad (13.4.14)$$

а также вводя энтальпию диссоциации

$$i_D=c_{A\delta}i_{хим}=c_{A\delta}u_d, \qquad (13.4.15)$$

где u_d — характеристическая энергия диссоциации [см. (1.6.9)], напишем вместо (13.4.11) выражение

$$q_{Дx}=0{,}5\,\mathbf{Sc}^{-2/3}\sqrt{\rho_0'\mu_0'V_\infty}F(x)\,i_D\varphi, \qquad (13.4.16)$$

где каталитический коэффициент

$$\varphi=[1+(A/\rho_{ст}k_{ст})]^{-1}. \qquad (13.4.17)$$

Этот коэффициент учитывает влияние конечной скорости рекомбинации, так как в его выражение входит параметр $k_{ст}$. Очевидно, при $k_{ст}\to\infty$ значение $\varphi\to1$ (случай бесконечно быстрого катализа), а при $k_{ст}\to0$ значение $\varphi\to0$ (стенка некаталитическая).

Для условий течения вблизи точки полного торможения из (13.4.13′) с учетом (13.3.47) получим

$$A=A_0=0{,}5\,\mathbf{Sc}^{-2/3}\sqrt{\rho_0'\mu_0'\tilde{\lambda}(\varepsilon+1)}, \qquad (13.4.18)$$

а из (13.4.17)

$$\varphi=\varphi_0=\left[1+0{,}5\,\mathbf{Sc}^{-2/3}\sqrt{\rho_0'\mu_0'\tilde{\lambda}(\varepsilon+1)}\Big/(\rho_{ст}k_{ст})\right]^{-1}. \qquad (13.4.19)$$

В соответствии с этим тепловой поток в окрестности точки полного торможения

$$q_{Д0}=0{,}5\,\mathbf{Sc}^{-2/3}\sqrt{\rho_0'\mu_0'\tilde{\lambda}(\varepsilon+1)}\varphi_0 i_D. \qquad (13.4.20)$$

В этих соотношениях $\varepsilon=1$ для тел вращения, $\varepsilon=0$ для профиля крыла.

Полный удельный тепловой поток к стенке будет найден, если тепло от диффузии $q_{Дx}$ сложить с теплом от молекулярной теплопроводности $q_{тx}$. В общем виде величина этого теплового потока определяется уравнением (13.1.12), которое перепишем в форме

$$q_к = q_{тx} + q_{Дx} = \underbrace{-\frac{\lambda_{ст}}{(c_p)_{ст}}\left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_{ст}}_{(q_к)_{Le=1}}\left[1 - \frac{(\partial c_А/\partial y)_{ст}(i_А - i_М)}{(\partial i/\partial y)_{ст}}\right] -$$

$$\underbrace{-\rho_{ст}\overline{D}\left(\frac{\partial c_А}{\partial y}\right)_{ст}(i_А - i_М)}_{q_к = q_{Дx}}.$$

Принимая во внимание (13.1.8) и (13.1.13), напишем

$$q_к = (q_к)_{Le=1}\left[1 - \frac{(\partial c_А/\partial y)_{ст}(i_А - i_М)}{(\partial i/\partial y)_{ст}} + \frac{q_{Дx}}{(q_к)_{Le=1}}\right], \qquad (13.4.21)$$

где $(q_к)_{Le=1}$ — удельный тепловой поток, соответствующий значению $\mathbf{Le} = \rho_{ст}\overline{D}(c_p)_{ст}/\lambda_{ст} = 1$.

С учетом (13.3.43) и (13.4.16)

$$q_к = (q_к)_{Le=1}\left[1 - \frac{(\partial c_А/\partial y)_{ст}(i_А - i_М)}{(\partial i/\partial y)_{ст}} + \left(\frac{\mathbf{Sc}}{\mathbf{Pr}}\right)^{-2/3}\frac{\varphi i_D}{i_r - i_{ст}}\right].$$

Оценим значения производных $(\partial c_А/\partial y)_{ст}$ и $(\partial i/\partial y)_{ст}$, полагая, что на холодной стенке концентрация $c_{А\,ст} = 0$:

$$\left(\frac{\partial c_А}{\partial y}\right)_{ст} \sim \frac{c_{А\delta}}{\delta}, \quad \left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_{ст} = \left(\frac{\partial i_0}{\partial y}\right)_{ст} \sim \frac{i_{0\delta} - i_{ст}}{\delta} = \frac{i_r - i_{ст}}{\delta},$$

где δ — толщина пограничного слоя; $i_{0\delta} = i + V_x^2/2$.

Учитывая эту оценку производных и принимая во внимание, что $\mathbf{Le} = \mathbf{Pr}/\mathbf{Sc}$ и $c_{А\delta}(i_А - i_М) = i_D$, найдем

$$q_к = (q_к)_{Le=1}\left[1 + (\mathbf{Le}^{2/3}\varphi - 1)\frac{i_D}{i_r - i_{ст}}\right]. \qquad (13.4.22)$$

Для произвольной точки на обтекаемой поверхности тепловой поток $(q_к)_{Le=1}$ находят из (13.3.43), а для точки полного торможения — из (13.3.48). Коэффициенты φ определяются соответственно из (13.4.17) и (13.4.19). Значение i_D вычисляется также в зависимости от положения рассматриваемой точки на стенке: $i_D = u_d[c_{А\delta} - (c_А)_{ст}]$. Для бинарной смеси можно принять $c_{А\delta} = \alpha_\delta$ и $(c_А)_{ст} = \alpha_{ст}$, следовательно,

$$i_D = u_d(\alpha_\delta - \alpha_{ст}). \qquad (13.4.23)$$

Для расчета i_D диссоциирующего воздуха, который рассматривается в виде бинарной смеси атомов и молекул, можно воспользоваться зависимостями (1.6.21) — (1.6.24).

Число Le определяется для условий в точке полного торможения и принимается постоянным для всей поверхности. Из формулы (13.4.22) вытекают зависимости, соответствующие двум предельным случаям теплопередачи. В первом из этих случаев, когда обтекаемая стенка некаталитическая ($k_{\text{ст}}\to 0$, $\varphi\to 0$), диффузионная теплопередача отсутствует и тепловой поток к поверхности, возникающий только за счет теплопроводности,

$$q_{\text{к}(k_{\text{ст}}\to 0)}=(q_{\text{к}})_{\text{Le}=1}\left(1-\frac{i_D}{i_r-i_{\text{ст}}}\right). \tag{13.4.24}$$

Во втором случае, когда стенка каталитическая и рекомбинация на стенке протекает с бесконечной скоростью ($k_{\text{ст}}\to\infty$, $\varphi\to 1$), полный тепловой поток

$$q_{\text{к}(k_{\text{ст}}\to\infty)}=(q_{\text{к}})_{\text{Le}=1}\left[1+(\text{Le}^{2/3}-1)\frac{i_D}{i_r-i_{\text{ст}}}\right]. \tag{13.4.25}$$

Отношение количества тепла $q_{\text{к}}$ (13.4.22), выделяющегося при конечной скорости рекомбинации, к тепловому потоку $q_{\text{к}(k_{\text{ст}}\to\infty)}$ в случае бесконечно быстрого катализа

$$\bar{q}=\frac{q_{\text{к}}}{q_{\text{к}(k_{\text{ст}}\to\infty)}}=\frac{1+(\text{Le}^{2/3}\varphi-1)\,\tilde{i}_D}{1+(\text{Le}^{2/3}-1)\,\tilde{i}_D}, \tag{13.4.26}$$

где $\tilde{i}_D=i_D/(i_r-i_{\text{ст}})$.

Результаты вычисления по (13.4.26) отношения тепловых потоков для точки полного торможения в зависимости от скорости набегающего потока V_∞ и константы скорости каталитической реакции $k_{\text{ст}}$ показаны на рис. 13.4.1. Эти результаты указывают на то, как важно учитывать конечную скорость рекомбинации, и на возможность уменьшить теплопередачу путем применения обшивки из некаталитического материала. При такой обшивке малые скорости рекомбинации, свойственные воздушной среде, изменяются незначительно, что обусловливает большее поглощение тепла за счет диссоциации и, как следствие, снижение теплового потока к стенке.

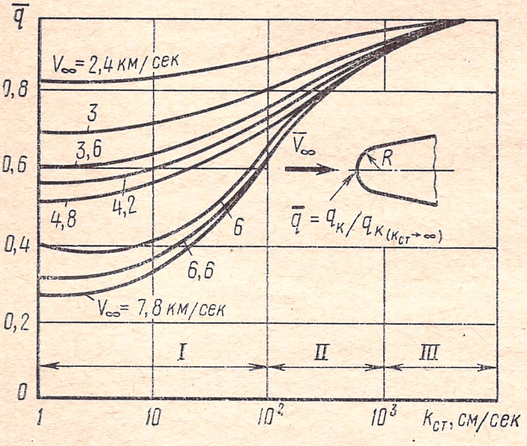


Рис. 13.4.1. Изменение теплопередачи в зависимости от скорости полета V_∞ и скорости рекомбинации $k_{\text{ст}}$:

I — некаталитическая стенка (стекло); *II* — промежуточная поверхность (окислы); *III* — катализаторы (металлы)

Изменение теплопередачи за счет диффузии в известной мере учитывается формулой (13.3.48′), которая дает суммарное значение удельного теплового потока, определяемого не только теплопроводностью, но и диффузионным переносом тепла вследствие рекомбинации атомов на каталитической стенке. Если же обтекаемая поверхность не является каталитической (например, поверхность неметаллической обшивки), то получаемый по формуле (13.3.48′) тепловой поток будет несколько занижен. При этом неточность формулы будет возрастать с увеличением высоты, когда все бо́льшим становится отклонение состояния газа от равновесного.

В этом параграфе была рассмотрена теплопередача в двух предельных случаях равновесного и «замороженного» течений в пограничном слое. Однако наиболее общим является механизм теплопередачи, характеризующийся тем, что концентрация каждого химического компонента в пограничном слое определяется в соответствии с уравнением (3.2.4) конечной скоростью химических реакций $(W_{\text{хим}})_i$. Достаточно хорошо ознакомившись с изложенными сведениями о теплопередаче в рассмотренных предельных случаях, можно самостоятельно изучить ее механизм в указанном более общем случае, когда $(W_{\text{хим}})_i \neq 0$. С этой целью следует воспользоваться системой (3.2.4), (3.2.14), (12.1.8). Некоторые методы и результаты решения этой системы изложены в работах [22, 30, 33].

О расчете теплопередачи в турбулентном пограничном слое. Ранее был рассмотрен ряд задач, связанных с определением теплопередачи в ламинарном пограничном слое на криволинейной поверхности.

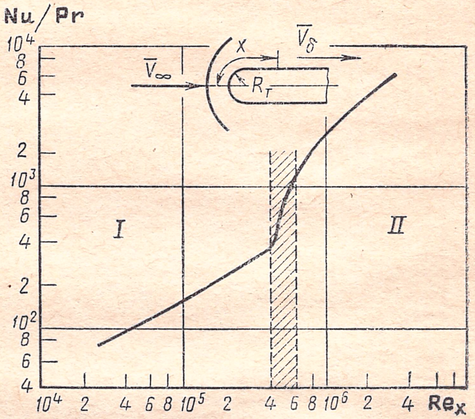


Рис. 13.4.2. Кривые, характеризующие теплопередачу на цилиндре со сферическим носком:

$\mathrm{Re}_x = \rho_\delta V_\delta x/\mu_\delta$; $\mathrm{Nu}/\mathrm{Pr} = q_x x/[\mu_\delta(i_r - i_{\text{ст}})]$; $\mathrm{Pr} = 0{,}72$

Решение этих задач весьма важно для практических целей, так как всегда в реальных условиях передняя часть поверхности омывается ламинарным пограничным слоем. К тому же именно в окрестности носка теплопередача оказывается наиболее интенсивной. При этом на периферийных участках затупленного тела пограничный слой турбулентный, поэтому возникает необходимость оценки соответствующей величины теплопередачи. Для этих целей можно воспользоваться системой уравнений, аналогичной той, которая использовалась при исследовании ламинарного пограничного слоя, учитывающей особенности турбулентного движения.

Приближенно можно оценить величину теплопередачи по формуле (13.2.16), в которой коэффициент трения принимается в случае охлажденной поверхности таким, как и для несжимаемой жидкости. Если стенка охлаждается слабо, то этот коэффициент находится по определяющим параметрам.

На рис. 13.4.2 приведены в качестве иллюстрации экспериментальные результаты, полученные на цилиндре со сферическим носком ([44], 1958, № 12). Видно, что в интервале значений чисел $\mathbf{Re}_x$ от $4 \cdot 10^5$ до $6 \cdot 10^5$ ламинарное течение (область *I*) переходит в турбулентное (область *II*). При этом теплопередача увеличивается почти в 5 раз.

Современная ракетная и авиационная техника предъявляет повышенные требования к точности расчетов трения и теплопередачи, что может быть достигнуто при совершенствовании методов решения уравнений пограничного слоя. В последнее время получает развитие *метод прямого решения этих уравнений* применительно к конкретной задаче. Это особенно относится к турбулентному пограничному слою, движение в котором имеет весьма сложный характер и поэтому менее изучено. Метод прямого решения уравнений пограничного слоя привлекает все большее внимание исследователей ввиду возросших возможностей использования быстродействующих ЭВМ. Благодаря этому техника сложных расчетов параметров пограничного слоя, как ламинарного, так и особенно турбулентного, получает все большее распространение в инженерной практике.

§ 13.5. ТЕМПЕРАТУРА СТЕНКИ

Равновесная радиационная температура

При установившемся движении летательного аппарата тепловой режим на обтекаемой поверхности характеризуется равенством тепловых потоков, направленных к поверхности и от нее. В этом случае уравнение теплового баланса (13.1.1) будет иметь вид $q_{\text{пд}} - q_{\text{от}} = 0$ или с учетом выражений (13.1.2) для подводимого $q_{\text{пд}}$ и (13.1.3) для отводимого $q_{\text{от}}$ тепловых потоков

$$q_{\text{к}} + q_{\text{рад}} + q_{\text{с}} + q_{\text{з}} + q_{\text{об.п}} = q_{\text{из}} + q_{\text{аб}} + q_{\text{ох}} + q_{\text{об.о}}. \qquad (13.5.1)$$

Температура стенки, определяемая из условия равенства тепловых потоков (13.5.1) и соответствующая установившемуся обтеканию, называется *равновесной температурой*.

Предположим, что теплопередача характеризуется только подводом конвективного теплового потока к стенке ($q_{\text{пд}} = q_{\text{к}}$) и отводом от нее тепловой энергии путем радиации ($q_{\text{от}} = q_{\text{из}}$). При этом (13.5.1) с учетом выражений (13.1.17) для $q_{\text{к}}$ и (13.1.28) для $q_{\text{из}}$ принимает вид

$$[\alpha_{\text{ст}}/(c_p)_{\text{ст}}](i_r - i_{\text{ст}}) = \varepsilon\sigma T_{\text{ст}}^4. \qquad (13.5.2)$$

Температура стенки, определяемая уравнением (13.5.2), называется *равновесной радиационной температурой* и обозначается $T_{\text{ст}} = T_e$. Эта температура отличается от температуры восстановления T_r, которая, как известно из предыдущего, является температурой газа на стенке при отсутствии теплопередачи, т. е. на теплоизолированной поверхности.

Температура T_e представляет собой некоторый верхний предел для излучающей поверхности, достигаемый в том случае, когда разогретая стенка полностью излучает всю полученную энергию. Эта температура при очень больших тепловых потоках нереальна, так как она настолько велика, что не может быть достигнута до того, как разрушится материал обшивки (оплавление, сублимация, сгорание). Однако в некоторых случаях равновесная радиационная температура может оказаться реальной, например на поверхности планирующих летательных аппаратов. При планировании кинетическая энергия переходит в тепловую постепенно и интенсивность конвективного теплового потока может оказаться сравнительно небольшой, так что вполне реальна возможность излучения всей поглощаемой энергии при той равновесной температуре, которая допустима для конструкции.

В уравнении (13.5.2) можно принять коэффициент излучения σ и степень черноты ε известными и постоянными величинами (см. § 13.1). Коэффициент теплопередачи $\alpha_{\text{ст}}$, средняя теплоемкость на стенке $(c_p)_{\text{ст}}$, а также энтальпии i_r и $i_{\text{ст}}$ являются для диссоциирующего газа функциями искомой температуры $T_{\text{ст}}=T_e$, а также заданного давления p_δ. Таким образом, общее число отыскиваемых переменных будет пять, следовательно, уравнение (13.5.2) должно быть дополнено четырьмя независимыми уравнениями для определения: $\alpha_{\text{ст}}$, $(c_p)_{\text{ст}}$, i_r и $i_{\text{ст}}$.

В случае ламинарного пограничного слоя согласно (13.1.17) и (13.4.22) уравнение для $\alpha_{\text{ст}}$ напишем в виде

$$\alpha_{\text{ст}}=\frac{(c_p)_{\text{ст}}q_{\text{к}}}{i_r-i_{\text{ст}}}=\frac{(c_p)_{\text{ст}}}{i_r-i_{\text{ст}}}(q_{\text{к}})_{\mathrm{Le}=1}\left[1+(\mathrm{Le}^{2/3}\varphi-1)\frac{i_D}{i_r-i_{\text{ст}}}\right]. \quad (13.5.3)$$

Уравнение для $(c_p)_{\text{ст}}$ и $i_{\text{ст}}$ представим в общей форме:

$$(c_p)_{\text{ст}}=f_1(p_\delta,\ T_{\text{ст}}); \quad (13.5.4)$$

$$i_{\text{ст}}=f_2(p_\delta,\ T_{\text{ст}}), \quad (13.5.5)$$

где f_1 и f_2 вычисляются при помощи таблиц или графиков термодинамических функций воздуха при высоких температурах.

Энтальпия восстановления

$$i_r=i_\delta+r\,(V_\delta^2/2), \quad (13.5.6)$$

где коэффициент восстановления $r=f_3(p_\delta,\ T_{\text{ст}})$ находится как некоторая функция f_3 давления p_δ и $T_{\text{ст}}$ при помощи формул (12.5.20) и (12.5.21).

Решение системы уравнений (13.5.2) — (13.5.6) позволит найти равновесную радиационную температуру обтекаемой стенки при наличии ламинарного пограничного слоя в диссоциирующей газовой среде. Применяя вместо (13.5.3) уравнение для турбулентной теплопередачи, можно найти температуру $T_{\text{ст}}=T_e$ в случае турбулентного пограничного слоя. Такое уравнение было, в частности, получено выше для условий обтекания плоской пластинки.

Решение системы уравнений (13.5.2) — (13.5.6) осуществляется методом последовательных приближений. При этом заданными являются скорость полета V_∞ (или число $\mathbf{M}_\infty$) и высота H, по которым рассчитывают параметры «невязкого» обтекания поверхности (давление p_δ, плотность ρ_δ, температура T_δ и др.).

Чтобы найти температуру $T_{\text{ст}}=T_e$ в какой-либо точке этой поверхности, определяют для нее в качестве первого приближения энтальпию i_r (13.5.6), принимая согласно (12.5.22) $r=r_{\text{л}}=0{,}84$ (ламинарный пограничный слой) или $r=r_{\text{т}}=0{,}89$ (турбулентный пограничный слой), и находят соответствующее значение T_r как функцию i_r и p_δ. Затем задаются несколькими значениями температуры $T_{\text{ст}}<T_r$ и соответствующими величинами $i_{\text{ст}}<i_r$. Для каждого из этих значений $T_{\text{ст}}(i_{\text{ст}})$ подсчитывают в первом приближении α_x, $(c_p)_{\text{ст}}$ и определяют разность тепловых потоков:

$$[\alpha_x/(c_p)_{\text{ст}}](i_r-i_{\text{ст}})-\varepsilon\sigma T_{\text{ст}}^4=q_{\text{ст}}. \qquad (13.5.7)$$

По полученным данным составляют таблицу или строят кривую $q_{\text{ст}}$ от $T_{\text{ст}}$. Полагая $q_{\text{ст}}=0$, определяют при помощи интерполяции табличных данных или на графике температуру $T_{\text{ст}}=T_e$. По этому значению температуры стенки можно уточнить коэффициент r и энтальпию i_r, определить в следующем приближении коэффициент теплоотдачи α_x и удельную теплоемкость $(c_p)_{\text{ст}}$, а затем повторить вычисления с использованием уравнения (13.5.7) до получения значения $T_{\text{ст}}=T_e$ с заданной степенью приближения.

При решении указанной задачи энтальпию i_D в (13.5.3) следует определять при помощи формулы (13.4.23), в которой в соответствии с табл. 1.6.1 может быть выбран для воздуха параметр $u_D=3\cdot10^7$ *м²/сек²*, а α_δ и $\alpha_{\text{ст}}$ — рассчитать по соответствующим средним молекулярным весам:

$$\alpha_\delta=\mu_{\text{ср}\infty}/\mu_{\text{ср}\delta}-1;\ \alpha_{\text{ст}}=\mu_{\text{ср}\infty}/\mu_{\text{ср.ст}}-1,$$

где для условий набегающего потока $\mu_{\text{ср}\infty}=29{,}27$.

Приближенная оценка температуры $T_{\text{ст}}=T_e$ указанным методом может быть осуществлена в предположении, что числа **Pr**, **Sc**, **Le** выбираются равными некоторым фиксированным значениям, в частности: $\mathbf{Pr}=0{,}64$; $\mathbf{Sc}=0{,}49$; $\mathbf{Le}=1{,}45$.

Более просто вычисляют температуру $T_{\text{ст}}=T_e$ для пластинки и конуса, обтекание которых характеризуется постоянными значениями «невязких» параметров газа на их поверхности. При этом равновесную радиационную температуру можно рассчитать методом определяющей энтальпии (температуры). Такой расчет можно вести также с учетом смешанного пограничного слоя на обтекаемой поверхности, используя для определения параметров трения и теплопередачи соответствующие зависимости.

При ламинарном пограничном слое равновесную радиационную температуру вычисляют в окрестности точки полного торможения сферы. Это можно сделать в результате решения системы уравнений, полученной из соответствующих зависимостей, найденных применительно к условиям, где местная скорость $V_\delta = 0$. Такая система имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&T_{\text{ст}}^4 = \frac{A_1}{\varepsilon\sigma}(i_r - i_{\text{ст}})\left[1 + (\mathbf{Le}^{2/3} - 1)\,\tilde{i}_D\right];\\
&\tilde{i}_D = u_D(\mu_{\text{ср}\infty}/\mu_{\text{ср}\delta} - \mu_{\text{ср}\infty}/\mu_{\text{ср.ст}})(i_r - i_{\text{ст}})^{-1};\\
&\varphi = (1 + A_2/\rho_{\text{ст}})^{-1};\ (c_p)_{\text{ст}} = f_1(p_0', T_{\text{ст}});\ i_{\text{ст}} = f_2(p_0', T_{\text{ст}});\\
&\mu_{\text{ср.ст}} = f_3(p_0', T_{\text{ст}});\ \rho_{\text{ст}} = p_0'\mu_{\text{ср.ст}}/(gR_0T_{\text{ст}}),
\end{aligned}\right\}\quad(13.5.8)$$

где коэффициенты $A_1 = 0{,}5\,\mathbf{Pr}^{-2/3}\sqrt{2\rho_0'\mu_0'\tilde{\lambda}}$; $A_2 = 0{,}5\,\mathbf{Sc}^{-2/3}k_{\text{ст}}^{-1} \times \times \sqrt{2\rho_0'\mu_0'\tilde{\lambda}}$.

Значения p_0', ρ_0', μ_0', $i_r = i_0$ и $\tilde{\lambda}$ подсчитывают в результате решения задачи об обтекании свободным потоком окрестности точки полного торможения.

В качестве первого приближения при решении системы уравнений (13.5.8) принимают температуру $T_{\text{ст}} < T'_0$. По этой температуре и давлению p'_0 находят начальные значения $i_{\text{ст}}$ и $\mu_{\text{ср.ст}}$, затем определяют $\tilde{i}_D$, $\rho_{\text{ст}}$, φ и, наконец, соответствующую температуру $T_{\text{ст}}$. Аналогично осуществляют последующие приближения, которые заканчивают по достижении заданной точности расчетов температуры.

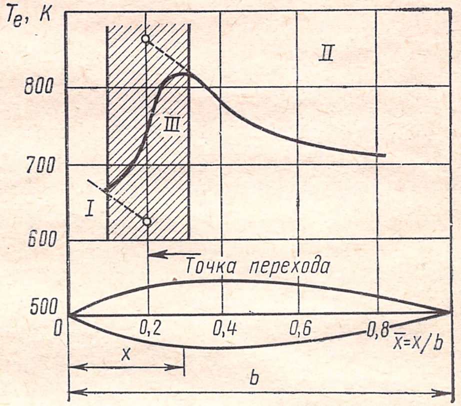


Рис. 13.5.1. Характер распределения равновесной радиационной температуры по поверхности профиля, обтекаемого сверхзвуковым потоком:

I — ламинарный слой; *II* — турбулентный слой; *III* — переходная область

В случае умеренных скоростей обтекания, при которых можно не учитывать диссоциацию и рассматривать термодинамические и кинетические характеристики воздуха постоянными, расчет температуры $T_{\text{ст}} = T_e$ упрощается. В этом случае соответствующая система уравнений принимает вид

$$\alpha_x(T_r - T_{\text{ст}}) = \varepsilon\sigma T_{\text{ст}}^4,\ \alpha_x = h(T_{\text{ст}}), \qquad (13.5.9)$$

где h — некоторая функция температуры $T_{\text{ст}}$, определяющая коэффициент теплоотдачи.

Результаты расчета равновесной радиационной температуры при помощи системы (13.5.9) для параболического профиля при сверхзвуковой скорости обтекания приведены на рис. 13.5.1. Этот расчет проведен с применением зависимостей для α_x, найденных для плоской пластинки, в которых использовались местные параметры «невязкого» обтекания профиля. Причем влияние продольного градиента давления не учитывалось и принимались фиксированные значения $r_л = 0{,}84$ и $r_т = 0{,}89$, соответствующие числу $\mathbf{Pr} = 0{,}71$.

При построении графика, подобного изображенному на рис. 13.5.1, следует учесть переходную область, в которой тепловые потоки меняются плавно по некоторой кривой. Эта кривая не должна иметь изломов, так как в реальных условиях возникают продольные потоки тепла, приводящие к выравниванию температуры.

Уравнения (13.5.9) с известным приближением можно использовать для расчета равновесной радиационной температуры при больших скоростях, когда необходимо учесть влияние сжимаемости, диссоциации или переменности теплоемкостей, если в этих уравнениях перейти к определяющим параметрам:

$$\alpha_x^* (T_r^* - T_{ст}) = \varepsilon\sigma T_{ст}^4, \quad \alpha_x^* = h^* (T_{ст}), \tag{13.5.10}$$

где $T_r{}^*$ определяется с учетом диссоциации по определяющей энтальпии (12.5.23), а $\alpha_x{}^*$ — из выражения (13.2.21).

При расчете теплопередачи на пластинке и конусе число Стантона $\mathbf{St}_x{}^*$, входящее в выражение для $\alpha_x{}^*$, находится по соответствующим зависимостям (13.2.19) или (13.2.27), связывающим между собой параметры трения и теплопередачи.

Анализ уравнений для определения равновесной радиационной температуры и результаты расчета позволяют сделать вывод, что основным способом ее снижения является уменьшение отношения α_x/ε. Для этой цели можно, во-первых, уменьшить коэффициент теплоотдачи α_x, обеспечив ламинаризацию пограничного слоя. Уменьшение α_x достигается также при подъеме летательного аппарата на большую высоту, так как при этом нагрев снижается за счет падения плотности воздуха. Во-вторых, можно увеличить степень черноты ε обтекаемой поверхности. С этой целью наносится специальное покрытие, которое может увеличить ε до $0{,}7 \div 0{,}8$ и тем самым усилить охлаждение излучением. Возрастание степени черноты до величины, близкой к единице, наблюдается и в тех случаях, когда металлическая стенка тонкая и прогревается до высоких температур.

Равновесная температура при наличии дополнительных источников подвода и отвода тепла

Расчет равновесной температуры при наличии кроме конвективного и радиационного тепловых потоков других видов теплопередачи ведется аналогично определению равновесной радиационной температуры. Для такого расчета необходимо воспользоваться уравнением (13.5.1), которое с учетом значений для $q_{\text{к}}=\alpha_x(T_r-T_{\text{ст}})$ и $q_{\text{из}}=\varepsilon\sigma T^4_{\text{ст}}$ напишем в виде

$$\alpha_x(T_r'-T_{\text{ст}})=\varepsilon\sigma T^4_{\text{ст}}, \tag{13.5.11}$$

где приведенная температура восстановления

$$T_r'=T_r[1+\sum q_i/(\alpha_x T_r)]. \tag{13.5.12}$$

Сумма удельных тепловых потоков

$$\sum q_i=q_{\text{рад}}+q_{\text{с}}+q_{\text{з}}+q_{\text{об.п}}-q_{\text{аб}}-q_{\text{ох}}-q_{\text{об.о}}. \tag{13.5.13}$$

В числе составляющих в (13.5.13) — радиационный поток $q_{\text{рад}}$ к стенке от перегретого газа и тепло $q_{\text{аб}}$, рассеиваемое при уносе массы обшивки, которые находят как функции температуры стенки. Остальные компоненты можно рассматривать как заданные величины.

Из (13.5.11) следует, что задача об определении $T_{\text{ст}}=T_e$ решается в принципе так же, как при наличии отвода тепла только излучением. Отличие состоит лишь в том, что вместо температуры восстановления T_r определяется ее приведенное значение T_r'.

Анализ зависимостей (13.5.11) — (13.5.13) показывает, что, применяя искусственное охлаждение $q_{\text{ох}}$ и используя абляцию материала, при которой вместе с частью разрушающейся обшивки уносится некоторое количество тепла $q_{\text{аб}}$, можно снизить температуру стенки $T_{\text{ст}}=T_e$.

При умеренных сверхзвуковых скоростях обтекания можно не учитывать радиационный поток тепла $q_{\text{рад}}$ и тепло $q_{\text{аб}}$, поглощаемое при абляции. В этом случае

$$\sum q_i=q_{\text{с}}+q_{\text{з}}+q_{\text{об.п}}-q_{\text{ох}}-q_{\text{об.о}}, \tag{13.5.14}$$

и расчет $T_{\text{ст}}=T_e$ упрощается, поскольку составляющие теплопередачи в (13.5.14) не зависят от температуры стенки и заранее заданы.

На больших высотах (100—500 *км* и выше) аэродинамический тепловой поток незначителен по сравнению с лучистой энергией. Пренебрегая рассеиванием тепла вдоль поверхности, можно считать, что уравнение баланса тепла при стационарном процессе имеет вид

$$q_{\text{с}}+q_{\text{з}}+q_{\text{от}}=q_{\text{из}}, \tag{13.5.15}$$

где $q_{\text{от}}$ — солнечная энергия, отраженная от Земли.

Практически на больших высотах тепловое излучение Земли $q_{\text{з}}$, а также энергию $q_{\text{от}}$ можно не учитывать и, следовательно, $q_{\text{с}}=$

$=q_{\text{из}}$. Вносят сюда значения $q_{\text{с}}$ из (13.1.24) и $q_{\text{из}}$ из (13.1.28), получим

$$\overline{q}\beta_{\text{с}}\cos\psi=\varepsilon\sigma T_{\text{ст}}^{4},$$

откуда

$$T_{\text{ст}}=\left(\frac{\beta_{\text{с}}}{\varepsilon}\cdot\frac{\overline{q}}{\sigma}\cos\psi\right)^{1/4}. \qquad (13.5.16)$$

Максимальная температура будет при $\psi=0$. В формуле (13.5.16) практически можно воспользоваться постоянным значением $\overline{q}_{\text{с}}=0{,}332$ *ккал*/(*м*^{2}·*сек*) (1,39 · 10^3 *вт*/*м*^{2}). Полагая также $\sigma=1{,}36\times10^{-11}$ *ккал*/(*м*^{2}·*сек* · *град*^{4}) [5,67·10^{-8} *вт*/(*м*^{2}·*град*^{4})], получим следующую зависимость для температуры:

$$T_{\text{ст}}=395\,(\beta_{\text{с}}/\varepsilon)^{1/4}. \qquad (13.5.17)$$

ТЕПЛОВАЯ ЗАЩИТА ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

§ 14.1. СПОСОБЫ ТЕПЛОВОЙ ЗАЩИТЫ

Космические спускаемые аппараты при входе в плотные слои атмосферы испытывают значительный аэродинамический нагрев, так как омываются высокотемпературными потоками газа. Чтобы не допустить разрушительного воздействия аэродинамического нагрева на спускаемые аппараты, в практике ракетостроения используют различные способы тепловой защиты. При этом большое разнообразие конструкций таких аппаратов, а также специфические условия входа в атмосферу определяют различные способы их теплозащиты.

Правильный выбор способа теплозащиты позволяет существенно сэкономить вес космического аппарата, что является одним из решающих факторов, определяющих целесообразность выбора его конструкции.

В современной практике ракетостроения существует несколько основных способов защиты от аэродинамического нагрева: 1) поглощение тепла тепловым стоком; 2) принудительное охлаждение; 3) радиационное излучение и 4) применение теплозащитных покрытий.

Способ теплового стока заключается в поглощении аэродинамического потока q толстым слоем неразрушающегося материала, которым покрывается стенка летательного аппарата (рис. 14.1.1). В качестве такого материала используются графит, медь и другие материалы, обладающие большой теплоемкостью. На внешнюю поверхность теплопоглощающего слоя напылением можно нанести тонкий слой из низкотеплопроводного материала. Наличие экрана из такого материала существенно увеличивает излучение теплового потока $q_{\text{рад}}$ с поверхности. Однако теплозащитная способность существующих материалов недостаточно высока и поэтому вес таких теплозащитных систем велик. Например, килограмм меди до плавления способен поглотить всего 110 *ккал*. Поэтому способ теплового стока может быть использован для тепловой защиты аппаратов, испытывающих в полете воздействия небольших тепловых потоков.

Способ принудительного охлаждения (рис. 14.1.2) заключается в следующем. Через перфорированную или пористую стенку летательного аппарата в пограничный слой вдувается газ, который, нагреваясь, поглощает некоторое количество тепла. Лучше всего для этой цели использовать легкие газы с малым молекулярным весом, например гелий. Могут применяться также воздух, азот и другие газы. Разновидностями принудительного охлаждения являются испарительное и пленочное охлаждения, при которых через пористую стенку подается жидкость, испаряющаяся либо внутри пористой стенки (испарительное охлаждение), либо на ее поверхности (пленочное охлаждение). Жидкость должна обладать по возможности максимальной теплотой испарения при сравнительно низкой температуре испарения. Несмотря на приемлемые весовые характеристики расхода жидкости или газа, этим способом не всегда можно воспользоваться из-за конструктивных трудностей.

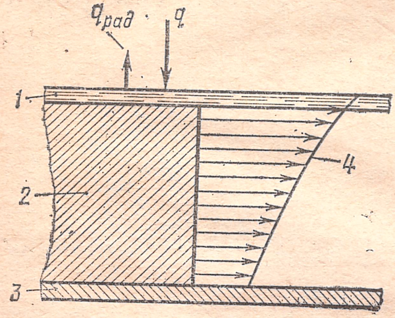


Рис. 14.1.1. Применение теплового стока для защиты летательного аппарата от нагрева:

1 — напыляемый экран; *2* — теплопоглощающий материал; *3* — стенка корпуса летательного аппарата; *4* — профиль температуры

Радиационный способ теплозащиты отличается сравнительной простотой ее конструкции. Основным элементом этой

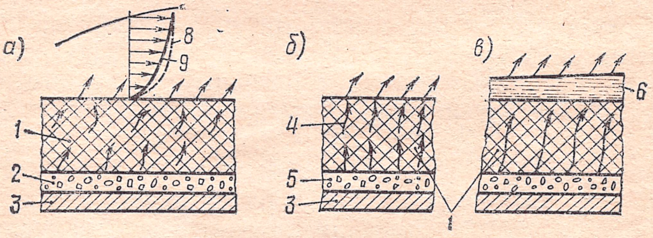


Рис. 14.1.2. Схема принудительного охлаждения:

а — охлаждение с помощью вдуваемого газа; *б* — испарительное охлаждение; *в* — пленочное испарение; *1* — пористый материал; *2* — вдуваемый газ; *3* — стенка летательного аппарата; *4* — зона испарения; *5* — жидкость; *6* — жидкая пленка; *7* — пограничный слой; *8* — профиль температуры без вдува; *9* — профиль температуры со вдувом

конструкции является радиационный экран, который может представлять собой тонкий лист тугоплавкого металла (молибден, вольфрам, ниобий и др.) или пленку окисла (например, ZrO_2, SiO_2). Такой экран устанавливается либо над защищаемой конструкцией (рис. 14.1.3, *а*), либо непосредственно на ней (рис. 14.1.3, *б*). В последнем случае для уменьшения притока тепла q внутрь между конструкцией и экраном располагают слой материала с низкой теплопроводностью, например пористую керамику или стекло. При нагреве часть тепла $q_{\text{рад}}$ расходуется на излучение и поэтому не происходит чрезмерного нагрева конструкции аппарата.

Исследования показывают, что, так как прочность известных в настоящее время тугоплавких материалов и окислов сохраняется при температурах, не превышающих 2600 K, способ радиационной защиты можно использовать только при воздействии тепловых потоков, не превышающих примерно 200 $ккал/(м^2 \times сек)$ $(8{,}38 \cdot 10^5\ вт/м^2)$. Таким образом, область применения этого способа защиты ограничена сравнительно небольшими тепловыми потоками. Однако продолжительность их действия довольно велика и может составлять 100 *сек* и более.

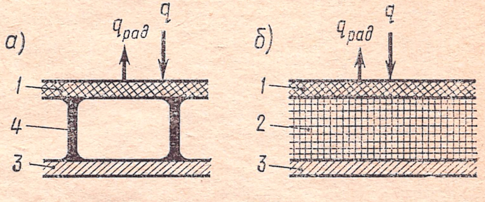


Рис. 14.1.3. Схема радиационной теплозащиты летательного аппарата:

1 — радиационный экран; 2 — теплоизолирующий слой; 3 — стенка летательного аппарата; 4 — силовой элемент конструкции

Пленки окислов и керамика очень хрупкие материалы, легко растрескиваются при нагревании и ударных нагрузках. Поэтому в тех случаях, когда такие ударные нагрузки имеются (например, при перераспределении или изменении интенсивности скачков уплотнения в зависимости от величины угла атаки), нельзя применять окислы или керамическую изоляцию.

Теплозащитные покрытия используют достаточно эффективно как на аппаратах, подвергающихся воздействию больших, но кратковременных тепловых потоков (баллистический спуск), так и на аппаратах, испытывающих воздействие сравнительно небольших тепловых потоков в течение длительного времени (спуск с аэродинамическим качеством). Реализация этого способа защиты довольно проста. На поверхности летательного аппарата монтируют, приклеивают или напыляют слой достаточно низкотеплопроводного материала, который под влиянием теплового потока нагревается и начинает разрушаться. Продукты разрушения уносятся с поверхности омывающим потоком газа, поглощая и рассеивая в окружающее пространство большое количество подводимого этим потоком тепла. Таким образом, унос массы материала покрытия следует рассматривать как важнейшее средство тепловой защиты спускаемого аппарата. В результате разрушения толщина теплозащитного покрытия уменьшается. Подобрав соответствующую величину этой толщины, можно обеспечить необходимый температурный режим конструкции.

В зависимости от способа разрушения материалы теплозащитных покрытий подразделяют на три основные группы: сублимирующие, плавящиеся и коксующиеся. Все эти процессы разрушения объединяют под общим понятием абляции, или уноса массы, которое имеет исключительно важное значение в решении проблем тепловой защиты летательных аппаратов. Достоинство этого способа защиты наряду с высокой эффективностью — его большая надежность. При этом выбор минимальной толщины теплозащитного покрытия зависит от способа его разрушения.

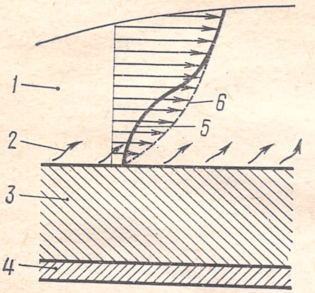


Рис. 14.1.4. Схема сублимирующего теплозащитного покрытия:

1 — пограничный слой; 2 — газообразные продукты разрушения; 3 — сублимирующий материал; 4 — силовая конструкция (стенка) летательного аппарата; 5 — профиль температуры с учетом продуктов разрушения; 6 — профиль температуры без учета продуктов разрушения

К сублимирующим относят покрытия, которые разрушаются при нагреве с образованием только газовой фазы. Наиболее типичными представителями этой группы являются фторопласт, графит (при его разогреве до температуры выше 3000 К). Поступающие в пограничный слой газообразные продукты разрушения уменьшают тепловой поток (рис. 14.1.4).

К плавящимся относят покрытия, образующие при нагреве жидкую фазу. Такими покрытиями являются материалы, выполненные на основе стекла или кварца, полимерные вещества, например оргстекло, полиэтилен и некоторые другие. Образующаяся в результате нагрева жидкая пленка течет под влиянием сил аэродинамического трения и уносится с поверхности, уменьшая нагрев. При этом часть расплава с поверхности пленки испаряется (рис. 14.1.5). Это испарение повышает эффективность таких покрытий, так как существенная доля тепла расходуется на скрытую теплоту испарения, которая, например, для кварца составляет 2400 *ккал/кГ* ($1{,}01 \cdot 10^7$ *дж/кг*).

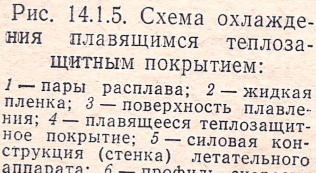


Рис. 14.1.5. Схема охлаждения плавящимся теплозащитным покрытием:

1 — пары расплава; 2 — жидкая пленка; 3 — поверхность плавления; 4 — плавящееся теплозащитное покрытие; 5 — силовая конструкция (стенка) летательного аппарата; 6 — профиль скорости движения жидкой пленки

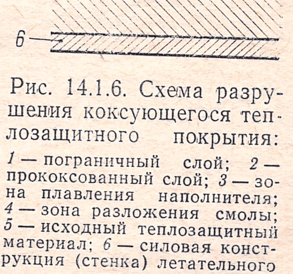


Рис. 14.1.6. Схема разрушения коксующегося теплозащитного покрытия:

1 — пограничный слой; 2 — прококсованный слой; 3 — зона плавления наполнителя; 4 — зона разложения смолы; 5 — исходный теплозащитный материал; 6 — силовая конструкция (стенка) летательного аппарата

Коксующимся относят покрытия, разрушение которых при нагреве представляет собой процесс, сходный с газификацией при коксовании. К этой группе коксующихся покрытий будем относить материалы, выделяющие газообразные продукты в процессе пиролиза. Коксующиеся (пиролизные) покрытия представляют собой композиции из наполнителя и связующего. Примером коксующихся материалов является фенольный нейлон, в состав которого входит нейлоновая ткань, пропитанная фенольной смолой. В результате полимеризации смола затвердевает и получается армированный слоистый пластик. В качестве наполнителя можно использовать стекло, асбест, графит, полимеры и другие материалы в виде тканей, отдельных нитей или зерен, в качестве связующего — эпоксидные и фенольные смолы, каучуки и другие полимеры. Картина разрушения такого покрытия представлена на рис. 14.1.6. Поступающие в пограничный слой газифицированные продукты коксования (пиролиза) снижают тепловой поток. Применение покрытий из коксующихся материалов — эффективное средство теплозащиты.

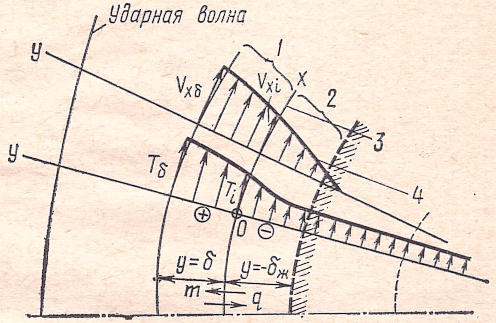


Рис. 14.1.7. Схема двухфазного пограничного слоя на оплавляющейся затупленной поверхности:

1 — газовый пограничный слой; 2 — жидкий слой; 3 — поверхность раздела; 4 — твердая среда; $y=\delta$ — толщина газовой фазы пограничного слоя; $y=-\delta_ж$ — толщина жидкой фазы пограничного слоя; m — полный удельный унос массы разрушенного материала; q — аэродинамический поток тепла; T_i — температура поверхности

Приведенное деление теплозащитных покрытий достаточно условно, поскольку, например, часть расплавившегося материала, как уже отмечалось, испаряется, повышая тем самым эффект охлаждения. При этом может оказаться, что если тепловые потоки очень велики, а силы аэродинамического трения незначительны, то весь расплав будет испаряться и плавящийся материал по характеру уноса может быть близок к сублимирующему. И, наоборот, при слабых тепловых потоках и больших напряжениях трения сублимирующий материал может размягчаться и течь как плавящийся.

Практически для большинства используемых теплозащитных материалов процесс абляции начинается с оплавления поверхности, в результате чего образуется тонкая пленка расплавленного материала, которую можно назвать жидкой (первой) фазой пограничного слоя. Вторую фазу формирует газовый поток, омывающий аблирующую поверхность (рис. 14.1.7). На этой стадии подводимого тепла недостаточно, чтобы вызвать испарение и тем оказать влияние на газовую среду. Кроме того, поскольку вязкость расплавленной массы велика, жидкий слой будет течь с очень малыми тангенциальными скоростями по сравнению с газом. Например, расчеты показывают, что отношение местных скоростей на внешних границах жидкой и газовой фаз в обычных условиях очень больших скоростей полета $V_{xi}/V_{x\delta}\approx 5\cdot 10^{-4}$. Следовательно, можно предположить, что поток в газовой фазе практически не зависит от наличия жидкого слоя. Иными словами, газовая фаза ведет себя как обычный пограничный слой. Увеличение теплового потока и повышение температуры может повлечь за собой испарение некоторого количества расплавленного вещества. При этом пар проникает внутрь газовой фазы.

В инжекции пара находит свое выражение взаимодействие между жидкой пленкой расплавленного вещества и газообразным пограничным слоем, которое приводит к уменьшению аэродинамического теплового потока к обтекаемой поверхности и, как следствие, к снижению нагрева. Если температура поверхности приближается к температуре кипения, то практически весь жидкий слой испаряется и в газовую фазу поступает наибольшее количество пара.

Такова упрощенная физическая схема процесса абляции в виде двухфазного пограничного слоя. Процесс абляции в действительности имеет, конечно, более сложный характер. Так как основной эффект абляции заключается в поглощении уносимого массой тепла, то весьма важно знать, какова эта теплота абляции. При этом, как увидим из дальнейшего, по значению теплоты абляции можно рассчитать количество уносимого вещества.

§ 14.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОТЫ АБЛЯЦИИ

Сублимация, полное испарение или коксование (пиролиз)

Полное испарение расплавившейся массы и сублимация (для материалов, которые испаряются, минуя жидкую фазу) относятся к предельному случаю абляции, характеризующемуся очень большой вязкостью теплозащитного вещества. Получающееся значение теплоты абляции будет максимальным и не зависящим от вязкости.

Физические процессы при сублимации и испарении сходны с явлениями абляции при коксовании, так как в каждом из этих случаев имеет место воздействие на пограничный слой газообразных продуктов разрушения покрытия. Поэтому можно получить общие зависимости для расчета теплоты абляции и уноса массы теплозащитного покрытия.

Чтобы найти общее выражение для теплоты абляции, рассмотрим уравнение баланса тепла при стационарной абляции. Уравнение баланса тепла, отнесенного к аблирующей массе, выражает условие, при котором аэродинамический тепловой поток q_i, подводимый к этой массе, расходуется на ее нагревание, испарение и частично излучается ($q_{\text{из}}$). Следовательно,

$$q_i = m_v(c_p T_i + i_v) + q_{\text{из}}, \tag{14.2.1}$$

где m_v — удельный поток массы разрушающегося материала, называемый скоростью уноса (абляции); T_i — температура поверхности; c_p — теплоемкость материала. Величина i_v может рассматриваться как энтальпия сублимации или, при полном испарении, как энтальпия испарения (скрытая теплота испарения). При коксовании i_v представляет собой энтальпию газификации.

Аэродинамический поток тепла q_i, подводимый и поглощаемый при наличии абляции, как указывалось, меньше количества тепла q, подводимого к рассматриваемой массе при отсутствии абляции. В этом снижении нагрева, обусловленном инжекцией пара в пограничный слой, заключается эффект выпотевания, определяющий снижение теплопередачи на величину

$$\Delta q = q - q_i. \tag{14.2.2}$$

Как показывают исследования, величина

$$\Delta q = q(1-\psi), \tag{14.2.3}$$

где параметр ψ зависит от характера пограничного слоя, удельного потока уносимой массы m_v, скорости движения тела (числа $\mathbf{M}_\infty$), молекулярного веса паров $\overline{\mu}_v$.

Экспериментально установлено, что

$$\psi = 1 - (\beta m_v/q)(i_0 - i_{\text{ст}}), \tag{14.2.4}$$

где i_0 — энтальпия воздуха при изэнтропическом торможении; β — коэффициент выпотевания; для ламинарного и турбулентного пограничных слоев

$$\beta_{\text{л}} = N(29/\overline{\mu}_v)^{\overline{\alpha}}, \quad \beta_{\text{т}} = \beta_{\text{л}}/3, \tag{14.2.5}$$

где в соответствии с экспериментальными данными в зависимости от вида покрытия

$$0{,}67 \leqslant N \leqslant 0{,}72; \ 0{,}25 \leqslant \overline{\alpha} \leqslant 0{,}4. \tag{14.2.6}$$

В частности, для стекловидных материалов можно принять $N = 0{,}68$, $\overline{\alpha} = 0{,}26$.

Применяя формулу (14.2.4), следует иметь в виду, что она дает удовлетворительные результаты в интервале $0{,}2 \leqslant \beta \leqslant 4$.

Молекулярный вес $\overline{\mu}_v$ паров пластмассы и стекла приблизительно совпадает с молекулярным весом воздуха. Если принять ориентировочно $\overline{\mu}_v \approx 0{,}29$, $N = 0{,}68$, то коэффициенты, определяемые (14.2.5), будут соответственно $\beta_{\text{л}} \approx 0{,}7$ и $\beta_{\text{т}} = 0{,}23$.

В уравнении (14.2.1), в котором температуру T_i можно принимать приблизительно равной температуре испарения, член в круглых скобках представляет собой теплоту абляции. Если она каким-либо путем определена, а также известна величина q_i, то, очевидно, можно вычислить унос m_v.

Практически удобнее пользоваться понятием эффективной теплоты абляции, определяемой выражением

$$q^* = q/m_v. \tag{14.2.7}$$

В соответствии с этим выражением при стационарном нагреве подведенное через обычный газообразный пограничный слой к единичной поверхности за некоторое время t количество тепла qt равно тепловому потоку $q^* m_v t$, поглощенному уносимой с этой поверхности массой разрушенного материала.

Имея зависимость ψ (14.2.4), можно при помощи уравнений (14.2.1) — (14.2.3) получить формулу для эффективной теплоты абляции. С этой целью, принимая во внимание (14.2.7), напишем (14.2.1) в виде

$$\frac{q_i}{q}=\frac{1}{q^*}(c_p T_i+i_v)+\frac{q_{\text{из}}}{q}. \tag{14.2.8}$$

Кроме того, из (14.2.2) — (14.2.4) найдем

$$\frac{q_i}{q}=\psi=1-\frac{\beta}{q^*}(i_0-i_{\text{ст}}). \tag{14.2.9}$$

Из полученных зависимостей определяем

$$q^*=[c_p T_i+i_v+\beta(i_0-i_{\text{ст}})]/(1-q_{\text{из}}/q), \tag{14.2.10}$$

где удельный поток от излучения в соответствии с (13.1.28)

$$q_{\text{из}}=\varepsilon\sigma T_i^4. \tag{14.2.11}$$

Для ряда материалов получены экспериментальные данные, позволяющие оценить некоторые характеристики и теплоту абляции. В частности, получены данные для такого коксующегося полимерного материала, как тефлон $(C_2F_4)_n$. Этот полимер при тепловом воздействии подвергается пиролизу, в результате чего твердое тело газифицируется в мономер C_2F_2. Основные физические и термодинамические параметры для тефлона: температура абляции при ламинарном нагреве $T_i=445$ K; энтальпия $i_v=416$ *ккал/кГ*; молекулярный вес пара $\bar{\mu}_v=100$; теплоемкость $c_p=0{,}25$ *ккал/(кГ·град)*. Подставляя эти данные в (14.2.10) и полагая $\beta=0{,}5$, находим q^* (*ккал/кГ*):

$$q^*=[527+0{,}5(i_0-i_{\text{ст}})]/(1-q_{\text{из}}/q). \tag{14.2.12}$$

Для пластмассы в виде фенольного нейлона, являющейся также коксующимся теплозащитным покрытием, найдена формула, аналогичная (14.2.12):

$$q^*=[832+0{,}5(i_0-i_{\text{ст}})]/(1-q_{\text{из}}/q). \tag{14.2.13}$$

Особенность этой пластмассы заключается в том, что остающийся после ее испарения углеродистый осадок в виде мелкодисперсной твердой фазы в результате сильного перегревания интенсивно излучает.

Для некоторых материалов тепловой поток, подводимый к поверхности стенки, может увеличиться вследствие горения паров в кислороде воздуха, диффундирующем в газовый слой. Это увеличение теплового потока [*ккал*/(*м*^{2}·*сек*)] в случае горения в ламинарном пограничном слое, как показывают исследования,

$$\Delta q_i = 0{,}21 i_{\text{г}} (q_i/i_0), \qquad (14.2.14)$$

где $i_{\text{г}}$ — теплота сгорания, приходящаяся на единицу массы кислорода, *ккал*/*кГ*.

В соответствии с этим в (14.2.1) вместо q_i войдет величина $q_i + \Delta q_i$ и новое уравнение баланса тепла примет вид

$$q_i + \Delta q_i = m_v (c_p T_i + i_v) + q_{\text{из}}, \qquad (14.2.15)$$

или

$$\frac{q_i}{q}\left(1 + \frac{\Delta q_i}{q_i}\right) = \frac{1}{q^*}(c_p T_i + i_v) + \frac{q_{\text{из}}}{q} .$$

Подставляя сюда значение q_i/q из (14.2.9), получим

$$q^* = [c_p T_i + i_v + (1 + \bar{q}_{\text{г}})(i_0 - i_{\text{ст}})\beta]/(1 + \bar{q}_{\text{г}} - q_{\text{из}}/q), \qquad (14.2.16)$$

где в соответствии с (14.2.14)

$$\bar{q}_{\text{г}} = \Delta q_i/q_i = 0{,}21 i_{\text{г}}/i_0. \qquad (14.2.14')$$

Исследования показывают, что таким свойством диффузии паров и их сгорания в пограничном слое обладает аблирующий тефлон. В результате сгорания мономер C_2F_2 превращается в соединение COF_2. Эффект сгорания обусловливает увеличение потока тепла к стенке и, как следствие, снижение эффективной теплоты абляции. Согласно экспериментальным данным, теплота сгорания тефлона $i_{\text{г}} = 5550$ *ккал*/*кГ*, и соответствующее выражение для эффективной теплоты абляции q^* (*ккал*/*кГ*) будет иметь вид

$$q^* = [527 + 0{,}5(1 + 1165/i_0)(i_0 - i_{\text{ст}})]/(1 + 1165/i_0 - q_{\text{из}}/q). \qquad (14.2.17)$$

Одновременное плавление и сублимация (испарение)

Чтобы материал теплозащитного покрытия обладал высокой эффективной теплотой абляции и малой теплопроводностью, необходимо применять комбинированные жаропрочные покрытия. К их числу относят, например, пластмассы в сочетании со стеклом, обладающим высокой вязкостью и низкой теплопроводностью. Особенность таких стеклопластиков или вообще подобных комбинированных материалов заключается в том, что при сильном тепловом воздействии они вначале ведут себя как поглотители тепла. Затем вследствие низкого коэффициента теплопроводности температура их поверхности быстро возрастает до уровня, при котором возможно одновременное плавление и сублимация различных компонентов. Наблюдения показывают, что при использовании стекловолокна одна его составляющая — стекло — оплавляется, другая — пластмасса — сублимирует.

При высоких температурах поверхности, превышающих температуру плавления, испарение части расплавленной массы характерно для большинства материалов, в том числе стекловидных. При этом испарению предшествует пиролиз поверхностного слоя расплавившегося материала, в результате чего дополнительное количество газа диффундирует в газообразный пограничный слой. Таким образом, абляция в наиболее общем случае характеризуется одновременным плавлением и сублимацией (испарением). Эта особенность должна быть учтена при определении эффективной теплоты абляции. Если обозначить через m полный удельный унос массы, то степень сублимации (испарения), называемую коэффициентом газообразования, можно определить как отношение $\overline{m}=m_v/m$. В соответствии с этим уравнение теплового баланса, аналогичное (14.2.1), напишем в виде

$$q_i=mc_pT_i+m_vi_v+q_{\text{из}}=m(c_pT_i+\overline{m}i_v)+q_{\text{из}}. \qquad (14.2.18)$$

Эффективную теплоту абляции определим отношением

$$q^*=q/m, \qquad (14.2.19)$$

а коэффициент ψ (14.2.4) с учетом (14.2.19) и $m_v=\overline{m}m$ запишем в форме

$$\psi=1-(\beta\overline{m}m/q)(i_0-i_{\text{ст}})=1-(\beta\overline{m}/q^*)(i_0-i_{\text{ст}}). \qquad (14.2.20)$$

Разделив (14.2.18) на q, найдем

$$\frac{q_i}{q}=\frac{1}{q^*}(c_pT_i+\overline{m}i_v)+\frac{q_{\text{из}}}{q}. \qquad (14.2.21)$$

Комбинируя (14.2.2), (14.2.3) и (14.2.20), получим

$$\frac{q_i}{q}=1-\frac{\beta\overline{m}}{q^*}(i_0-i_{\text{ст}}). \qquad (14.2.22)$$

Из (14.2.21) и (14.2.22) эффективная теплота абляции

$$q^*=\{c_pT_i+\overline{m}[i_v+\beta(i_0-i_{\text{ст}})]\}/(1-q_{\text{из}}/q). \qquad (14.2.23)$$

Здесь неизвестны температура абляции T_i, энтальпия испарения i_v и коэффициент $\overline{m}$. Для упрощения расчетов можно с достаточной степенью точности температуру T_i принять равной температуре плавления — величине известной и постоянной. В частности, температура плавления стекла равна примерно 1700 К. Энтальпия испарения i_v обычно определяется опытным путем. Для приближенных расчетов абляции стекловидных материалов можно воспользоваться, например, величиной $i_v=2470$ *ккал/кГ* ($1{,}04\cdot10^7$ *дж/кг*), полученной для кремния. По экспериментальным данным, для чистого кварца $i_v=3000$ *ккал/кГ* ($1{,}25\cdot10^7$ *дж/кг*). Величина коэффициента $\overline{m}$ определяется главным образом упругостью паров и вязкостью расплавленного компонента, зависящих в свою очередь от температуры и условий обтекания.

Имеются и другие данные о характере изменения $\overline{m}$. Например, с увеличением давления или уменьшением энтальпии торможения будет уменьшаться коэффициент $\overline{m}$. При грубой оценке этот коэффициент можно определить как отношение массы сублимирующего компонента ко всей массе теплозащитного материала. Рассматривая «чистую» сублимацию, т. е. полагая $\overline{m}=1$, находим из (14.2.23)

$$(q^*)_{\overline{m}=1}=(c_p T_i+\tilde{q})/(1-q_{\text{из}}/q),$$

где $\tilde{q}=i_v+\beta(i_0-i_{\text{ст}})$.

В соответствии с этим для произвольных значений $\overline{m}\neq 1$

$$q^*=(q^*)_{\overline{m}=1}+(\overline{m}-1)\,\tilde{q}\,(1-q_{\text{из}}/q)^{-1}. \qquad (14.2.24)$$

По экспериментальным данным, для стекловолокна, содержащего 30% пластмассы и 70% стекла,

$$\tilde{q}=0{,}554\,(7430+5{,}38\cdot 10^{-5}V_\infty^2)\ \text{ккал/кГ}; \qquad (14.2.25)$$

$$(q^*)_{\overline{m}=1}=0{,}554\,(8580+5{,}38\cdot 10^{-5}V_\infty^2)\ \text{ккал/кГ}, \qquad (14.2.26)$$

где V_∞ — скорость, *м/сек.*

Если величина $\overline{m}$ не известна заранее, то для оценки процесса абляции задаются рядом возможных значений $\overline{m}\leqslant 1$, например 1; 0,5; 0,25, и определяют соответствующую эффективную теплоту абляции для различных точек траектории.

Следует иметь в виду, что случай сублимации, которому соответствует формула (14.2.26), для тугоплавких и негорящих материалов, подобно кварцу, нереален, т. е. получить условия, при которых бы достигалось равенство $\overline{m}=1$, практически невозможно. Особенностью кварца как тугоплавкого материала является высокая температура поверхности, примерно 2200÷2300 K. Следовательно, влияние излучения на эффективную теплоту абляции будет значительным. При этом излучаемый поток тепла можно увеличить, делая материал менее прозрачным. Кварц, например, становится практически полностью непрозрачным ($\varepsilon\approx 1$), если прибавить к нему углеродистую массу. При значительном излучении с поверхности эффективная теплота абляции в соответствии с формулой (14.2.24) достигает настолько большой величины, что унос массы будет пренебрежимо мал. В этом случае поверхность интенсивно охлаждается излучением, а теплопередача близка к состоянию радиационного равновесия. Материал в этих условиях практически ведет себя как тепловой сток.

Явление полного радиационного равновесия может возникнуть при плавном изменении небольшого удельного теплового потока (например, у постепенно снижающегося спутника), когда возможно равенство между излучаемым и подводимым теплом. В этом предельном случае $q^*\to\infty$, а унос массы стремится к нулю. Таким образом, в условиях радиационного равновесия, свойственных планирующим летательным аппаратам, материал выступает в качестве теплоизолирующего покрытия.

Если же рассматривать головные части ракет, подвергающиеся воздействию значительно бо́льших тепловых потоков в течение коротких промежутков времени, за которые температура не успевает достичь своего равновесного значения, то здесь защитная роль покрытия как аблирующего материала оказывается более существенной, чем в случае обычной тепловой изоляции.

Наряду с формулами (14.2.24) — (14.2.26) можно применять экспериментальную зависимость для q^* (*ккал/кГ*), найденную по результатам исследования абляции стекловидного вещества (содержит 30% пластмассы и 70% стекла) в окрестности точки полного торможения при ламинарном пограничном слое:

$$q^* = \{125 + 2{,}7 i_0/(RT_{\infty з}) + 178\,(\rho_{\infty н}/\rho_{\infty з})^{1/(3+n)} \times \\ \times [i_0/(RT_{\infty з})]^{3{,}64(3+n)}\}\,(1 - q_{из}/q)^{-1}, \qquad (14.2.27)$$

где для атмосферного воздуха у Земли $RT_{\infty з} = 18{,}8$ *ккал/кГ* ($7{,}88 \times 10^{14}$ *дж/кг*), а для полета при очень больших скоростях можно принять $n = 10$.

Плавление

Плавление, как и сублимация, является предельным случаем процесса абляции. Если материал плавится, но не испаряется, то при уносе массы пограничный слой не испытывает влияния аблирующего вещества. В этом случае для определения эффективной теплоты абляции в формуле (14.2.23) следует принять коэффициент газообразования $\bar{m} = 0$; тогда

$$q^* = c_p T_i/(1 - q_{из}/q), \qquad (14.2.28)$$

где c_p — теплоемкость жидкого материала.

В соответствии с выражением (14.2.28) поток тепла, определяемый разностью $q - q_{из}$, должен быть целиком поглощен жидкостью, обладающей теплоемкостью c_p, т. е.

$$q - q_{из} = q c_p T_i/q^* = m c_p T_i.$$

Сравнивая выражение (14.2.28) с формулами (14.2.10) и (14.2.23), видим, что эффективная теплота плавления меньше, чем при одновременном плавлении и испарении и тем более при полном испарении (или сублимации). Это показали также экспериментальные исследования абляции стекловидного вещества. Соответствующая зависимость для q^* (*ккал/кГ*), получаемая из эмпирической формулы (14.2.27), в которой сохраняется последнее слагаемое, характеризующее абляцию только плавлением, имеет следующий вид:

$$q^* = 178\,(\rho_{\infty н}/\rho_{\infty з})^{1/(3+n)}\,[i_0/(RT_{\infty з})]^{3{,}64/(3+n)}\,(1 - q_{из}/q)^{-1}. \qquad (14.2.29)$$

К материалам, аблирующим плавлением, относятся также металлы. Для некоторых из них (сталь, алюминий) получены экспериментальные данные, позволяющие судить о величине эффективной теплоты абляции (см. специальную литературу).

§ 14.3. УНОС МАССЫ И ЭФФЕКТИВНОСТЬ ТЕПЛОЗАЩИТНОГО ПОКРЫТИЯ

Если известна эффективная теплота абляции q^*, то, как следует из (14.2.19), количество уносимой массы в единицу времени

$$m=q/q^*. \qquad (14.3.1)$$

Здесь удельный тепловой поток q вычисляют методами аэродинамики, изложенными в гл. XIII, а эффективную теплоту абляции q^* — с учетом экспериментальных данных по формулам (14.2.13), (14.2.17), (14.2.24), (14.2.27), (14.2.29) для различных видов местной абляции, а именно: плавления, одновременного плавления и испарения, а также сублимации (газификации).

По величине q применительно к заданной форме затупленной поверхности рассчитывают среднее значение теплового потока:

$$q_{\text{ср}}=\frac{1}{S}\int\limits_{(S)} q\,dS, \qquad (14.3.2)$$

где S — площадь поверхности затупления.

Унос массы с поверхности S за время нагрева τ

$$Q_{\text{ср}}=m_{\text{ср}}\tau S, \qquad (14.3.3)$$

где $m_{\text{ср}}=q_{\text{ср}}/q^*$.

Вычисления дадут, естественно, неодинаковые значения величины $m_{\text{ср}}$ для различных материалов. Как показывают расчеты, при больших скоростях унос массы, например, у стекловолокна и кварца, меньше, чем у стекловидного вещества или тефлона. Однако, чтобы сделать окончательный вывод об эффективности покрытий, необходимо рассчитать толщину слоя и соответствующий вес теплозащитного покрытия, используя методы теории теплопроводности. При этом задаются температура наружной поверхности и допустимая температура на внутренней стороне слоя. В результате такого расчета может выясниться, что необходимая для поглощения тепла масса вещества теплозащитного покрытия с меньшим уносом вследствие повышенной температуры наружной поверхности больше, чем у вещества с увеличенной абляцией. В связи с этим окажется бо́льшим и вес теплозащитного материала. По этой причине, как показывают расчеты, в некоторых случаях обтекания менее предпочтительными были такие теплозащитные материалы, как стекловолокно и кварц, обладающие небольшим уносом.

Такой анализ должен практически проводиться с учетом изменения по времени теплового потока, поступающего к поверхности. Если это изменение протекает быстро, а процесс абляции принимается стационарным, то вследствие низкого коэффициента теплопроводности тепло внутрь тугоплавкого материала будет проникать медленнее по сравнению со скоростью абляции. Отсюда следует, что изоляция с внутренней стороны аблирующего материала может и не потребоваться. Кроме того, когда тепловой поток подводится в течение длительного времени и унос масс не имеет существенного значения, может потребоваться дополнительное количество тугоплавкого материала, выполняющего функции теплоизолирующего покрытия.

При окончательном выборе защитного материала должны приниматься во внимание также его механические свойства. Рассмотрим некоторые зависимости, позволяющие в какой-то мере оценить правильность такого выбора [5], связанного с определением потребной толщины изоляции для обеспечения заданного температурного перепада на ее внешней и внутренней стенках. При вычислении толщины изоляции используют формулу

$$\delta_и = \sqrt{a\tau/\varphi}, \qquad (14.3.4)$$

где $\delta_и$ — толщина изоляции; $a=\lambda/(c\gamma)$ — коэффициент температуропроводности (λ — коэффициент теплопроводности, γ — удельный вес, c — теплоемкость защитного материала); τ — время нагрева; φ — критерий Фурье.

По толщине и удельному весу защитного материала можно определить вес 1 $м^2$ листового покрытия потребной термоизоляции:

$$G_и = \delta_и\gamma = \gamma\sqrt{a\tau/\varphi}. \qquad (14.3.5)$$

Так как $a=\lambda/(c\gamma)$, то

$$G_и = \sqrt{\lambda\gamma/c}\,\sqrt{\tau/\varphi}. \qquad (14.3.5')$$

Здесь величина $\sqrt{\lambda\gamma/c}$, зависящая от физических свойств материала покрытия, может рассматриваться как критерий, определяющий при заданных внешних условиях обтекания и соответствующем этим условиям значении параметра $\sqrt{\tau/\varphi}$ потребный вес термоизоляции.

Как показывают исследования, материалы из пористой изоляции отличаются сравнительно низкими механическими качествами и легко разрушаются даже под действием слабых ударных нагрузок. Поэтому, хотя они и имеют наименьшее значение весового критерия, применять их в качестве теплозащитных покрытий нецелесообразно. Наиболее перспективным материалом из группы слоистых пластиков является асбестовый картон, для которого весовой критерий будет наименьшим.

Согласно опытным данным предельные температуры применения слоистых пластиков соответствуют длительному воздействию высокой температуры (многие часы). При одноразовой кратковременной работе (отдельные минуты) они могут применяться даже при очень высоких температурах набегающего потока в несколько тысяч градусов. При этом верхний слой будет подвергаться эрозии и сублимации, что вызовет уменьшение толщины пластика.

ГЛАВА XV

АЭРОДИНАМИКА РАЗРЕЖЕННОЙ СРЕДЫ

§ 15.1. ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Экспериментальные данные об обтекании тел, полученные для условий разреженной среды, значительно отличаются от значений силовых и моментных характеристик, а также параметров трения и теплопередачи, вычисленных по газодинамическим соотношениям для сплошной среды. Такое различие объясняется структурой этих соотношений, соответствующей гипотезе сплошности среды. Для разреженной атмосферы эта гипотеза недействительна и необходимо пользоваться кинетической теорией, исследующей динамику газа с помощью молекулярной механики. Основные выводы этой теории основываются на принятии дискретной схемы строения, согласно которой среда состоит из соударяющихся молекул, пробегающих достаточно большой свободный путь. Не рассматривая подробно кинетическую теорию газов, остановимся лишь на тех сведениях, которые необходимы для понимания физических явлений, а также для осуществления аэродинамических расчетов, связанных с полетами в разреженной среде.

Длина пути свободного пробега молекул

Рассмотрим вопрос, связанный с пределами применимости тех теоретических зависимостей, которые основывались на предпосылке о сплошности газовой среды. При этом необходимо отметить, что пределы применимости носят условный характер, так как, например, невозможно точно указать высоту атмосферы, выше которой надо применять только молекулярную теорию. Для установления этих пределов следует определить длину свободного пробега молекул. Из физических соображений ясно, что чем она меньше, тем ближе среда к гипотетически сплошной. Течение такой среды характеризуется большим числом соударений между молекулами, определяющими при наличии возмущений малое время релаксации, т. е. время установления равновесия уровней энергии сталкивающихся молекул.

Методы статистической физики устанавливают некоторый средний путь, пробегаемый молекулой до соударения и называемый средней длиной свободного пробега. Эта длина

$$l = \bar{c}t, \tag{15.1.1}$$

где $\bar{c}$ — средняя скорость хаотического движения молекул [см. (15.2.4)]; t — время между двумя соударениями молекулы, определяемое по выражению $t = 1/n$, в котором $n = NA\bar{c}$ — число соударений в единицу времени (где N — число молекул в единице объема, A — площадь поперечного сечения молекулы).

Таким образом,

$$l = 1/(NA). \tag{15.1.1'}$$

Например, для воздуха при нормальных условиях $N = 2{,}69 \times 10^{19}$ *см*$^{-3}$, $A = 10^{-15}$ *см*^{2}; следовательно, длина пути свободного пробега $l = 4 \cdot 10^{-5}$ *см*. Из (15.1.1′) следует, что средняя длина пути свободного пробега увеличивается с уменьшением плотности. Поэтому с подъемом на высоту эта длина возрастает и может оказаться значительно больше размеров летательного аппарата.

Формула (15.1.1′) неудобна для практического применения, так как площадь поперечного сечения молекулы не может быть определена непосредственным измерением. Лучше пользоваться зависимостью для l, которую можно получить из формулы (1.1.8) кинетической теории газов, определяющей динамический коэффициент вязкости. Внося в (1.1.8) вместо $\bar{c}$ зависимость (15.2.8′), определяющую среднюю скорость через скорость звука a, найдем

$$l = 1{,}255\nu\sqrt{k}/a, \tag{15.1.2}$$

где k — показатель адиабаты; ν — кинематический коэффициент вязкости.

Режимы течения газа

Режимы течения газа зависят от степени разреженности газа, под которой следует понимать отношение средней длины свободного пробега молекул к некоторому характерному линейному размеру рассматриваемой области потока.

Представление об указанных режимах и параметрах, используемых для их оценки, можно получить, если рассматривать течение между двумя пластинками, отделенными друг от друга малым расстоянием δ. Пространство между пластинками заполнено газом, и одна из пластинок перемещается параллельно другой с некоторой скоростью V. При оценке степени разреженности и соответствующего режима течения целесообразно исходить из сравнения средней линии свободного пробега молекул l и расстояния между пластинками δ, т. е. из отношения

$$\frac{l}{\delta} = 1{,}255\,\frac{\nu\sqrt{k}}{V\delta}\cdot\frac{V}{a} = 1{,}255\sqrt{k}\,\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Re}}, \tag{15.1.3}$$

где $\mathrm{Re} = V\delta/\nu$ — число Рейнольдса.

Параметр l/δ называют числом Кнудсена и обозначают $\mathrm{Kn}=l/\delta$. Если число $\mathrm{Kn}\leqslant 0{,}01$, то рассматривают газ как плотную среду. В такой среде вследствие малости средней длины свободного пробега возмущения от соударений со стенкой практически мгновенно передаются на все молекулы, поэтому при исследовании течений применима гипотеза сплошности. Если средняя длина свободного пробега больше расстояния между стенками и число $\mathrm{Kn}\geqslant 10$, то газ следует считать сильно разреженным и гипотеза сплошности оказывается неприменимой. В такой среде обычное понятие о числе **Re** как о параметре, отражающем отношение сил инерции к силам вязкости, не имеет смысла, поскольку столкновения частиц редки и, следовательно, вязкость практически не проявляется. В соответствии со сказанным при определении действующих сил и тепловых потоков необходимо рассматривать ударное воздействие частиц на тело, а не его обтекание сплошным потоком. Оба рассмотренных случая отражают два характерных режима течения. Первый из них представляет собой режим сплошного течения, второй — режим свободномолекулярного потока.

Принято считать, что в элементарном объеме свободномолекулярного потока, несмотря на сильное разрежение и пренебрежимо малое число столкновений, число молекул достаточно для того, чтобы определить свойства газа как макроскопические. Например, на высоте свыше 150 *км* длина свободного пробега молекул равна 3 *м*, что указывает на сильную разреженность воздуха. Между тем число молекул в кубическом сантиметре остается достаточно большим и составляет примерно $1{,}5\cdot 10^{12}$. Для такой разреженной среды давление и массовая плотность могут быть рассчитаны как средние в данном объеме. Свойства течений этой среды определяются на основе максвелловского закона распределения скоростей молекул. Следовательно, применяя этот закон, можно исследовать силы взаимодействия молекул с поверхностью движущегося тела.

Между режимами сплошного и свободномолекулярного течений находятся промежуточный режим ($1\leqslant \mathrm{Kn}\leqslant 10$) и режим течения со скольжением ($0{,}01\leqslant \mathrm{Kn}\leqslant 1$). Промежуточный режим характеризуется тем, что в нем имеют одинаковое значение соударения молекул со стенкой и друг с другом. Условия, соответствующие этому режиму, возникают при полете на высотах приблизительно 100 *км*. В режиме со скольжением, возникающем на высотах, несколько меньших 100 *км*, более существенное значение имеют соударения между молекулами. Но, несмотря на малую по сравнению с линейным размером δ среднюю длину пробега, пренебрегать ею нельзя.

Различие между режимами течения проявляется в неодинаковом профиле скоростей между параллельными пластинками. В сплошном (непрерывном) потоке частицы газа после соударения с движущейся пластинкой приобретают скорость пластинки V и соответствующее количество движения (рис. 15.1.1, *а*). При этом вследствие трения передаваемое соседним частицам количество движения уменьшается, в результате чего уменьшается также их скорость, достигая на поверхности неподвижной пластинки нулевой величины.

В свободномолекулярном потоке (рис. 15.1.1, *б*) частицы после соударения со стенкой не изменяют количества движения по толщине слоя, так как при отскакивании не сталкиваются с другими молекулами. В результате профиль скорости поперек пластинок остается «нулевым». При этом в случае диффузного взаимодействия скорость молекулы у верхней движущейся пластинки *V*, а у неподвижной нижней пластинки она равна нулю. Следовательно, средняя скорость молекул между пластинками равна *V*/2.

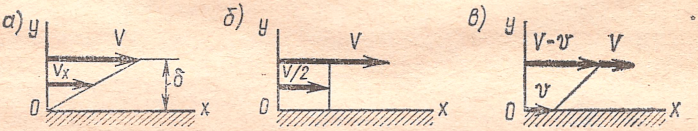


Рис. 15.1.1. Влияние режима течения на характер изменения скорости газа, обтекающего стенку:

а — сплошное течение; *б* — свободномолекулярный поток; *в* — течение со скольжением

Из сказанного ясно, что в свободномолекулярном потоке, обтекающем какое-либо тело, теряет смысл понятие пограничного слоя, так как течение у поверхности имеет ту же скорость, что и на некотором удалении от нее (в обычном представлении — на внешней границе пограничного слоя).

Профиль скорости при течении со скольжением (рис. 15.1.1, *в*) занимает промежуточное положение. Подвижная пластинка, как и в сплошном потоке, передает частицам количество движения, соответствующее скорости движения *V*. При этом отраженные от пластинки частицы, не достигая противоположной стенки, сталкиваются с другими частицами, изменяя их скорость. Это объясняется тем, что средний путь пробега молекул соизмерим с расстоянием δ. Эта скорость движения изменяется непрерывно между пластинками, а профиль скорости по виду будет средним между профилями для сплошного и свободномолекулярного потоков. На нижней пластинке молекулы как бы проскальзывают относительно поверхности с некоторой скоростью *v*, а их скорость на верхней пластинке будет равна, очевидно, разности *V*—*v*. Отсюда объяснимо название «течение со скольжением». При внешнем обтекании тела таким потоком газ на поверхности не «прилипает», а приобретает некоторую, отличную от нуля скорость, меньшую, чем на внешней границе пограничного слоя.

Таким образом, при наличии скольжения вблизи границы имеет место разрыв скорости между газом и самой стенкой. При этом вблизи стенки будет отличен от нуля градиент скорости поперек слоя. Последнее указывает на то, что в не очень сильно разреженком газе, движущемся со скольжением, еще существует пограничный слой. Поэтому движение вблизи поверхности не подчиняется закону Максвелла и можно использовать общие уравнения вязкого теплопроводного сжимаемого газа. Однако их надо пересмотреть с учетом более общих граничных условий, учитывающих возможный разрыв скорости, температуры и давления на поверхности. При этом тот или иной режим течения определяется в соответствии с формулой (15.1.3) соотношением между местными числами **M** и **Re**. Если расстояние между пластинами по величине принять такого же порядка, как толщина слоя в ламинарном течении, то от числа $\mathrm{Re} = V\delta/\nu$ можно перейти к параметру $\mathrm{Re}_L = \mathrm{Re}(L/\delta)$. Заменив в нем отношение δ/L по формуле (12.3.19''), в которой принимается $\bar{x} = 1$ (рассматривается задняя кромка пластинки), и внеся его в (15.1.3), получим зависимость для параметра Кнудсена:

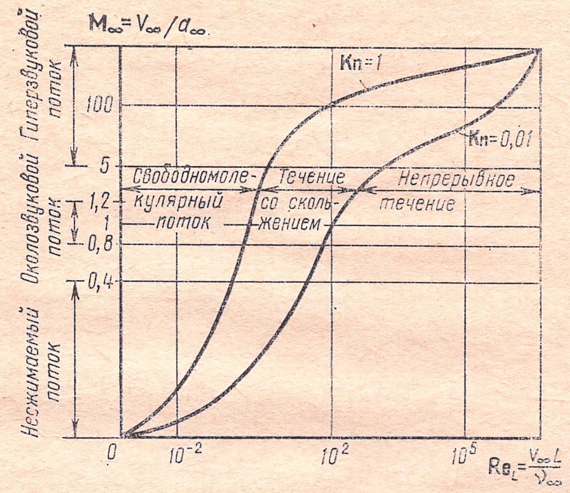


Рис. 15.1.2. Кривые, характеризующие различные режимы течения газа

$$\mathrm{Kn} = l/\delta = 0{,}264 \sqrt{k} \left(\mathrm{M}/\sqrt{\mathrm{Re}_L}\right). \qquad (15.1.4)$$

Эта зависимость для различных режимов графически представлена на рис. 15.1.2, где кривые построены без учета влияния возможных физико-химических превращений воздуха на среднюю длину свободного пробега молекул. При этом нужно иметь в виду, что диссоциация сопровождается, как известно, увеличением числа частиц, обусловливающим уменьшение их среднего пути свободного пробега.

Кривые, изображенные на рис. 15.1.2, строго говоря, относятся к течениям невозмущенного газа. Однако, как показывают исследования, их можно использовать для оценки течения вблизи обтекаемого тела, если исходить из местных значений чисел **M** и **Re**.

При этом обнаружено, что вдали от носка тела вращения, где влияние головной ударной волны небольшое, вследствие перерасширения может возникнуть даже на малых высотах течение со скольжением или свободномолекулярный поток. В то же время вблизи носка уплотнение за ударной волной может привести к образованию сплошной среды даже в тех случаях, когда полет совершается на больших высотах. В этом можно убедиться, если воспользоваться той же формулой (15.1.4) и рассчитать число Кнудсена по местным параметрам газа. При определении этого числа необходимо выбрать характерный линейный размер δ. Так как ожидаемый режим оценивается приближенно, то в качестве величины δ условно выбирают толщину пограничного слоя, рассчитываемую по формулам для сплошной среды.

§ 15.2. ДАВЛЕНИЕ И ТРЕНИЕ В СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНОМ ПОТОКЕ

Схема взаимодействия молекул со стенкой

Исследование движения газа вблизи поверхности связано с решением уравнений движения при определенных граничных условиях, налагаемых на это движение. В частности, при изучении обтекания поверхности сплошной средой граничным условием являлось условие безотрывного обтекания как формы взаимодействия этой поверхности и газовой среды. При свободномолекулярном течении взаимодействие оказывается более сложным.

В теории свободномолекулярного течения выдвинут ряд гипотетических схем взаимодействия молекул со стенкой. Рассмотрим схемы предельного вида взаимодействия — «зеркальное отражение» и «диффузное отражение». В дальнейшем коснемся также промежуточной схемы, принимая, что более близким к реальному будет взаимодействие, представляющее собой комбинацию двух указанных предельных видов отражения.

Зеркальное отражение. Схема зеркального молекулярного отражения реализуется в том случае, если поверхность очень гладкая и наклонена под малым углом атаки. Согласно этой схеме, частицы, подойдя к стенке, после удара отражаются от нее под углом, равным углу атаки (рис. 15.2.1, *а*). Таким образом, в данной схеме молекулы ведут себя подобно абсолютно упругим шарам. При зеркальном отражении абсолютные значения составляющих скорости не меняются, причем касательная составляющая к поверхности сохраняет свой знак, в то время как нормальная составляющая меняет его на обратный. При таком идеальном взаимодействии частиц со стенкой силы трения в обычном понимании отсутствуют. Исследования показали, что даже тщательно отполированные поверхности не являются достаточно гладкими, чтобы полностью реализовалась схема зеркального отражения. Практически по этой схеме отражается лишь незначительная часть молекул, порядка нескольких процентов.

Диффузное отражение. В случае диффузного отражения (рис. 15.2.1, *б*) предполагается, что поверхность имеет шероховатости и щели. Высота бугорков шероховатостей и ширина щелей должны быть соизмеримы с поперечными размерами молекул. Молекулы в результате соударения, попадая в щель или оказываясь между бугорками шероховатостей, практически полностью абсорбируются стенкой, передавая ей свой импульс и энергию, а затем по истечении какого-то малого промежутка времени отражаются от нее в произвольном направлении с некоторой скоростью, причем каждое такое направление равновероятно. Отсутствие какого-либо преобладающего направления движения диффузно отраженных молекул приводит к тому, что они не создают касательного напряжения. Так как реальная поверхность всегда отличается от идеально гладкой, то бо́льшая часть молекул взаимодействует по схеме диффузного отражения.

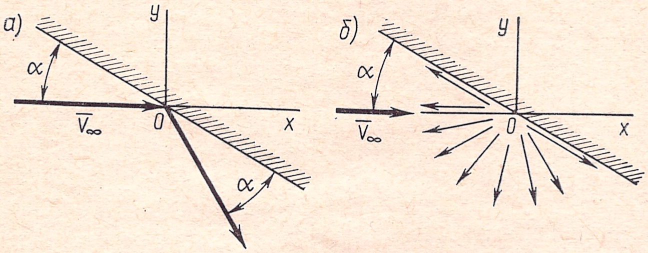


Рис. 15.2.1. Схема взаимодействия молекул со стенкой:
а — зеркальное отражение; *б* — диффузное отражение

Перенос массы

Рассмотрим некоторые характеристики свободномолекулярного потока, обтекающего тело [32]. Будем считать, что молекулы отражаются диффузно, причем температура отраженных частиц равна некоторому значению T_r, отличному в общем случае от температуры стенки $T_{\text{ст}}$ и первоначальной температуры газа T_i.

Рассмотрим выражение для переноса массы. Пусть составляющие скорости молекулы будут:

$$u = u' + U,\ v = v' + V,\ w = w' + W.$$

Первые члены в этих выражениях — компоненты скорости $\overline{V}_\infty$ массового (или упорядоченного) движения газа относительно стенки, определяемой из выражения

$$V_\infty^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2.$$

Вторые члены — составляющие скорости c теплового движения (скорости молекулы относительно массового движения газа). Квадрат этой скорости

$$c^2 = U^2 + V^2 + W^2. \qquad (15.2.1)$$

Примем, что ось y, которой соответствует составляющая v, направлена по нормали к поверхности в данной точке.

Нас интересует перенос молекул к поверхности тела, который зависит от числа падающих молекул, содержащихся в единице объема. Если молекулы движутся со скоростью, компоненты которой по величине укладываются соответственно в интервалах u, $u+du$; v, $v+dv$; w, $w+dw$, то число этих молекул равно произведению $n_i f du dv dw$, в котором n_i — число падающих молекул в единице объема (здесь и в дальнейшем индекс «i» относится к частицам невозмущенного потока, параметры которого T_∞, p_∞, ρ_∞ и т. д.); f — функция распределения молекул по скоростям, называемая функцией распределения Максвелла.

В кинетической теории функция распределения определяется экспоненциальной зависимостью

$$f = (\pi c_m^2)^{-3/2} e^{-c^2/c_m^2}, \tag{15.2.2}$$

в которой величина c_m связана со средней скоростью хаотического движения $\overline{c}$ соотношением

$$c_m = \overline{c}\sqrt{\pi/4} \tag{15.2.3}$$

и называется наиболее вероятной скоростью молекулы. По данным кинетической теории газов, средняя скорость беспорядочного движения молекул

$$\overline{c} = 2\sqrt{2RT/\pi}. \tag{15.2.4}$$

Функция распределения f относится только к неупорядоченной части движения молекул. Она зависит от скорости теплового движения c и, как видно из (15.2.3), от средней скорости $\overline{c}$, определяющей внутреннюю энергию единицы массы газа, равную $\overline{c}^2/2$. В общем случае $\overline{c}$ и c зависят от координат и времени. Однако если рассмотреть имеющий большое практическое значение случай равновесного распределения скоростей, при котором в результате столкновений в каждом заданном элементе объема $\tau = dxdydz$ не изменяется число молекул газа, принадлежащих элементу пространства скоростей $dudvdw$ в этом объеме τ, то функция распределения f не будет зависеть от времени t. Такое состояние газа определяется как состояние местного максвелловского равновесия.

Рассмотрим понятие средней квадратичной скорости $\overline{c^2}$ беспорядочного движения, определяемой из условия

$$\overline{c^2}/3 = \overline{U}^2 = \overline{V}^2 = \overline{W}^2, \tag{15.2.5}$$

где $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$ — средние значения составляющих скорости беспорядочного движения. Согласно кинетической теории газов, величина $\overline{c^2}$ находится из выражения

$$\overline{c^2} = 3RT. \tag{15.2.6}$$

Отсюда с учетом формул (15.2.3), (15.2.4) для $\overline{c}$ определим

$$\sqrt{\overline{c^2}} = 0{,}5\overline{c}\sqrt{3\pi/2} = c_m\sqrt{3/2}, \tag{15.2.7}$$

т. е.

$$\sqrt{\overline{c^2}} = 1{,}086\overline{c} = 1{,}225c_m. \tag{15.2.8}$$

Отметим также зависимость, которая существует между $\overline{c}, \sqrt{\overline{c^2}}$ и скоростью звука a:

$$a = \sqrt{kRT} = \overline{c}\sqrt{\pi k/8} = \sqrt{\overline{c^2}}\sqrt{k/3}. \tag{15.2.8'}$$

Отсюда следует, что средние молекулярные скорости имеют тот же порядок, что и скорость звука.

Функцию распределения f можно определить при помощи графика, изображенного на рис. 15.2.2, где представлена зависимость величины $B = (\pi c_m^2)^{3/2}(c^2/\overline{c^2})f$ от параметра $c/\sqrt{\overline{c^2}}$. На этом графике показаны также относительные величины $c_m\sqrt{\overline{c^2}}$ и $\overline{c}/\sqrt{\overline{c^2}}$.

Из числа падающих молекул, содержащихся в единице объема, та их часть, которая соударяется с единичной поверхностью за одну секунду, равна $n_i v f du dv dw$. Таким образом, в этом случае рассматриваются молекулы, которые пересекают поверхность и располагаются в выделенном объеме с единичной площадью основания и высотой, равной вертикальной составляющей скорости v. Эта скорость находится в пределах $\infty > v > 0$. Частицы с составляющей скорости $v < 0$ не будут достигать площадки. Общее число молекул N_i, соударяющихся с единичной поверхностью в одну секунду, может быть получено интегрированием по всем возможным скоростям $-\infty < u < \infty$, $0 < v < \infty$, $-\infty < w < \infty$, т. е.

$$N_i = \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{0}^{\infty} v dv \int_{-\infty}^{\infty} n_i f dw, \tag{15.2.9}$$

или с учетом выражений (15.2.2) для f и (15.2.1) для c^2

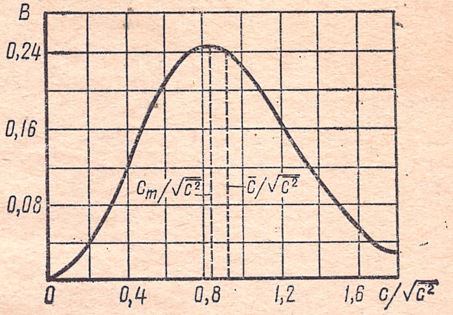


Рис. 15.2.2. Функция распределения Максвелла

$$N_i = n_i \left(\pi c_{mi}^2\right)^{-\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} H_1^2} du \int_{0}^{\infty} v e^{-\frac{1}{2} H_2^2} dv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} H_3^2} dw, \tag{15.2.9'}$$

где

$$\left.\begin{aligned} & u = u' + \frac{c_{mi}}{\sqrt{2}} H_1, \quad v = v' + \frac{c_{mi}}{\sqrt{2}} H_2, \quad w = w' + \frac{c_{mi}}{\sqrt{2}} H_3; \\ & H_1/\sqrt{2} = U/c_{mi}, \quad H_2\sqrt{2} = V/c_{mi}, \quad H_3\sqrt{2} = W/c_{mi}. \end{aligned}\right\} \tag{15.2.10}$$

Напишем с учетом (15.2.10) первый интеграл в (15.2.9′) (аналогичным ему будет третий интеграл) в следующем виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} H_1^2} du = c_{mi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} H_1^2} d\left(H_1/\sqrt{2}\right).$$

Интеграл в правой части этого выражения — известный интеграл Эйлера — Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} H_1^2} d\left(H_1/\sqrt{2}\right) = 2 \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} H_1^2} d\left(H_1/\sqrt{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{15.2.11}$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} H_1^2} du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} H_3^2} dw = c_{mi} \sqrt{\pi}. \tag{15.2.11'}$$

Второй интеграл в (15.2.9′) можно представить в виде

$$\int\limits_0^\infty ve^{-\frac{1}{2}H_2^2}dv = c_{mi}\int\limits_{-v'/c_{mi}}^{\infty}\left(v' + \frac{H_2}{\sqrt{2}}c_{mi}\right)e^{-\frac{1}{2}H_2^2}d\left(\frac{H_2}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= c_{mi}^2\int\limits_{-\overline{x}}^{\infty}(\overline{x}+y)\,e^{-y^2}dy, \qquad (15.2.12)$$

где введены обозначения

$$\overline{x} = v'/c_{mi}, \quad y = H_2/\sqrt{2}. \qquad (15.2.13)$$

Интегрируя (15.2.12), найдем

$$\int\limits_0^\infty ve^{-\frac{1}{2}H_2^2}dv = \frac{c_{mi}^2}{2}e^{-\overline{x}^2} + c_{mi}^2\overline{x}\int\limits_{-\overline{x}}^{\infty}e^{-y^2}dy. \qquad (15.2.12')$$

Интеграл в правой части (15.2.12′) представим в виде

$$\int\limits_{-\overline{x}}^{\infty}e^{-y^2}dy = -\int\limits_0^{-\overline{x}}e^{-y^2}dy + \int\limits_0^\infty e^{-y^2}dy.$$

Второй интеграл последнего выражения согласно (15.2.11)

$$\int\limits_0^\infty e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}/2. \qquad (15.2.14)$$

Для определения первого интеграла того же выражения введем новую переменную $y = -z$, с учетом которой

$$-\int\limits_0^{-\overline{x}}e^{-y^2}dy = \int\limits_0^{\overline{x}}e^{-z^2}dz.$$

Интеграл в правой части этого выражения можно вычислить при помощи специальной функции

$$\operatorname{erf}\overline{x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\overline{x}}e^{-z^2}dz, \qquad (15.2.15)$$

представляющей собой интеграл вероятностей, для которого составлены математические таблицы.

С учетом (15.2.14) и (15.2.15) зависимость (15.2.12′) запишется в виде

$$\int\limits_0^\infty ve^{-\frac{1}{2}H_2^2}dv = \frac{c_{mi}^2}{2}\left[e^{-\overline{x}^2} + \overline{x}\sqrt{\pi}\,(1+\operatorname{erf}\overline{x})\right]. \qquad (15.2.16)$$

Принимая во внимание (15.2.11′) и (15.2.16), для общего числа молекул N_i (15.2.9) можно написать следующую зависимость:

$$N_i = \frac{n_i c_{mi}}{2\sqrt{\pi}}\left[e^{-\overline{x}^2} + \overline{x}\sqrt{\pi}\,(1+\operatorname{erf}\overline{x})\right]. \qquad (15.2.17)$$

Так как в соответствии с (15.2.7)

$$c_{mi} = \sqrt{2RT_i}, \tag{15.2.18}$$

то

$$N_i = n_i \sqrt{\frac{RT_i}{2\pi}} \left[e^{-\overline{x}^2} + \overline{x}\sqrt{\pi}\,(1 + \operatorname{erf} \overline{x}) \right]. \tag{15.2.17'}$$

Произведение RT_i, которое входит в формулу (15.2.18), связано со скоростью звука соотношением

$$a_i = \sqrt{kRT_i}. \tag{15.2.19}$$

Как видно из (15.2.17′), число падающих молекул определяется величиной параметра $\overline{x}$, соответствующего рассматриваемой точке поверхности. Если в этом параметре $\overline{x}$ выразить c_{mi} через скорость звука, то $\overline{x} = (v'/a_i)\sqrt{k/2}$. Наряду с этим, учитывая, что β — угол между направлением вектора $\overline{V}_\infty$ и касательной к поверхности в данной точке (рис. 15.2.3), можно найти

$$\overline{x} = \sin\beta\,\frac{V_\infty}{a_i}\sqrt{\frac{k}{2}} = \overline{x}_\infty \sin\beta;\ \overline{x}_\infty = \frac{V_\infty}{a_i}\sqrt{\frac{k}{2}} = \mathrm{M}_\infty\sqrt{\frac{k}{2}}. \tag{15.2.20}$$

Формула (15.2.17′) получена для условий поверхности, которым соответствуют пределы изменения во втором определенном интеграле (15.2.9′) $0 < v < \infty$. Если рассматривается верхняя сторона поверхности, то уравнение переноса массы будет иным, так как пределы изменения в указанном интеграле в соответствии с рис. 15.2.3 будут $-\infty < v < 0$. Имея это в виду, напишем для верхней поверхности

$$N_i = -n_i\left(\pi c_{mi}^2\right)^{-\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}H_1^2} \times$$
$$\times du \int_{-\infty}^{0} v e^{-\frac{1}{2}H_2^2} dv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}H_3^2} dw. \tag{15.2.21}$$

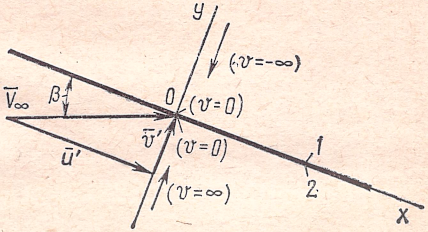


Рис. 15.2.3. Свободномолекулярный поток около плоской поверхности:

1 — верхняя поверхность; 2 — нижняя поверхность

Здесь первый и третий интегралы определяются значением (15.2.11′). Второй интеграл представим по аналогии с (15.2.12) в виде

$$\int_{-\infty}^{0} v e^{-\frac{1}{2}H_2^2} dv = c_{mi}^2 \int_{-\infty}^{-\overline{x}} (\overline{x} + y)\, e^{-y^2} dy = -0{,}5c_{mi}^2 e^{-\overline{x}^2} + c_{mi}^2\overline{x} \int_{-\infty}^{-\overline{x}} e^{-y^2} dy.$$

Интеграл в правой части этого выражения

$$\int_{-\infty}^{-\overline{x}} e^{-y^2} dy = \int_{0}^{-\overline{x}} e^{-y^2} dy + \int_{-\infty}^{0} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,(1 - \operatorname{erf} \overline{x}).$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{0} v e^{-\frac{1}{2}H_2^2} dv = 0{,}5c_{mi}^2 \left[e^{-\overline{x}^2} - \overline{x}\sqrt{\pi}\,(1 - \operatorname{erf} \overline{x}) \right].$$

Принимая во внимание полученные значения интегралов в (15.2.21), найдем по аналогии с (15.2.17′) следующую зависимость для определения числа падающих молекул на верхнюю площадку:

$$N_i = n_i \sqrt{\frac{RT_i}{2\pi}} \left[e^{-\bar{x}^2} - \bar{x}\sqrt{\pi}\,(1 - \operatorname{erf}\bar{x})\right]. \qquad (15.2.22)$$

Если рассматривается свободномолекулярный поток около криволинейной поверхности (рис. 15.2.4), то формула (15.2.17′) применима к расчету числа падающих молекул на переднюю сторону этой поверхности, а формула (15.2.22) — на заднюю. Формулы (15.2.17′) и (15.2.22) можно упростить при больших скоростях, воспользовавшись тем, что уже для $\bar{x} \geqslant 2$ величина $e^{-\bar{x}^2}$ по крайней мере на два порядка меньше единицы, а интеграл вероятности $\operatorname{erf} x$ мало отличается от единицы. Например, при $\bar{x} = 2$ величина $e^{-\bar{x}^2} = 0{,}018$, а $\operatorname{erf}\bar{x} = 0{,}995$. Каждому $\bar{x}$ соответствует значение

$$\mathrm{M}_\infty = (\bar{x}/\sin\beta)\sqrt{2/k}.$$

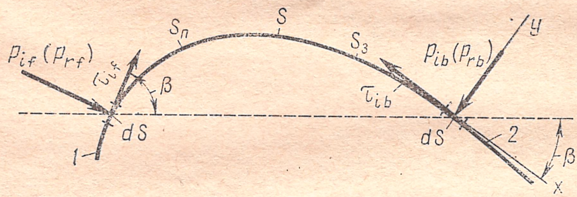


Рис. 15.2.4. Свободномолекулярный поток около криволинейной поверхности:

1 — передняя сторона; *2* — задняя сторона

В частности, для $\bar{x} = 2$, $\sin\beta = 0{,}2$ и $k = 1{,}4$ число $\mathbf{M}_\infty = 12$. При $\beta = 90°$ наименьшее из возможных чисел $\mathbf{M}_\infty$ для $\bar{x} = 2$ снижается до 2,4. Таким образом, упрощенную формулу (15.2.17′) можно написать в следующем виде:

$$N_{if} = \bar{x} n_i \sqrt{2RT_i} = n_i V_\infty \sin\beta. \qquad (15.2.23)$$

Здесь индекс «*f*» указывает на то, что рассматривается передняя сторона криволинейной поверхности. Если имеется в виду задняя сторона (индекс «*b*»), то, как это нетрудно видеть, формула (15.2.22) при сделанных предположениях превращается в равенство

$$N_{ib} = 0, \qquad (15.2.24)$$

так как при большой скорости полета тела молекулы не достигают задней стороны его поверхности.

Рассмотрим перенос отраженных молекул. Диффузное отражение подчиняется максвелловскому распределению, поэтому можно применить соотношения (15.2.17′) и (15.2.22), приняв в них $\bar{x} = 0$, так как после соударения частицы теряют массовую скорость. Так как отраженные частицы имеют другую температуру T_r, то

$$N_r = n_r \sqrt{RT_r/(2\pi)}, \qquad (15.2.25)$$

где n_r — число отраженных молекул в единице объема.

Если принять, что общее число падающих частиц равно числу отраженных, т. е. $N_i = N_r$, то, приравнивая правые части выражений (15.2.17′) и (15.2.25), можно найти связь между концентрациями n_r и n_i для передней стороны обтекаемой поверхности:

$$n_{rf} = n_i \sqrt{T_i/T_r} \left[e^{-\bar{x}^2} + \bar{x}\sqrt{\pi}\,(1 + \operatorname{erf}\bar{x})\right]. \qquad (15.2.26)$$

Аналогичное выражение для задней стороны получим, приравняв правые части (15.2.22) и (15.2.25):

$$n_{rb} = n_i \sqrt{T_i/T_r}\left[e^{-\bar{x}^2} - \bar{x}\sqrt{\pi}\,(1 - \operatorname{erf}\bar{x})\right]. \qquad (15.2.27)$$

Давление

Давление определяется суммарной потерей количества движения группой молекул в нормальном к поверхности направлении в результате их соударения со стенкой, т. е. равно сумме количеств движения в единицу времени этих молекул перед соударением. Общее выражение для определения давления получают следующим образом. Численно давление, создаваемое молекулой, равно ее количеству движения mv, а от группы молекул, соударяющихся в единицу времени с единичной поверхностью, оно составляет $mn_iv^2fdudvdw$. Следовательно, давление, производимое всеми падающими на переднюю площадку молекулами,

$$p_{ij} = \rho_i(\pi c_{mi}^2)^{-\frac{3}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}H_1^2}du\int_0^{\infty} v^2e^{-\frac{1}{2}H_2^2}dv\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}H_3^2}dw, \qquad (15.2.28)$$

где $\rho_i = mn_i$ — плотность.

Значения первого и третьего интегралов определены (15.2.11′). Второй интеграл напишем по аналогии с (15.2.12):

$$\int_0^{\infty} v^2e^{-\frac{1}{2}H_2^2}dv = c_{mi}^3\int_{-\bar{x}}^{\infty}(\bar{x}+y)^2e^{-y^2}dy = c_{mi}^3\bar{x}^2\int_{-\bar{x}}^{\infty}e^{-y^2}dy +$$

$$+ 2c_{mi}^3\bar{x}\int_{-\bar{x}}^{\infty}ye^{-y^2}dy + c_{mi}^3\int_{-\bar{x}}^{\infty}y^2e^{-y^2}dy.$$

Здесь первый и второй интегралы в правой части были вычислены ранее. Определим третий интеграл, взяв его по частям:

$$\int_{-\bar{x}}^{\infty}y^2e^{-y^2}dy = \int_{-\bar{x}}^{0}y^2e^{-y^2}dy + \int_0^{\infty}y^2e^{-y^2}dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-ye^{-y^2}\Big|_{-\bar{x}}^{0} + \int_{-\bar{x}}^{0}e^{-y^2}dy - ye^{-y^2}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty}e^{-y^2}dy\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\bar{x}e^{-\bar{x}^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}\bar{x} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right).$$

Таким образом,

$$\int_0^{\infty} v^2e^{-\frac{1}{2}H_2^2}dv = c_{mi}^3\bar{x}^2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}\bar{x} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) + c_{mi}^3\bar{x}e^{-\bar{x}^2} +$$

$$+\frac{c_{mi}^3}{2}\left(-\bar{x}e^{-\bar{x}^2}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}\bar{x}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}c_{mi}^3(1+\operatorname{erf}\bar{x})\left(\bar{x}^2+\frac{1}{2}\right)+\frac{c_{mi}^3}{2}\bar{x}e^{-\bar{x}^2}.$$

Принимая во внимание эту зависимость и значения первого и третьего интегралов в (15.2.28), каждый из которых равен $c_{mi}\sqrt{\pi}$, а также учитывая выражение $\bar{x}^2=\sin^2\beta\,\frac{V_\infty^2}{a_i^2}\cdot\frac{k}{2}=\sin^2\beta\,\frac{V_\infty^2}{c_{mi}^2}$, найдем после соответствующих подстановок в (15.2.28) следующую формулу для безразмерной величины давления на передней стороне поверхности:

$$\bar{p}_{if}=\frac{2p_{if}}{\rho_i V_\infty^2}=\sin^2\beta\left[\frac{1}{\bar{x}\sqrt{\pi}}e^{-\bar{x}^2}+\left(1+\frac{1}{2\bar{x}^2}\right)(1+\operatorname{erf}\bar{x})\right]. \quad (15.2.29)$$

Для определения давления на заднюю сторону поверхности необходимо воспользоваться тем же соотношением (15.2.28), заменяя в нем пределы интегрирования по v на $-\infty<v<0$. В соответствии с этим

$$p_{ib}=\rho_i(\pi c_{mi}^2)^{-\frac{3}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}H_1^2}du\int_{-\infty}^{0}v^2e^{-\frac{1}{2}H_2^2}dv\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}H_3^2}dw,$$

где

$$\int_{-\infty}^{0}v^2e^{-\frac{1}{2}H_2^2}dv=c_{mi}^3\int_{-\infty}^{-\bar{x}}(\bar{x}+y)^2e^{-y^2}dy=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}c_{mi}^3(1-\operatorname{erf}\bar{x})\left(\bar{x}^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{c_{mi}^3}{2}\bar{x}e^{-\bar{x}^2}. \quad (15.2.30)$$

С учетом (15.2.30) найдем зависимость для безразмерной величины давления на заднюю площадку:

$$\bar{p}_{ib}=\frac{2p_{ib}}{\rho_i V_\infty^2}=\sin^2\beta\left[\frac{-1}{\bar{x}\sqrt{\pi}}e^{-\bar{x}^2}+\left(1+\frac{1}{2\bar{x}^2}\right)(1-\operatorname{erf}\bar{x})\right]. \quad (15.2.31)$$

Нетрудно заметить, что зависимости, определяющие движение газа на задней стороне поверхности, можно получить из соответствующих выражений для передней стороны, заменив в них $\bar{x}$ на $-\bar{x}$.

Наряду с падающими и диффузно отраженные частицы создают давление, величина которого равна сумме нормальных к поверхности количеств движения молекул, покидающих стенку. Так как процесс отражения частицы подчиняется максвелловскому распределению скорости, соответствующему температуре T_r и нулевой скорости массового упорядоченного движения (отражение происходит от относительно неподвижной поверхности), то следует воспользоваться выражением (15.2.28), приняв в нем $u'=v'=w'=0$, и перейти к параметрам с индексом «r». В соответствии с этим для передней площадки

$$p_{rf}=\rho_r\left(\pi c_{mr}^2\right)^{-\frac{3}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}H_1^2}dU\int\limits_0^{\infty}V^2e^{-\frac{1}{2}H_2^2}dV\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}H_3^2}dW,$$

что после вычисления интегралов дает

$$p_{rf}=R\rho_rT_r/2. \tag{15.2.32}$$

Так как плотность отраженных частиц $\rho_r=mn_r$, а их число в единице объема n_r определяется из условия установившегося обтекания $N_r=N_i$ по формуле (15.2.26), то для давления, возникающего за счет диффузного отражения, получим

$$\bar{p}_{rf}=\frac{2p_{rf}}{\rho_iV_\infty^2}=\frac{\sin^2\beta}{2\bar{x}^2}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\left[e^{-\bar{x}^2}+\bar{x}\sqrt{\pi}\left(1+\operatorname{erf}\bar{x}\right)\right]. \tag{15.2.33}$$

Аналогичная формула для задней площадки имеет вид

$$\bar{p}_{rb}=\frac{2p_{rb}}{\rho_iV_\infty^2}=\frac{\sin^2\beta}{2\bar{x}^2}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\left[e^{-\bar{x}^2}-\bar{x}\sqrt{\pi}\left(1-\operatorname{erf}\bar{x}\right)\right]. \tag{15.2.34}$$

Общая величина относительного давления равна сумме соответствующих значений p_i и p_r. Для передней площадки

$$\bar{p}_f=2\left(p_{if}+p_{rf}\right)/\left(\rho_iV_\infty^2\right)=\bar{p}_{if}+\bar{p}_{rf}; \tag{15.2.35}$$

для задней площадки

$$\bar{p}_b=2\left(p_{ib}+p_{rb}\right)/\left(\rho_iV_\infty^2\right)=\bar{p}_{ib}+\bar{p}_{rb}, \tag{15.2.36}$$

где величины относительного давления $\bar{p}_{if}$ и $\bar{p}_{rf}$ находятся из выражений (15.2.29) и (15.2.33), а $\bar{p}_{ib}$ и $\bar{p}_{rb}$ — из (15.2.31) и (15.2.34).

Вместо зависимостей (15.2.35), (15.2.36) можно пользоваться обобщенным выражением для относительного давления, полученным после соответствующего суммирования:

$$\bar{p}=\frac{2\left(p_i+p_r\right)}{\rho_iV_\infty^2}=\sin^2\beta\left[\frac{\pm1}{\bar{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\pm\frac{1}{2\bar{x}}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\right)e^{-\bar{x}^2}+\right.$$

$$\left.+\left(1+\frac{1}{2\bar{x}^2}\pm\frac{\sqrt{\pi}}{2\bar{x}}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\right)\left(1\pm\operatorname{erf}\bar{x}\right)\right], \tag{15.2.37}$$

где верхний знак (плюс) относится к передней площадке, а нижний знак (минус) — к задней.

Из выражения (15.2.37) следует, что давление зависит от ориентировки рассматриваемой площадки относительно вектора скорости $\bar{V}_\infty$ (т. е. от угла β), числа $\mathbf{M}_\infty$ и отношения температур T_r/T_i.

При больших скоростях, которым соответствуют значения $\bar{x}\geqslant2$, формулы для относительного давления можно упростить. Из

(15.2.29) и (15.2.31) получим следующие приближенные зависимости:

$$\overline{p}_{if}=2\sin^2\beta\,[1+1/(2\overline{x}^2)]; \tag{15.2.38}$$

$$\overline{p}_{ib}=0. \tag{15.2.39}$$

Соответствующие формулы, относящиеся к процессу отражения, записываются согласно (15.2.33) и (15.2.34) в виде

$$\overline{p}_{rf}=\frac{\sin^2\beta}{\overline{x}}\sqrt{\pi\frac{T_r}{T_i}}; \tag{15.2.40}$$

$$\overline{p}_{rb}=0. \tag{15.2.41}$$

С учетом этих выражений можно написать упрощенные зависимости для полной величины относительного давления:

$$\overline{p}_f=\overline{p}_{if}+\overline{p}_{rf}=2\sin^2\beta\left(1+\frac{1}{2\overline{x}^2}+\frac{\sqrt{\pi}}{2\overline{x}}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\right); \tag{15.2.42}$$

$$\overline{p}_b=0. \tag{15.2.43}$$

Напряжение трения

Напряжение трения является следствием полной потери тангенциальной составляющей количества движения молекул при ударе. Эта потеря количества движения для одной молекулы равна mu, а для того числа, которое соударяется с единичной поверхностью в единицу времени, равна $n_i m f u v\,du\,dv\,dw$. Следовательно, напряжение трения, обусловленное падением на переднюю площадку всех молекул,

$$\tau_i=\rho_i(\pi c_{mi}^2)^{-\frac{3}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}ue^{-\frac{1}{2}H_1^2}du\int_0^{\infty}ve^{-\frac{1}{2}H_2^2}dv\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}H_3^2}dw. \tag{15.2.44}$$

Используя (15.2.10), соотношение (15.2.44) преобразуем к виду

$$\tau_i=\rho_i(\pi c_{mi}^2)^{-\frac{3}{2}}c_{mi}^3\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\left(u'+\frac{H_1}{\sqrt{2}}c_{mi}\right)e^{-\frac{1}{2}H_1^2}d\left(\frac{H_1}{\sqrt{2}}\right)}_{1}\times \tag{15.2.44'}$$

$$\times\underbrace{\int_{-v'/c_{mi}}^{\infty}\left(v'+\frac{H_2}{\sqrt{2}}c_{mi}\right)e^{-\frac{1}{2}H_2^2}d\left(\frac{H_2}{\sqrt{2}}\right)}_{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}H_3^2}d\left(\frac{H_3}{\sqrt{2}}\right)}_{3}.$$

Интегралы в правой части уравнения имеют следующие значения:

$$\left.\begin{aligned}&1)\ u'\sqrt{\pi};\\&2)\ \frac{1}{2}c_{mi}\left[e^{-\bar{x}^2}+\bar{x}\sqrt{\pi}(1+\operatorname{erf}\bar{x}\right);\\&3)\ \sqrt{\pi}.\end{aligned}\right\}\qquad(15.2.45)$$

Трение на задней площадке будет определяться тем же выражением (15.2.44′) с переменой пределов во втором интеграле на $-\infty<v<0$. В соответствии с этим для второго интеграла найдем

$$\frac{1}{2}c_{mi}\left[e^{-\bar{x}^2}-\bar{x}\sqrt{\pi}(1-\operatorname{erf}\bar{x})\right].\qquad(15.2.46)$$

Имея в виду эти значения интегралов, а также учитывая, что

$$u'=V_\infty\cos\beta;\ \bar{x}=(V_\infty/c_{mi})\sin\beta,\qquad(15.2.47)$$

получим из (15.2.44′) следующую зависимость для коэффициента трения:

$$c_{fi}=2\tau_i/(\rho_i V_\infty^2)=\sin\beta\cos\beta\left[\pm e^{-\bar{x}^2}/(\bar{x}\sqrt{\pi})+(1\pm\operatorname{erf}\bar{x})\right],\qquad(15.2.48)$$

где по-прежнему знак плюс относится к передней площадке, а знак минус — к задней.

Так как любые направления движения отраженных молекул равновероятны, то их суммарное воздействие не создает напряжения трения, т. е. $\tau_r=0$ и, следовательно,

$$c_{fr}=0.\qquad(15.2.49)$$

Нетрудно заметить, что для неотклоненной поверхности ($\beta=0$) коэффициент трения

$$c_{fi}=1/(\bar{x}_\infty\sqrt{\pi})=(1/\mathrm{M}_\infty)\sqrt{2/(k\pi)}.\qquad(15.2.50)$$

Также упрощаются зависимости и в случае, когда $\bar{x}\geqslant2$. Соответственно для условий на передней и задней площадках они имеют вид:

$$(c_{fi})_f=\sin2\beta;\qquad(15.2.51)$$

$$(c_{fi})_b=0.\qquad(15.2.52)$$

Перенос кинетической энергии

Для определения нормального давления необходимо знать отношение температур T_r/T_i. Вычисление этого отношения в свою очередь связано с нахождением энергии поступательного движения молекул, которая подводится к поверхности при ударе молекул и отводится в результате их отражения. Каждая из молекул при ударе переносит к поверхности энергию

$$0{,}5mc^2=0{,}5m(U^2+V^2+W^2).\qquad(15.2.53)$$

Энергия, подводимая тем числом падающих молекул, которое приходится на единицу площади в единицу времени, определяется выражением $0{,}5mn_i c^2 f v\,du\,dv\,dw$. В результате интегрирования этого выражения в пределах изменения u и w от $-\infty$ до ∞, а v — от 0 до ∞ для передней площадки (или от $-\infty$ до 0 для задней площадки) получим общее количество переносимой энергии E_i при ударе. С учетом значения (15.2.2) для f

$$E_i = 0{,}5mn_i\left(\pi c_{mi}^2\right)^{-\frac{3}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{t_\text{н}}^{t_\text{в}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} c^2 e^{-\frac{c^2}{c_{mi}^2}}\, v\,du\,dv\,dw, \qquad (15.2.54)$$

где для передней площадки $t_\text{н}=0$, $t_\text{в}=\infty$, а для задней $t_\text{н}=-\infty$, $t_\text{в}=0$.

Принимая во внимание выражение (15.2.53) для $0{,}5mc^2$, а также зависимость (15.2.10) и производя интегрирование, найдем

$$E_i = 0{,}5mN_i\left\{V_\infty^2 + RT_i\left[4 + 1/(\varphi + 1)\right]\right\}, \qquad (15.2.55)$$

где N_i определяется формулами (15.2.17′) для передней площадки и (15.2.22) — для задней, а функция

$$\varphi = e^{-\bar{x}^2}\left[\pm\,\bar{x}\sqrt{\pi}\,(1 \pm \operatorname{erf}\bar{x})\right]^{-1}. \qquad (15.2.56)$$

Отраженные частицы уносят с единицы поверхности элементарную энергию $0{,}5mn_r c^2 f U\,dU\,dV\,dW$. Интегрируя в пределах изменения U и W от $-\infty$ до ∞, а V — от $-\infty$ до 0, получим полную величину уносимой энергии

$$E_r = 0{,}5mn_r\left(\pi c_{mr}^2\right)^{-\frac{3}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} c^2 e^{-\frac{c^2}{c_{mr}^2}}\, V\,dU\,dV\,dW. \qquad (15.2.57)$$

Вычисление тройного интеграла дает

$$E_r = \rho_r\,(RT_r)^{3/2}(2/\pi)^{1/2}. \qquad (15.2.58)$$

Заменим в этом выражении плотность ρ_r на mn_r, а n_r — значением (15.2.25):

$$E_r = 2mN_r RT_r. \qquad (15.2.59)$$

Внося сюда значение $N_r = N_i$ с учетом (15.2.17′) и (15.2.22) и принимая во внимание, что $m = \rho_i/n_i$, получим

$$E_r = 2mN_i RT_r = \sqrt{2/\pi}\,\rho_i RT_r\sqrt{RT_i}\left[e^{-\bar{x}^2} \pm \bar{x}\sqrt{\pi}\,(1 \pm \operatorname{erf}\bar{x})\right], \qquad (15.2.60)$$

где $mR = 1{,}38\cdot 10^{-16}$ *эрг/град* ($1{,}38\cdot 10^{-23}$ *дж/град*) — постоянная Больцмана.

Суммарная кинетическая энергия молекул равна разности подводимой и уносимой энергий:

$$F = E_i - E_r.$$

При больших скоростях ($\bar{x} \geqslant 2$) как для передней, так и для задней площадок можно принять $\varphi_f \approx \varphi_b \approx 0$. Имея в виду формулы (15.2.17′), (15.2.22), (15.2.55), (15.2.56) и осуществляя необходимые упрощения, получим:

$$E_{if} = 0{,}5\bar{x}\rho_i\sqrt{2RT_i}\,(V_\infty^2 + 5RT_i); \qquad (15.2.61)$$

$$E_{ib} = 0. \qquad (15.2.62)$$

Для энергии отраженных частиц соответствующие зависимости после упрощения (15.2.60) запишутся в следующем виде:

$$E_{rf} = 2\sqrt{2}\,\rho_i RT_r\bar{x}\sqrt{RT_i}; \qquad (15.2.63)$$

$$E_{rb} = 0. \qquad (15.2.64)$$

§ 15.3. АККОМОДАЦИЯ

Обмен количеством движения

В предыдущем параграфе процессы переноса были рассмотрены на основе гипотезы диффузного отражения, при котором молекулы успевают полностью «приспособиться» к условиям на стенке и возникающий между стенкой и молекулами контакт достаточен, чтобы передать стенке количество движения всех молекул.

Экспериментальные исследования показывают, что реальные процессы взаимодействия молекул с поверхностью отличаются от явлений диффузного отражения и характеризуются отражением более общего типа. Только часть падающих молекул передает стенке касательную составляющую импульсов. Степень контакта сталкивающихся молекул недостаточна для того, чтобы они приобрели среднюю энергию, соответствующую температуре стенки $T_{\text{ст}}$.

В основе рассматриваемой концепции отражения лежит идея, что нормальная и тангенциальная компоненты силы, создаваемой отраженным потоком, определяются соответственно коэффициентом аккомодации («приспособляемости») нормальной компоненты импульса

$$f_n = (p_i - p_r)/(p_i - p_{\text{ст}}) \qquad (15.3.1)$$

и коэффициентом аккомодации тангенциальной компоненты импульса

$$f_\tau = (\tau_i - \tau_r)/\tau_i. \qquad (15.3.2)$$

В соответствии с этой концепцией только часть падающих молекул f_n передает стенке нормальную компоненту импульса. Доля всех молекул, передающих касательную составляющую количества движения, определяется коэффициентом f_τ. Очевидно, для полностью зеркального отражения $f_n = f_\tau = 0$ (при $p_i = p_r$; $\tau_i = \tau_r$), а для полностью диффузного отражения $f_n = f_\tau = 1$ (при $p_r = p_{\text{ст}}$; $\tau_r = 0$).

Давление $p_{\text{ст}}$ в (15.3.1) можно рассматривать как нормальную компоненту импульса молекул, которые отражаются с максвелловским распределением скорости, соответствующим термодинамическому равновесию при температуре поверхности $T_{ст}$, находящейся в состоянии покоя ($V_\infty = 0$). Согласно (15.2.32),

$$p_{ст} = 0{,}5R\rho_{ст}T_{ст},$$

или, принимая во внимание, что $\rho_{ст} = mn_{ст}$,

$$p_{ст} = 0{,}5mRn_{ст}T_{ст}.$$

Чтобы перейти к плотности набегающего потока, воспользуемся соотношением $\rho_i = mn_i$, при помощи которого получим

$$p_{ст} = 0{,}5R\rho_i T_{ст}(n_{ст}/n_i).$$

Для определения отношения $n_{ст}/n_i$ воспользуемся соотношением $N_{ст} = N_i$, определяющим равенство числа отраженных $N_{ст}$ и падающих молекул:

$$n_{ст}\sqrt{RT_{ст}/(2\pi)} = N_i = (N_i/n_i)\,n_i,$$

где N_i определяется по (15.2.17′) и (15.2.22). Вычислив отношение $n_{ст}/n_i$, найдем для давления формулу

$$\bar{p}_{ст} = \frac{2p_{ст}}{\rho_i V_\infty^2} = \frac{\sin^2\beta}{2\bar{x}^2}\sqrt{\frac{T_{ст}}{T_i}}\left[e^{-\bar{x}^2} \pm \bar{x}\sqrt{\pi}\,(1 \pm \operatorname{erf}\bar{x})\right], \qquad (15.3.3)$$

где знак плюс соответствует передней площадке, а минус — задней.

Строго говоря, коэффициенты f_n и f_τ неодинаковы, так как характеризуют различные процессы передачи импульса при отражении. Однако при приближенных вычислениях можно исходить из максвелловской гипотезы, в соответствии с которой процесс отражения характеризуется одним коэффициентом аккомодации импульса $f = f_n = f_\tau$, указывающим на то, что диффузно отражается доля f всех молекул, а зеркально — часть $(1-f)$.

С учетом сказанного давление p_r при отражении определяется из выражения (15.3.1) следующим образом:

$$p_r = p_i(1-f) + fp_{ст}.$$

Полное давление

$$p = p_i + p_r = (2-f)p_i + fp_{ст}. \qquad (15.3.4)$$

Подставляя в (15.3.4) значения p_i из (15.2.29) и (15.2.31), а также $p_{ст}$ из (15.3.3), получим

$$\bar{p} = \frac{2(p_i + p_r)}{\rho_i V_\infty^2} = \sin^2\beta\Bigg\{(2-f)\left[\frac{\pm e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}\sqrt{\pi}} + \left(1 + \frac{1}{2\bar{x}^2}\right)(1 \pm \operatorname{erf}\bar{x})\right] + \frac{f}{2\bar{x}^2}\sqrt{\frac{T_{ст}}{T_i}}\,[e^{-\bar{x}^2} \pm \bar{x}\sqrt{\pi}\,(1 \pm \operatorname{erf}\bar{x})\Bigg\}. \qquad (15.3.5)$$

Суммарное напряжение трения от действия падающих и отраженных молекул $\tau=\tau_i-\tau_r$. Внося сюда значение $\tau_r=(1-f)\tau_i$, полученное из (15.3.2), найдем

$$\tau=\tau_i-\tau_r=\tau_i f. \tag{15.3.6}$$

Соответствующий коэффициент трения согласно (15.2.48)

$$c_f=\frac{2\tau}{\rho_i V_\infty^2}=\frac{2\tau_i f}{\rho_i V_\infty^2}=f\sin\beta\cos\beta\left[\frac{\pm e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}\sqrt{\pi}}+(1\pm\operatorname{erf}\bar{x})\right]. \tag{15.3.6'}$$

Для очень больших скоростей ($\bar{x}\geqslant 2$) и сильно охлаждаемой стенки ($T_{\text{ст}}<T_i$) зависимость (15.3.5) можно упростить. Принимая знак плюс (рассматривается передняя площадка), найдем

$$\bar{p}_f=2(2-f)\sin^2\beta. \tag{15.3.7}$$

Для таких же больших скоростей коэффициент трения на передней площадке

$$(c_f)_f=f\sin 2\beta. \tag{15.3.8}$$

На задней площадке для указанных условий

$$\bar{p}_b=0,\ (c_f)_b=0. \tag{15.3.9}$$

Из (15.3.7) и (15.3.8) наглядно видно влияние аккомодации на давление и трение. С увеличением f коэффициент давления $\bar{p}_f$ снижается, а коэффициент трения $(c_f)_f$ возрастает. Физически такой эффект объясняется уменьшением числа молекул, которые отражаются зеркально. Это обусловливает уменьшение дополнительного импульса («реактивной силы»), что вызывает снижение давления. Одновременно становится меньше число тех молекул, которые не передают касательной составляющей количества движения, что влечет за собой увеличение коэффициента трения.

Коэффициент f в приведенных выражениях близок к единице и может приниматься в расчетах равным примерно $0{,}95\div 1$. В предельном случае полностью зеркального отражения, который нереален, коэффициент $f=0$. В другом предельном случае полностью диффузного отражения, который более правдоподобен, коэффициент $f=1$.

Экспериментальные исследования взаимодействия водорода, гелия и кислорода с полированной поверхностью окиси серебра, а также изучение контакта воздуха с латунью показали, что $f\approx 0{,}99$, что подтверждает наличие практически полного диффузного отражения. Вместе с тем аналогичные исследования позволили установить, что для некоторых комбинаций газа и поверхности коэффициент f может быть существенно меньше единицы.

Обмен энергией

Отсутствие полной «приспособляемости» (аккомодации) свойственно не только явлению переноса количества движения, но и в большей степени, как показывают экспериментальные исследования, процессу обмена энергией между падающими молекулами и стенкой. По этой причине в формуле (15.2.60) для энергии отраженных молекул предполагается, что их температура T_r отличается от температуры стенки $T_{\text{ст}}$. В этом случае контакт падающих молекул вследствие малого времени соприкосновения со стенкой недостаточен, чтобы передать им при отражении среднюю энергию, соответствующую температуре $T_{\text{ст}}$ и равную согласно (15.2.60)

$$E_{\text{ст}}=2mN_iRT_{\text{ст}}=\sqrt{2/\pi}\quad\rho_iRT_{\text{ст}}\sqrt{RT_i}\,\left[e^{-\bar{x}^2}\pm\bar{x}\sqrt{\pi}\,(1\pm\operatorname{erf}\bar{x})\right]. \tag{15.3.10}$$

Рассматриваемый случай отражения является наиболее общим и характеризуется отсутствием полной аккомодации («приспособляемости») между твердой границей и молекулами при обмене энергией. Таким образом, в этом общем случае отношение

$$\eta=(E_i-E_r)/(E_i-E_{\text{ст}}), \tag{15.3.11}$$

называемое термическим коэффициентом аккомодации, отличается от единицы. Возникающий разрыв энергии является причиной скачка температур, т. е. различия между T_r и $T_{\text{ст}}$.

Коэффициент аккомодации η имеет важное значение в расчете теплопередачи. Поэтому необходимо уметь оценить его величину. В настоящее время это можно осуществить только экспериментально, хотя, к сожалению, достаточно надежных измерений мало. Наблюдения показывают, что характер изменения термического коэффициента аккомодации весьма сложен. Установлено, в частности, что с увеличением молекулярного веса и температуры поверхности значение η возрастает. Можно предположить, что коэффициент аккомодации будет зависеть от скорости полета тела, угла подхода молекул к поверхности, свойств материала, состояния поверхности. Как показали исследования, значения коэффициента аккомодации для воздуха, взаимодействующего с алюминием и сталью, имеющих различную форму обработанной поверхности, близки к единице и колеблются от 0,7 до 0,97.

По имеющимся сведениям, для чистых поверхностей и легких молекул, в частности, таких газов, как водород и гелий, величина η может достигать примерно 10^{-2}.

Сравнение термического η и «силового» f коэффициентов аккомодации показывает, что $f\gg\eta$. Из этого следует, что, хотя падающие молекулы испытывают многократные столкновения со стенкой и процесс отражения близок к диффузному, время соприкосновения этих молекул со стенкой все же недостаточно для того, чтобы отраженные молекулы приобрели температуру стенки.

Можно рассмотреть предельный случай, при котором $\eta=1$. Это соответствует моменту, когда температура T_r отраженных молекул достигает температуры стенки $T_{\text{ст}}$. В этом случае молекулы как бы полностью приспособляются к условиям на стенке.

§ 15.4. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ

Общее выражение для силы сопротивления

В качестве иллюстрации применения полученных в § 15.2 и 15.3 зависимостей рассмотрим определение аэродинамической силы сопротивления. Найдем общее выражение для силы, действующей на местную площадку единичного размера без учета эффекта аккомодации, т. е. полагая коэффициент $f=1$. В результате соударения с такой площадкой, расположенной на передней стороне тела (см. рис. 15.2.4), за счет давления и трения возникает осевая сила, равная согласно (15.2.29) и (15.2.48)

$$E_{if}=p_{if}\sin\beta+\tau_{if}\cos\beta=\frac{\rho_i V_\infty^2}{2}\sin\beta\left[\frac{e^{-\overline{x}^2}}{\overline{x}\sqrt{\pi}}+\left(1+\frac{\sin^2\beta}{2\overline{x}^2}\right)\left(1+\operatorname{erf}\overline{x}\right)\right]. \qquad (15.4.1)$$

Сила, действующая на элементарную площадку dS передней стороны,

$$dX_{if}=F_{if}dS, \qquad (15.4.2)$$

а полная осевая сила

$$X_{if}=\int\limits_{(S_\text{п})}F_{if}dS, \qquad (15.4.3)$$

где $S_\text{п}$ — поверхность передней стороны. Соответствующий коэффициент сопротивления

$$c_{xif}=\frac{2X_{if}}{\rho_i V_\infty^2 S_\text{мид}}=\int\limits_{(\overline{S}_\text{п})}\sin\beta\left[\frac{e^{-\overline{x}^2}}{\overline{x}\sqrt{\pi}}+\left(1+\frac{\sin^2\beta}{2\overline{x}^2}\right)\left(1+\operatorname{erf}\overline{x}\right)\right]d\overline{S}, \qquad (15.4.4)$$

где $\overline{S}=S/S_\text{мид}$; $\overline{x}=(V_\infty/c_{mi})\sin\beta=\overline{x}_\infty\sin\beta$; $\overline{S}_\text{п}=S_\text{п}/S_\text{мид}$.

Интегрирование ведется для переднего участка поверхности площадью $S_\text{п}$. Аналогичные зависимости получаем для силы и коэффициента, соответствующие задней стороне поверхности.

Из рис. 15.2.4 видно, что

$$F_{ib}=p_{ib}\sin\beta+\tau_{ib}\cos\beta.$$

Здесь угол β определяется по абсолютной величине. Приняв для p_{ib} формулу (15.2.31) и вычислив τ_{ib} по выражению (15.2.48), в котором взят нижний знак (минус), после соответствующих подстановок получим

$$F_{ib}=\frac{\rho_i V_\infty^2}{2}\sin\beta\left[\frac{-e^{-\overline{x}^2}}{\overline{x}\sqrt{\pi}}+\left(1+\frac{\sin^2\beta}{2\overline{x}^2}\right)\left(1-\operatorname{erf}\overline{x}\right)\right]. \qquad (15.4.5)$$

Коэффициент силы сопротивления

$$c_{xib}=\frac{2X_{ib}}{\rho_i V_\infty^2 S_{\text{мид}}}=\int\limits_{(\bar{S}_{\text{з}})} \sin\beta\left[\frac{-e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}\sqrt{\pi}}+\left(1+\frac{\sin^2\beta}{2\bar{x}^2}\right)(1-\operatorname{erf}\bar{x})\right]d\bar{S}. \tag{15.4.6}$$

Интеграл вычисляют для заднего участка поверхности площадью $S_{\text{з}}$. Этот же результат можно получить из выражения (15.4.4), заменяя в нем $\bar{x}$ на $-\bar{x}$.

Коэффициент сопротивления обтекаемого тела определяется как разность коэффициентов сил, возникающих за счет падающих молекул на переднюю и заднюю площадки и действующих в противоположные стороны:

$$c_{xi}=c_{xif}-c_{xib}=2(X_{if}-X_{ib})/(\rho_i V_\infty^2 S_{\text{мид}}). \tag{15.4.7}$$

Отраженные частицы создают добавочную силу. При этом, отражаясь от передней площадки, они действуют на нее с силой, величина которой в соответствии с (15.2.33)

$$F_{rf}=p_{rf}\sin\beta=\frac{\rho_i V_\infty^2}{2}\cdot\frac{\sin^3\beta}{2\bar{x}^2}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\left[e^{-\bar{x}^2}+\bar{x}\sqrt{\pi}\,(1+\operatorname{erf}\bar{x})\right]. \tag{15.4.8}$$

Коэффициент силы, действующей на переднюю площадку $S_{\text{п}}$,

$$c_{xrf}=\frac{2X_{rf}}{\rho_i V_\infty^2 S_{\text{мид}}}=\frac{1}{2}\int\limits_{(\bar{S}_{\text{п}})}\frac{\sin^3\beta}{\bar{x}^2}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\left[e^{-\bar{x}^2}+\bar{x}\sqrt{\pi}\,(1+\operatorname{erf}\bar{x})\right]d\bar{S}. \tag{15.4.9}$$

Сила, отнесенная к единице площади и обусловленная действием отраженных молекул на заднюю площадку, будет определяться соотношением (15.2.34) для p_{rb} в виде

$$F_{rb}=p_{rb}\sin\beta=\frac{\rho_i V_\infty^2}{2}\cdot\frac{\sin^3\beta}{2\bar{x}^2}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\left[e^{-\bar{x}^2}-\bar{x}\sqrt{\pi}\,(1-\operatorname{erf}\bar{x})\right]. \tag{15.4.10}$$

Соответствующий коэффициент силы X_{rb}, действующей на заднюю площадку,

$$c_{xrb}=\frac{2X_{rb}}{\rho_i V_\infty^2 S_{\text{мид}}}=\frac{1}{2}\int\limits_{(\bar{S}_{\text{з}})}\frac{\sin^3\beta}{\bar{x}^2}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\left[e^{-\bar{x}^2}-\bar{x}\sqrt{\pi}\,(1-\operatorname{erf}\bar{x})\right]d\bar{S}. \tag{15.4.11}$$

Полный коэффициент сопротивления за счет отраженных молекул

$$c_{xr}=c_{xrf}-c_{xrb}=2(X_{rf}-X_{rb})/(\rho_i V_\infty^2 S_{\text{мид}}). \qquad (15.4.12)$$

Этот коэффициент сопротивления определяется как разность соответствующих коэффициентов для передней и задней площадок, что обусловлено характером взаимодействия отраженных молекул со стенкой, при котором на задней площадке возникает не сопротивление, а подталкивающая сила. По своей физической природе эта сила представляет собой реактивную силу, возникающую при отбрасывании частиц от поверхности.

Суммарный коэффициент сопротивления для обтекаемого тела получается сложением (15.4.7) и (15.4.12):

$$c_x=c_{xi}+c_{xr}. \qquad (15.4.13)$$

Когда $\bar{x}\geqslant 2$, приведенные формулы упрощаются. Вместо (15.4.1) и (15.4.4) имеем соответственно зависимости:

$$E_{if}=\rho_i V_\infty^2 \sin\beta\left[1+1/(2\bar{x}_\infty^2)\right]; \qquad (15.4.14)$$

$$c_{xif}=2\left[1+1/(2\bar{x}_\infty^2)\right]\int\limits_{(\bar{S}_{\text{п}})}\sin\beta\, d\bar{S}, \qquad (15.4.15)$$

а вместо (15.4.5) и (15.4.6) — значения:

$$F_{ib}=0,\ c_{xib}=0. \qquad (15.4.16)$$

Зависимости (15.4.8) и (15.4.9) также упрощаются:

$$F_{rf}=\frac{\rho_i V_\infty^2}{2}\cdot\frac{\sin^2\beta}{\bar{x}_\infty}\sqrt{\pi\frac{T_r}{T_i}}; \qquad (15.4.17)$$

$$c_{xrf}=\frac{\sqrt{\pi}}{\bar{x}_\infty}\int\limits_{(\bar{S}_{\text{п}})}\sin^2\beta\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\, d\bar{S}, \qquad (15.4.18)$$

а вместо (15.4.10) и (15.4.11) будем иметь:

$$F_{rb}=0,\ c_{xrb}=0. \qquad (15.4.19)$$

В случае одновременного диффузного и зеркального отражения (коэффициент аккомодации импульса $f<1$) силы рассчитывают по формулам:

$$F_{if}=p_{if}\sin\beta+f\tau_{if}\cos\beta; \qquad (15.4.20)$$

$$F_{ib}=F_{if}(-\bar{x}); \qquad (15.4.21)$$

$$F_{rf}=[p_{if}(1-f)+f p_{\text{ст}f}]\sin\beta; \qquad (15.4.22)$$

$$F_{rb}=F_{rf}(-\bar{x}), \qquad (15.4.23)$$

где $p_{\text{ст}\,f}$ определяется по формуле (15.3.3), в которой выбирается знак плюс. Обозначения в (15.4.21) и (15.4.23) указывают, что F_{ib} и F_{rb} получаются соответственно из выражений для F_{if} и F_{rf} путем замены $\bar{x}$ на $-\bar{x}$.

Конус

В качестве примера применения полученных зависимостей вычислим аэродинамическое сопротивление тела в виде комбинации двух конусов (рис. 15.4.1, *а*), обтекаемой осесимметричным потоком. Входящая в формулы для коэффициентов сопротивления относительная величина

$$d\bar{S} = 2\pi r dl/(\pi r^2_{\text{мид}}) = 2\pi r dr/(\pi r^2_{\text{мид}} \sin\beta_{\text{к}}) = d\bar{r}^2/\sin\beta_{\text{к}}. \qquad (15.4.24)$$

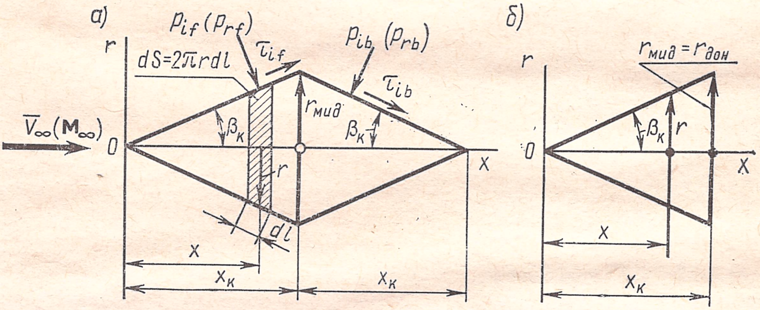


Рис. 15.4.1. К примеру расчета обтекания свободномолекулярным потоком конического тела:

а — комбинация из двух конических поверхностей; *б* — конус с донным срезом

Внося значения $d\bar{S}$ в (15.4.4) и (15.4.6) и учитывая, что для конуса

$$\bar{x}_{\text{к}} = \bar{x}_\infty \sin\beta_{\text{к}} = \mathbf{M}_\infty \sqrt{k/2}\,\sin\beta_k = \text{const}, \qquad (15.4.25)$$

получим коэффициент сопротивления в следующем виде:

$$c_{xif} = \frac{1}{\bar{x}_{\text{к}}\sqrt{\pi}} e^{-\bar{x}_{\text{к}}^2} + \left(1 + \frac{1}{2\bar{x}_\infty^2}\right)(1 + \operatorname{erf}\bar{x}_{\text{к}}); \qquad (15.4.26)$$

$$c_{xib} = \frac{-1}{\bar{x}_{\text{к}}\sqrt{\pi}} e^{-\bar{x}_{\text{к}}^2} + \left(1 + \frac{1}{2\bar{x}_\infty^2}\right)(1 - \operatorname{erf}\bar{x}_{\text{к}}). \qquad (15.4.27)$$

Полный коэффициент сопротивления за счет падающих молекул

$$c_{xi} = c_{xif} - c_{xib} = \frac{2}{\bar{x}_{\text{к}}\sqrt{\pi}} e^{-\bar{x}_{\text{к}}^2} + 2\left(1 + \frac{1}{2\bar{x}_\infty^2}\right)\operatorname{erf}\bar{x}_{\text{к}}. \qquad (15.4.28)$$

Рассмотрим воздействие отраженных молекул, полагая для условий обтекания конуса отношение $T_r/T_i=\mathrm{const}$. Для этих условий из (15.4.9) находим

$$c_{xrf}=\frac{1}{2\bar{x}_\infty^2}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\left[e^{-\bar{x}_\text{к}^2}+\bar{x}_\text{к}\sqrt{\pi}\,(1+\operatorname{erf}\bar{x}_\text{к})\right], \qquad (15.4.29)$$

а применяя формулу (15.4.11),

$$c_{xrb}=\frac{1}{2\bar{x}_\infty^2}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\left[e^{-\bar{x}_\text{к}^2}-\bar{x}_\text{к}\sqrt{\pi}\,(1-\operatorname{erf}\bar{x}_\text{к})\right]. \qquad (15.4.30)$$

Имея в виду, что этот коэффициент характеризует подталкивающую силу на задней площадке, определим в соответствии с (15.4.12) полный коэффициент сопротивления за счет отраженных молекул:

$$c_{xr}=c_{xrf}-c_{xrb}=\frac{\sin\beta_\text{к}}{\bar{x}_\infty}\sqrt{\pi\frac{T_r}{T_i}}. \qquad (15.4.31)$$

Складывая (15.4.28) и (15.4.31), найдем суммарный коэффициент сопротивления конуса:

$$c_x=c_{xi}+c_{xr}=\frac{2}{\bar{x}_\text{к}\sqrt{\pi}}e^{-\bar{x}_\text{к}^2}+2\left(1+\frac{1}{2\bar{x}_\infty^2}\right)\operatorname{erf}\bar{x}_\text{к}+\frac{\sin\beta_\text{к}}{\bar{x}_\infty}\sqrt{\pi\frac{T_r}{T_i}}. \qquad (15.4.32)$$

Осесимметричное обтекание конуса с плоским дном. Для этого случая (рис. 15.4.1, *б*) формулы (15.4.26) для c_{xif} и (15.4.29) для c_{xrf} не изменяются. Выражения (15.4.27) для c_{xib} и (15.4.30) для c_{xrb} будут иными, так как в них следует заменить $\bar{x}_\text{к}=\bar{x}_\infty\sin\beta_\text{к}$ на $\bar{x}_\text{к}=\bar{x}_\infty$ ввиду того, что донная поверхность наклонена под углом $\beta_\text{к}=\pi/2$. С учетом этого для коэффициента силы, действующей на переднюю поверхность, получим

$$c_{xf}=c_{xif}+c_{xrf}=\frac{e^{-\bar{x}_\text{к}^2}}{\bar{x}_\text{к}}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}+\frac{\sin\beta_\text{к}}{2\bar{x}_\infty}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\right)+$$
$$+(1+\operatorname{erf}\bar{x}_\text{к})\left(1+\frac{1}{2\bar{x}_\infty^2}+\frac{\sin\beta_\text{к}}{2\bar{x}_\infty}\sqrt{\pi\frac{T_r}{T_i}}\right). \qquad (15.4.33)$$

Коэффициент силы, действующей на донную поверхность,

$$c_{xb}=c_{xib}+c_{xrb}=\frac{e^{-\bar{x}_\infty^2}}{\bar{x}_\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{2\bar{x}_\infty}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\right)+$$
$$+(1-\operatorname{erf}\bar{x}_\infty)\left(1+\frac{1}{2\bar{x}_\infty^2}-\frac{1}{2\bar{x}_\infty}\sqrt{\pi\frac{T_r}{T_i}}\right). \qquad (15.4.34)$$

Определяемая этим коэффициентом сила действует на донный срез в сторону, противоположную набегающему потоку, и, следовательно, представляет собой подталкивающую силу. В соответствии с этим суммарный коэффициент сопротивления конуса

$$c_x = c_{xf} - c_{xb}. \qquad (15.4.35)$$

При очень больших скоростях полета ($\bar{x} \gg 1$) формулы (15.4.32) и (15.4.35) принимают вид

$$c_x = 2, \qquad (15.4.36)$$

причем этот результат не зависит от формы тел.

При скоростях полета, которым соответствуют небольшие величины $\bar{x}$, значения c_x увеличиваются вследствие существенного влияния отраженных молекул, что видно из графика, приведенного на рис. 15.4.2, где значения c_x даны для конуса и сферической поверхности.

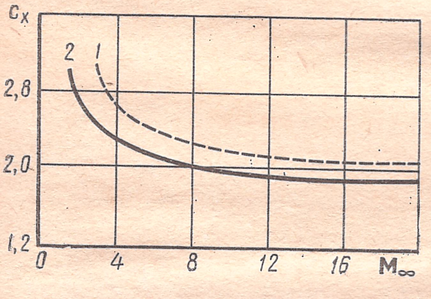


Рис. 15.4.2. Коэффициент сопротивления сферы (кривая *1*) и конуса (кривая *2*) в свободномолекулярном потоке

(угол атаки $\alpha=0$; угол конуса $\beta_к=60°$)

Примечателен тот факт, что значение $c_x=2$ точно соответствует выводам ударной теории Ньютона. Действительно, согласно этой теории, сила сопротивления определяется полной потерей количества движения частиц на площади наибольшего поперечного сечения тела. Основываясь на этом, найдем, что для любого тела с площадью миделевого сечения $\pi r^2_{мид}$ (например, для конуса), обтекаемого свободномолекулярным потоком со скоростью V_∞, сила сопротивления при нулевом угле атаки

$$X = \rho_\infty V_\infty \pi r^2_{мид} V_\infty - \rho_\infty V_\infty \pi r^2_{мид} \cdot 0 = \rho_\infty V^2_\infty \pi r^2_{мид},$$

где первый член разности — количество движения набегающего потока до соударения, второй член — количество движения после соударения.

Коэффициент этой силы $c_x = 2X/(\rho_\infty V^2_\infty \pi r^2_{мид}) = 2$. Эту же формулу получаем и для произвольного угла атаки. При этом сила должна рассчитываться как произведение коэффициента $c_x=2$, скоростного напора и проекции поверхности на плоскость, нормальную к направлению вектора скорости $\bar{V}_\infty$.

Из изложенного видно, что ударная теория отличается от рассмотренной выше ньютоновской схемы эластичного отражения (см. § 9.4). Согласно ньютоновской схеме, частицы после столкновения с поверхностью продолжают движение вдоль стенки, т. е. отклоняются на угол встречи молекул со стенкой. При этом нормальная компонента скорости погашается, а касательная остается без изменения. В соответствии с ударной теорией погашаются обе составляющие и, следовательно, наряду с нормальным напряжением (давлением) должно появиться касательное напряжение.

Из рис. 15.4.2 видно, что, несмотря на некоторую разницу, результаты точного расчета для чисел $\mathrm{M}_\infty > 4$ практически не отличаются от значения $c_x = 2$, найденного по ударной теории Ньютона. Поэтому при сравнительно небольших числах M_∞ аэродинамические силы можно рассчитывать по схеме диффузного отражения, а при больших числах M_∞ — по ударной теории Ньютона.

Неосесимметричное обтекание. В основу расчета коэффициентов осевой и нормальной сил, а также момента необходимо положить выражения для местных коэффициентов давления и трения. Входящий в эти выражения угол β следует заменить на угол $\theta_\text{к}$ между направлением скорости молекулярного потока и местной площадкой.

Зная характер распределения местных коэффициентов давления и трения и применяя общие выражения для расчета аэродинамических коэффициентов (см. § 1.3), можно для заданной формы тела вычислить их конкретные значения. На рис. 15.4.3 приведены результаты такого расчета для усеченного конуса с цилиндром, полученные при условии, что отношение скорости полета к молекулярной скорости $\bar{x}_\infty = 7$, а отношение температур $T_r/T_i = 0{,}18$. Коэффициент момента, данные о котором приведены на рис. 15.4.3, вычислялся относительно центра масс, расположенного на расстоянии одного диаметра цилиндра от большего основания конуса.

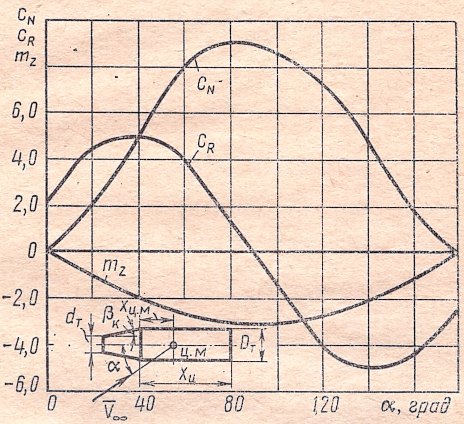


Рис. 15.4.3. Результаты расчета аэродинамических коэффициентов при обтекании свободномолекулярным потоком тела вращения

($\beta_\text{к} = 15°$; $d_\text{т}/D_\text{т} = 0{,}834$; $x_\text{ц.м}/D_\text{т} = 1$; $x_\text{ц}/D_\text{т} = 3$)

Цилиндр

Рассмотрим сопротивление цилиндра при поперечном обтекании свободномолекулярным потоком по схеме диффузного отражения и в предположении, что коэффициент аккомодации $f = 1$ (рис. 15.4.4). Воспользуемся для этой цели формулами (15.4.1)—(15.4.13). Принимая во внимание, что в (15.4.4)

$$d\bar{S} = dS/S_\text{мид} = lR_\text{т}d\beta/(R_\text{т}l) = d\beta, \qquad (15.4.37)$$

а величина $\bar{x}=\bar{x}_\infty\sin\beta$, найдем

$$c_{xif}=\frac{2X_{if}}{\rho_i V_\infty^2 S_{\text{мид}}}=\int\limits_0^{\pi/2}\left[\frac{e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}_\infty\sqrt{\pi}}+\sin\beta\left(1+\frac{1}{2\bar{x}_\infty^2}\right)(1+\operatorname{erf}\bar{x})\right]d\beta. \tag{15.4.38}$$

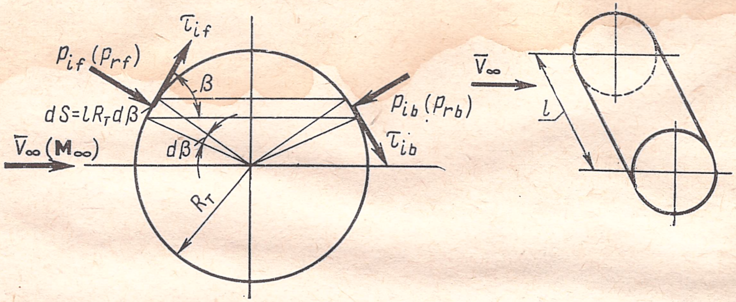


Рис. 15.4.4. Цилиндр в свободномолекулярном потоке

Для коэффициента c_{xib} с учетом (15.4.6) получим зависимость

$$c_{xib}=\frac{2X_{ib}}{\rho_i V_\infty^2 S_{\text{мид}}}=\int\limits_0^{\pi/2}\left[\frac{-e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}_\infty\sqrt{\pi}}+\sin\beta\left(1+\frac{1}{2\bar{x}_\infty^2}\right)(1-\operatorname{erf}\bar{x})\right]d\beta. \tag{15.4.39}$$

Сопротивление, вызванное отражением молекул от передней площадки, определяется в соответствии с (15.4.9) коэффициентом

$$c_{xrf}=\frac{2X_{rf}}{\rho_i V_\infty^2 S_{\text{мин}}}=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\left[\frac{e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}\sqrt{\pi}}+(1+\operatorname{erf}\bar{x})\right]\bar{x}\sqrt{\pi}\,\frac{\sin\beta}{\bar{x}_\infty^2}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\,d\beta. \tag{15.4.40}$$

Отражение от задней площадки создает силу, коэффициент которой согласно (15.4.11)

$$c_{xrb}=\frac{2X_{rb}}{\rho_i V_\infty^2 S_{\text{мид}}}=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\left[\frac{e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}\sqrt{\pi}}-(1-\operatorname{erf}\bar{x})\right]\bar{x}\sqrt{\pi}\,\frac{\sin\beta}{\bar{x}_\infty^2}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}\,d\beta. \tag{15.4.41}$$

Разность (15.4.38) и (15.4.39) дает коэффициент полной силы от воздействия падающих молекул:

$$c_{xi}=c_{xif}-c_{xib}=2\int\limits_0^{\pi/2}\left[\frac{e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}_\infty\sqrt{\pi}}+\sin\beta\left(1+\frac{1}{2\bar{x}_\infty^2}\right)\operatorname{erf}\bar{x}\right]d\beta=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{1}{2}\bar{x}_\infty^2}}{\bar{x}_\infty}\cdot\left\{I_0\left(\frac{\bar{x}_\infty^2}{2}\right)+\left(\bar{x}_\infty^2+\frac{1}{2}\right)\left[I_0\left(\frac{\bar{x}_\infty^2}{2}\right)+I_1\left(\frac{\bar{x}_\infty^2}{2}\right)\right]\right\}, \tag{15.4.42}$$

где $I_0(\bar{x}_\infty^2/2)$ и $I_1(\bar{x}_\infty^2/2)$ — модифицированные функции Бесселя соответственно порядка «0» и «1»:

$$\left.\begin{aligned} I_0\left(\frac{\bar{x}_\infty^2}{2}\right) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\frac{\bar{x}_\infty^2}{2}\cos\varphi}\,d\varphi; \\ I_1\left(\frac{\bar{x}_\infty^2}{2}\right) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\varphi\, e^{\frac{\bar{x}_\infty^2}{2}\cos\varphi}\,d\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (15.4.43)$$

Коэффициент полной силы от воздействия отраженных молекул найдем, вычитая (15.4.41) из (15.4.40). Полагая при этом, что для всей поверхности $T_r/T_i = \mathrm{const}$, получим

$$c_{xr} = c_{xrf} - c_{xrb} = \frac{1}{\bar{x}_\infty^2}\sqrt{\pi\frac{T_r}{T_i}}\int_0^{\pi/2}\bar{x}\sin\beta\,d\beta = \frac{\pi^{3/2}}{4\bar{x}_\infty}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}. \qquad (15.4.44)$$

Суммарный коэффициент сопротивления цилиндра

$$c_x = c_{xi} + c_{xr} = \frac{\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{1}{2}\bar{x}_\infty^2}}{\bar{x}_\infty}\left\{I_0\left(\frac{\bar{x}_\infty^2}{2}\right) + \left(\bar{x}_\infty^2 + \frac{1}{2}\right)\left[I_0\left(\frac{\bar{x}_\infty^2}{2}\right) + I_1\left(\frac{\bar{x}_\infty^2}{2}\right)\right]\right\} + \frac{\pi^{3/2}}{4\bar{x}_\infty}\sqrt{\frac{T_r}{T_i}}. \qquad (15.4.45)$$

Пластинка

В наиболее простом случае, когда обтекание рассчитывается по ударной теории Ньютона, сила лобового сопротивления, действующая на пластинку площадью $S_{\text{кр}}$, определяется изменением количества движения до и после соударения:

$$X = (\rho_\infty V_\infty S_{\text{кр}}\sin\alpha)V_\infty - (\rho_\infty V_\infty S_{\text{кр}}\sin\alpha)\cdot 0 = \rho_\infty V_\infty^2 S_{\text{кр}}\cdot\sin\alpha,$$

где α — угол атаки (рис. 15.4.5).

Следовательно, коэффициент сопротивления

$$c_x = 2X/(\rho_\infty V_\infty^2 S_{\text{кр}}) = 2\sin\alpha. \qquad (15.4.46)$$

Так как подъемная сила отсутствует, то аэродинамическое качество равно нулю. Эти выводы близки к реальным при очень больших скоростях свободномолекулярных потоков. При небольших скоростях следует учитывать эффекты отражения и применять для расчета соответствующие зависимости для коэффициентов давления и трения.

Рассмотрим случай отражения с коэффициентом аккомодации $f<1$. Сила на нижнюю поверхность пластинки, обусловленная воздействием падающих молекул, согласно формуле (15.4.20), в которой β заменяется на α,

$$X_{if}=F_{if}S_{\text{кр}}=(p_{if}\sin\alpha+f\tau_{if}\cos\alpha)\,S_{\text{кр}}, \tag{15.4.47}$$

а коэффициент этой силы

$$c_{xif}=\frac{2X_{if}}{\rho_i V_\infty^2 S_{\text{кр}}}=\frac{2}{\rho_i V_\infty^2}(p_{if}\sin\alpha+f\tau_{if}\cos\alpha). \tag{15.4.47$'$}$$

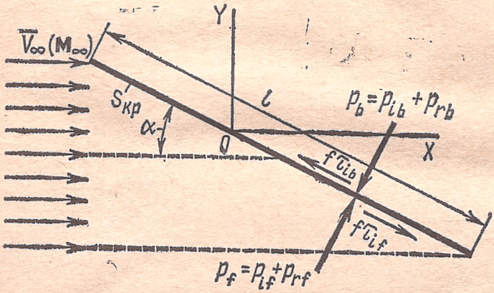


Рис. 15.4.5. Пластинка в свободномолекулярном потоке

Заменим здесь τ_{if} по выражению (15.2.48), сохранив в нем знак плюс. Одновременно вместо p_{if} подставим (15.2.29). Имея в виду, что в (15.2.48) и (15.2.29) вместо β принимается угол α, после указанных преобразований получим

$$c_{xif}=\sin^3\alpha\left[\frac{e^{-\overline{x}^2}}{\overline{x}\sqrt{\pi}}+\left(1+\frac{1}{2\overline{x}^2}\right)(1+\operatorname{erf}\overline{x})\right]+$$
$$+f\sin\alpha\cos^2\alpha\left(\frac{e^{-\overline{x}^2}}{\overline{x}\sqrt{\pi}}+1+\operatorname{erf}\overline{x}\right), \tag{15.4.47$''$}$$

где $\overline{x}=\overline{x}_\infty\sin\alpha$.

Аналогично для верхней поверхности [см. (15.4.21)]:

$$c_{xib}=\frac{2X_{ib}}{\rho_i V_\infty^2 S_{\text{кр}}}=\frac{2F_{ib}}{\rho_i V_\infty^2}=\frac{2}{\rho_i V_\infty^2}F_{if}(-\overline{x})=c_{xif}(-\overline{x})=$$
$$=\sin^3\alpha\left[\frac{-e^{-\overline{x}^2}}{\overline{x}\sqrt{\pi}}+\left(1+\frac{1}{2\overline{x}^2}\right)(1-\operatorname{erf}\overline{x})\right]+$$
$$+f\sin\alpha\cos^2\alpha\left(\frac{-e^{-\overline{x}^2}}{\overline{x}\sqrt{\pi}}+1-\operatorname{erf}\overline{x}\right). \tag{15.4.48}$$

Рассмотрим силы, вызванные отражением молекул. Из рис. 15.4.5 видно, что на нижнюю поверхность действует сила X_{rf}, которую можно представить с помощью (15.4.22) в виде

$$X_{rf}=p_{rf}S_{\text{кр}}\sin\alpha=F_{rf}S_{\text{кр}}. \tag{15.4.49}$$

Коэффициент этой силы с учетом (15.4.22)

$$c_{xrf}=\frac{2X_{rf}}{\rho_i V_\infty^2 S_{\text{кр}}}=\frac{2F_{rf}}{\rho_i V_\infty^2}=\frac{2\sin\alpha}{\rho_i V_\infty^2}[p_{if}(1-f)+fp_{\text{ст}f}]. \tag{15.4.50}$$

Подставляя вместо p_{if} и $p_{\text{ст}\,f}$ соответственно значения (15.2.29) и (15.3.3) (со знаком плюс), получим

$$c_{xrf}=(1-f)\sin^3\alpha\Bigg[\frac{e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}\sqrt{\pi}}+\left(1+\frac{1}{2\bar{x}^2}\right)(1+\operatorname{erf}\bar{x})+$$

$$+\frac{f\sin^3\alpha}{2\bar{x}^2}\sqrt{\frac{T_{\text{ст}}}{T_i}}\left[e^{-\bar{x}^2}+\bar{x}\sqrt{\pi}\,(1+\operatorname{erf}\bar{x})\Bigg]. \quad (15.4.50')$$

Отраженные от верхней поверхности молекулы создают подталкивающую силу [см. (15.4.23)]:

$$X_{rb}=F_{rb}S_{\text{кр}}=p_{rb}S_{\text{кр}}\sin\alpha. \quad (15.4.51)$$

Коэффициент этой силы согласно (15.4.23)

$$c_{xrb}=\frac{2X_{rb}}{\rho_i V_\infty^2 S_{\text{кр}}}=\frac{2F_{rb}}{\rho_i V_\infty^2}=\frac{2}{\rho_i V_\infty^2}F_{rf}(-\bar{x})=c_{xrf}(-\bar{x}). \quad (15.4.52)$$

В соответствии с (15.4.50′) получим

$$c_{xrb}=(1-f)\sin^3\alpha\left[-\frac{e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}\sqrt{\pi}}+\left(1+\frac{1}{2\bar{x}^2}\right)(1-\operatorname{erf}\bar{x})\right]+$$

$$+\frac{f\sin^3\alpha}{2\bar{x}^2}\sqrt{\frac{T_{\text{ст}}}{T_i}}\left[e^{-\bar{x}^2}-\bar{x}\sqrt{\pi}\,(1-\operatorname{erf}\bar{x})\right]. \quad (15.4.53)$$

Разность (15.4.47″) и (15.4.48) дает

$$c_{xi}=c_{xif}-c_{xib}=2\sin^3\alpha\left[\frac{1}{\bar{x}\sqrt{\pi}}e^{-\bar{x}^2}+\left(1+\frac{1}{2\bar{x}^2}\right)\operatorname{erf}\bar{x}\right]+$$

$$+2f\sin\alpha\cos^2\alpha\left(\frac{1}{\bar{x}\sqrt{\pi}}e^{-\bar{x}^2}+\operatorname{erf}\bar{x}\right). \quad (15.4.54)$$

Аналогичное выражение, соответствующее процессу отражения, получим, используя (15.4.50′) и (15.4.53):

$$c_{xr}=c_{xrf}-c_{xrb}=2(1-f)\sin^3\alpha\left[\frac{1}{\bar{x}\sqrt{\pi}}e^{-\bar{x}^2}+\left(1+\frac{1}{2\bar{x}^2}\right)\operatorname{erf}\bar{x}\right]+$$

$$+\frac{f\sin^3\alpha}{\bar{x}}\sqrt{\pi\frac{T_{\text{ст}}}{T_i}}. \quad (15.4.55)$$

Суммарный коэффициент лобового сопротивления

$$c_x=c_{xi}+c_{xr}=2(2-f)\sin^3\alpha\left[\frac{1}{\bar{x}\sqrt{\pi}}e^{-\bar{x}^2}+\left(1+\frac{1}{2\bar{x}^2}\right)\operatorname{erf}\bar{x}\right]+$$

$$+f\sin\alpha\left[2\cos^2\alpha\left(\frac{e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}\sqrt{\pi}}+\operatorname{erf}\bar{x}\right)+\frac{\sin^2\alpha}{\bar{x}}\sqrt{\pi\frac{T_{\text{ст}}}{T_i}}\right]. \quad (15.4.56)$$

Аналогично можно определить подъемную силу Y и коэффициент этой силы:

$$c_y = \frac{2Y}{\rho_i V_\infty^2 S_{\text{кр}}} = \frac{2(Y_i + Y_r)}{\rho_i V_\infty^2 S_{\text{кр}}} = c_{yi} + c_{yr} =$$

$$= \frac{2}{\rho_i V_\infty^2} [G_{if} - G_{if}(-\bar{x}) + G_{rf} - G_{rf}(-\bar{x})], \qquad (15.4.57)$$

где

$$G_{if} = p_{if} \cos \alpha - f \tau_{if} \sin \alpha; \; G_{rf} = [p_{if}(1-f) + f p_{\text{ст}f}] \cos \alpha. \qquad (15.4.58)$$

Для случая полностью диффузного отражения коэффициенты сопротивления и подъемной силы можно получить, если в соответствующих выражениях принять $f=1$, а для зеркального отражения $f=0$.

§ 15.5. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА

Температура отраженных молекул

Как уже говорилось, давление на стенку, обусловленное отражением молекул, зависит от их температуры T_r. Для определения этой температуры необходимо воспользоваться уравнением баланса энергии между телом и средой. Выведем это уравнение применительно к единичной площадке в произвольном месте поверхности. К этой площадке подводится энергия поступательного движения молекул E_i. Соответствующую энергию отраженных молекул можно определить, как следует из (15.3.11) и (15.3.10), следующим образом:

$$E_r = (1-\eta) E_i + \eta E_{\text{ст}} = (1-\eta) E_i + 2\eta m N_i R T_{\text{ст}}. \qquad (15.5.1)$$

Если учесть подвод тепла $q_{\text{рад}}$ путем внешней радиации (например, солнечным излучением), то приносимая энергия будет $E_i + q_{\text{рад}}$.

Примем, что расход энергии наряду с переносом отраженными молекулами обусловлен также излучением внешней поверхности, ее дополнительным охлаждением или нагревом изнутри (соответственно плюс и минус $q_{\text{ох}}$). Тогда уравнение баланса энергии для единичной поверхности при стационарной теплопередаче будет иметь вид

$$E_i + q_{\text{рад}} = E_r + \varepsilon\sigma T_{\text{ст}}^4 \pm q_{\text{ох}}, \qquad (15.5.2)$$

или с учетом выражения (15.5.1) для E_r

$$\eta E_i + q_{\text{рад}} = \eta E_{\text{ст}} + \varepsilon\sigma T_{\text{ст}}^4 \pm q_{\text{ох}}. \qquad (15.5.2')$$

Соотношение (15.5.2′) и входящие в него выражения для E_i (15.2.55) и $E_{\text{ст}}$ (15.3.10) соответствуют движению одноатомного газа. Если газ состоит из многоатомных молекул, в частности, если воздух рассматривается как двухатомная модель среды, то каждая частица будет обладать кроме энергии поступательного движения также внутренней энергией, обусловленной их вращением и колебанием и зависящей от свойств газа. Такие частицы, падая на единичную поверхность, передают ей в единицу времени внутреннюю энергию, равную согласно молекулярно-кинетической теории газов

$$E_{i\text{в}}=\frac{5-3k}{k-1}\cdot\frac{mRT_i}{2}N_i. \qquad (15.5.3)$$

Молекулы, покидающие поверхность при температуре $T_{\text{ст}}$, уносят внутреннюю энергию

$$E_{\text{ст.в}}=\frac{5-3k}{k-1}\cdot\frac{mRT_{\text{ст}}}{2}N_{\text{ст}}, \qquad (15.5.4)$$

где $N_{\text{ст}}=N_i$.

В соответствии с этим для двухатомного газа уравнение баланса энергии (15.5.2′) будет иметь следующий вид:

$$\eta\overline{E}_i+q_{\text{рад}}=\eta\overline{E}_{\text{ст}}+\varepsilon\sigma T_{\text{ст}}^4\pm q_{\text{ох}}, \qquad (15.5.5)$$

где

$$\overline{E}_i=E_i+E_{i\text{в}};\ \overline{E}_{\text{ст}}=E_{\text{ст}}+E_{\text{ст.в}}. \qquad (15.5.6)$$

Внося в (15.5.5) значения E_i из (15.2.55) и $E_{\text{ст}}$ из (15.3.10) (при условии, что в этих выражениях знак плюс выбирается для передней площадки, а минус — для нижней), определяем температуру стенки $T_{\text{ст}}$ при заданных значениях степени черноты ε, тепловых потоков $q_{\text{рад}}$, $q_{\text{ох}}$ и температуры воздуха T_i.

Расчеты $T_{\text{ст}}$ по уравнению (15.5.5) для пластинки в зависимости от угла атаки α показали, что влияние солнечной радиации на температуру стенки более существенно при малых углах α. Это влияние возрастает также с подъемом на высоту. Начиная с высоты $240\div250$ *км* и выше, солнечная радиация является основным фактором, определяющим температуру стенки. Снижение температуры $T_{\text{ст}}$ можно обеспечить, применяя поверхности с малым коэффициентом аккомодации η. Для этих же целей желательно, чтобы угол наклона стенки был по возможности наименьшим, что достигается при полетах на малых углах атаки. По найденной температуре $T_{\text{ст}}$ можно вычислить температуру отраженных молекул T_r. Соответствующая расчетная зависимость получается следующим образом. Напишем по аналогии с (15.5.1) формулу для энергии отраженных двухатомных молекул:

$$\overline{E}_r=(1-\eta)\overline{E}_i+\eta\overline{E}_{\text{ст}}. \qquad (15.5.7)$$

Здесь

$$\overline{E}_r=E_r+E_{r\text{в}}=2mN_iRT_r+\frac{5-3k}{k-1}\cdot\frac{mRT_r}{2}N_i=2mN_iRT_rk_1; \qquad (15.5.8)$$

$$\overline{E}_{\text{ст}}=E_{\text{ст}}+E_{\text{ст.в}}=2mN_iRT_{\text{ст}}k_1, \qquad (15.5.9)$$

где

$$k_1=(k+1)/[4(k-1)]. \qquad (15.5.10)$$

Кроме того, в (15.5.7) входит энергия

$$\overline{E}_i=E_i+E_{i\text{в}}=E_ik_2, \qquad (15.5.11)$$

значение которой определяется коэффициентом

$$k_2=1+\frac{E_{i\text{в}}}{E_i}=1+\frac{1}{E_i}\cdot\frac{5-3k}{k-1}\cdot\frac{mRT_i}{2}N_i. \qquad (15.5.12)$$

Внеся (15.5.8), (15.5.9), (15.5.11) в (15.5.7), найдем следующее соотношение для расчета температуры отраженных молекул:

$$\frac{T_r}{T_i}=\frac{T_{\text{ст}}}{T_i}\left[\frac{(1-\eta)E_ik_2}{2mN_iRT_{\text{ст}}k_1}+\eta\right]. \qquad (15.5.13)$$

При этом расчет температуры T_r ведется отдельно для передней и задней площадок, которым соответствуют определенные значения N_i и E_i, а следовательно, и $T_{\text{ст}}$. Если коэффициент аккомодации $\eta=1$, то $T_r=T_{\text{ст}}$. Этот же результат получаем и в случае так называемой адиабатической стенки, для которой тепловой процесс характеризуется отсутствием какого-либо иного внешнего подвода или отвода тепла, кроме притока энергии за счет падающих молекул. В этом случае стенка нагревается только в результате поступательного движения молекул. В соответствии с этим уравнение (15.5.5) преобразуется к виду $\overline{E}_i=\overline{E}_{\text{ст}}$, или с учетом (15.5.11) и (15.5.9) — в соотношение

$$E_ik_2=2mN_iRT_{\text{ст}}k_1=E_{\text{ст}}k_1. \qquad (15.5.14)$$

Если подставить это соотношение в (15.5.13), то можно убедиться в том, что температура отраженных молекул равна температуре стенки. Эта температура определяется из (15.5.14) после подстановки значения (15.2.55) для E_i в следующем виде:

$$\frac{T_{\text{ст}}}{T_i}=\frac{T_r}{T_i}=\frac{k_2}{4RT_ik_1}\left[V_\infty^2+RT_i\left(4+\frac{1}{\varphi+1}\right)\right]. \qquad (15.5.15)$$

В этой формуле произведение RT_i можно заменить при помощи (15.2.19):

$$\frac{T_{\text{ст}}}{T_i}=\frac{T_r}{T_i}=\left[1+\frac{k\text{M}_\infty^2}{4}+\frac{1}{4(\varphi+1)}\right]\frac{k_2}{k_1}. \qquad (15.5.16)$$

Из этой формулы видно, что температура адиабатической стенки является своеобразным аналогом температуры торможения при сплошном течении.

Условия полета на больших высотах могут быть связаны с поддержанием некоторой постоянной температуры стенки. В этом случае температура стенки задается и расчеты сводятся к определению по формуле (15.5.3) температуры отраженных частиц, которая затем используется для вычисления давления.

Суммарный удельный тепловой поток к стенке может быть определен как разность энергий падающих и отраженных молекул:

$$q=\overline{E}_i-\overline{E}_r. \qquad (15.5.17)$$

Комбинируя это уравнение с (15.5.7), найдем

$$q=\eta(\overline{E}_i-\overline{E}_{\text{ст}}), \qquad (15.5.17')$$

или с учетом выражений (15.5.11) и (15.5.9) для $\overline{E}_i$ и $\overline{E}_{\text{ст}}$

$$q=\eta(E_i k_2-2mN_i RT_{\text{ст}}k_1). \qquad (15.5.17'')$$

Вносим сюда значение E_i из (15.2.55):

$$q=\frac{\eta mN_i}{2}\left\{k_2\left[V_\infty^2+RT_i\left(4+\frac{1}{\varphi+1}\right)\right]-4RT_{\text{ст}}k_1\right\}.$$

Учитывая, что N_i определяется выражениями (15.2.17') для передней поверхности и (15.2.22) — для задней, а масса молекулы $m=\rho_i/n_i$, найдем

$$q=\frac{\eta\rho_i}{2}\sqrt{\frac{RT_i}{2\pi}}\left\{k_2\left[V_\infty^2+RT_i\left(4+\frac{1}{\varphi+1}\right)\right]-4RT_{\text{ст}}k_1\right\}\times$$
$$\times\left[e^{-\overline{x}^2}\pm\overline{x}\sqrt{\pi}(1\pm\operatorname{erf}\overline{x})\right], \qquad (15.5.18)$$

где φ определяется соотношением (15.2.56), k_2 — (15.5.12), а k_1 — (15.5.10). С учетом этих зависимостей получим для передней площадки

$$q=\eta\rho_i\sqrt{\frac{(RT_i)^3}{2\pi}}\left\{\left[e^{-\overline{x}^2}+\overline{x}\sqrt{\pi}\,(1+\operatorname{erf}\overline{x})\right]\left[\overline{x}_\infty^2-\frac{k+1}{2(k-1)}\cdot\frac{T_{\text{ст}}}{T_i}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{k+1}{2(k-1)}\right]+\frac{1}{2}\overline{x}\sqrt{\pi}(1+\operatorname{erf}\overline{x})\right\}, \qquad (15.5.18')$$

где

$$RT_i=p_i/\rho_i=a_i^2/k;\ \overline{x}=\overline{x}_\infty\sin\beta;\ \overline{x}_\infty=(V_\infty/a_i)\sqrt{k/2}. \qquad (15.5.19)$$

Аналогичное выражение для q можно получить и для задней площадки обтекаемого тела, заменив в (15.5.18') $\overline{x}$ на $-\overline{x}$.

Полагая в соответствующих формулах тепловой поток $q=0$, можно определить равновесную температуру стенки. В частности, при этом условии найдем из (15.5.18)

$$T_{\text{ст}}=T_e=\frac{k_2}{4Rk_1}\left[V_\infty^2+RT_i\left(4+\frac{1}{\varphi+1}\right)\right]. \qquad (15.5.20)$$

Из (15.5.12) и (15.2.55) видно, что при очень больших скоростях ($V_\infty\gg a_i$) параметр $k_2\approx1$. Поэтому, принимая во внимание формулу (15.5.10) для k_1 и пренебрегая вторым членом в квадратных скобках в (15.5.20), получим

$$T_{\text{ст}}=T_e=\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{V_\infty^2}{R}, \qquad (15.5.21)$$

или

$$T_{\text{ст}}=T_e=\frac{2T_i(k-1)}{k+1}\bar{x}_\infty^2. \qquad (15.5.21')$$

Такое соотношение получается из уравнения (15.5.18′), если в квадратных скобках в правой части пренебречь величиной $k/(k-1)$ по сравнению с $\bar{x}^2{}_\infty$ и оставшийся двучлен приравнять нулю.

Рассмотрим выражение для числа Стантона, являющегося безразмерным параметром теплопередачи:

$$\mathbf{St}=\frac{2k}{k+1}\cdot\frac{q}{\eta\rho_i V_\infty c_{pi}(T_e-T_{\text{ст}})}. \qquad (15.5.22)$$

В таком виде этот безразмерный параметр называется локальным модифицированным числом Стантона. В случае больших скоростей ($\bar{x}_\infty\gg 1$, $\bar{x}\gg 1$) для передней площадки тепловой поток можно представить, как это видно из (15.5.18′), в приближенной форме:

$$q=\frac{1}{2}\eta R\rho_i T_i\sqrt{RT_i}\left(\frac{e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}\sqrt{\pi}}+1+\operatorname{erf}\bar{x}\right)\bar{x}\bar{x}_\infty^2.$$

Принимая во внимание зависимость (15.5.19) для $\bar{x}$, после подстановки значения q в формулу (15.5.22) получим

$$\mathbf{St}=\frac{2k}{k+1}\cdot\frac{RT_i\sqrt{RT_i}}{V_\infty c_{pi}(T_e-T_{\text{ст}})\sqrt{2}}\left(\frac{e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}\sqrt{\pi}}+1+\operatorname{erf}\bar{x}\right)\bar{x}_\infty^3\sin\beta.$$

Так как $T_{\text{ст}}\ll T_e$, то вместо разности $T_e-T_{\text{ст}}$ можно принять T_e, определяемое по (15.5.21′). Кроме того, произведя замену $c_{pi}=$ $=kR/(k-1)$ и $\bar{x}_\infty=\left(V_\infty/\sqrt{kRT_i}\right)\sqrt{k/2}$, получим

$$\mathbf{St}=\frac{\sin\beta}{2}\left(\frac{e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}\sqrt{\pi}}+1+\operatorname{erf}\bar{x}\right). \qquad (15.5.23)$$

Теперь рассмотрим коэффициент трения. В соответствии с (15.2.48) и (15.3.6′) можем написать для этого коэффициента, отнесенного к условиям на передней площадке, следующее выражение:

$$c_{fi}=f\sin\beta\cos\beta\left(\frac{e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x}\sqrt{\pi}}+1+\operatorname{erf}\bar{x}\right). \qquad (15.5.24)$$

Сравнивая (15.5.23) и (15.5.24), можно установить связь между числом Стантона и местным коэффициентом трения:

$$\mathbf{St}=c_{fi}/(2f\cos\beta). \qquad (15.5.25)$$

Экспериментальные исследования показали, что в точке полного торможения удельный тепловой поток [*ккал*/(*м*$^2\cdot$*сек*)]

$$q \approx 7{,}35\cdot 10^7 \eta (\rho_{\infty H}/\rho_{\infty з})/(V_\infty/V_c)^3, \qquad (15.5.26)$$

где V_c — первая космическая скорость; индексы «H» и «з» соответствуют условиям на высоте H и у Земли ($H=0$).

Соответствующая равновесная температура в этой точке

$$T_{ст} = (q + q_{рад} \pm q_{ох})^{1/4} (\varepsilon\sigma)^{-1/4}. \qquad (15.5.27)$$

Если к стенке изнутри не подводится тепло ($q_{ох}=0$) и не учитывается внешняя радиация ($q_{рад}=0$), то температура стенки будет

$$T_{ст} = 4{,}83\cdot 10^4 (\eta/\varepsilon)^{1/4} (\rho_{\infty H}/\rho_{\infty з})^{1/4} (V_\infty/V_c)^{3/4}. \qquad (15.5.28)$$

В случае сильно охлаждаемой поверхности энергия частиц, отраженных от стенки, весьма мала, т. е. $\overline{E}_{ст} \ll \overline{E}_i$. Поэтому вместо (15.5.17′) можно воспользоваться уравнением

$$q = \eta \overline{E}_i = \eta E_i k_2. \qquad (15.5.29)$$

Рассматривая очень большие скорости, при которых $k_2 \approx 1$, а E_i определяется по (15.2.61), получим для удельного теплового потока на передней площадке

$$q = (\overline{x}\rho_i \eta/2)\sqrt{2RT_i}\,(V_\infty^2 + 5RT_i).$$

Выражая здесь RT_i через скорость звука a_i согласно (15.2.19) и полагая в соответствии с (15.2.20) $\overline{x} = \sin\beta (V_\infty/a_i)\sqrt{k/2} = \sin\beta \mathbf{M}_\infty \sqrt{k/2}$, найдем тепловой поток [*ккал*/(*м*$^2\cdot$*сек*)]:

$$q = 1{,}17\cdot 10^{-3} \eta \rho_i V_\infty \left[1 + 5/(k\mathbf{M}_\infty^2)\right] \sin\beta. \qquad (15.5.30)$$

В точке полного торможения $\beta = \pi/2$, следовательно,

$$q = 1{,}17\cdot 10^{-3} \eta \rho_i V_\infty^3 \left[1 + 5/(k\mathbf{M}_\infty^2)\right]. \qquad (15.5.31)$$

В этих выражениях ρ_i дано в *кГ*$\cdot$*сек*^{2}/*м*^{4}, а скорость V_∞ — в *м/сек*.

Таким образом, рассмотрен круг вопросов, связанных с исследованием трения и теплопередачи для сплошного и свободномолекулярного потоков газа. Режим течения со скольжением занимает промежуточное положение. Большинство современных методов расчета трения и теплопередачи для этого режима основано на применении уравнений пограничного слоя, решение которых должно удовлетворять специальным граничным условиям, допускающим разрыв скорости (скольжение). С этими методами можно познакомиться по различным литературным источникам [22, 28, 36].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобенко К. И. [и др.]. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. «Наука», 1964.

2. Белоцерковский О. М. [и др.]. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. Изд-во Вычислительного центра АН СССР, 1967.

3. Дородницын А. А. Пограничный слой в сжимаемом газе. «Прикладная математика и механика», 1942, т. VI, вып. 6.

4. Дородницын А. А. Метод интегральных соотношений для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных. Труды Института точной механики и вычислительной техники АН СССР, 1958.

5. Дракин И. И. Аэродинамический и лучистый нагрев в полете. Оборонгиз, 1961.

6. Иров Ю. Д. [и др.]. Газодинамические функции. «Машиностроение», 1965.

7. Кабардин Ю. А. [и др.]. Атлас гидродинамических функций при больших скоростях и высоких температурах воздушного потока. Госэнергоиздат, 1961.

8 Краснов Н. Ф. [и др.]. Аэродинамика ракет. «Высшая школа», 1968.

9. Краснов Н. Ф. Аэродинамика тел вращения. «Машиностроение», 1964.

10. Краснов Н. Ф. [и др.]. Прикладная аэродинамика. «Высшая школа», 1974.

11. Кузнецов С. И. Диаграммы и таблицы течения диссоциирующего воздуха около клина, конуса и выпуклой поверхности. Оборонгиз, 1962.

12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1958.

13. Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С. Динамика полета. «Машиностроение», 1973.

14. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. «Наука», 1970.

15. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1962.

16. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика. «Машиностроение», 1975.

17. Мхитарян А. М. Аэродинамика. «Машиностроение», 1970.

18. Остославский И. В., Стражева И. В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. Оборонгиз, 1963.

19. Повх И. Л. Аэродинамический эксперимент в машиностроении. «Машиностроение», 1974.

20. Предводителев А. С. [и др.]. Термодинамические функции воздуха для температур от 1000 до 12 000° К и давлений от 0,001 до 1000 *атм* (графики функций). Изд-во АН СССР, 1960.

21. Предводителев А. С. [и др.]. Таблицы термодинамических функций (для температур от 6000 до 12 000° К и давлений от 0,001 до 1000 *атм*). Изд-во АН СССР, 1957.

22. Рахматулин Х. А. [и др.]. Газовая динамика. «Высшая школа», 1965.

23. Франкль Ф. И., Карпович Е. А. Газодинамика тонких тел. Гостехиздат, 1948.

24. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.

25. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. Под ред. проф. Кошкина В. К. «Машиностроение», 1975.

26. Известия АН СССР: «Механика и машиностроение». «Механика жидкости и газа».

27. Известия АН СССР: «Прикладная математика и механика».

28. Исследования гиперзвуковых течений. «Мир», 1964.

29. Липпман Г., Рошко А. Элементы газовой динамики. ИЛ, 1960.

30. Научные проблемы искусственных спутников Земли. ИЛ, 1959.

31. НильсенД. Аэродинамика управляемых снарядов. Оборонгиз, 1962.

32. Паттерсон Г. Н. Молекулярное течение газов. Физматгиз, 1960.

33. Проблемы движения головной части ракет дальнего действия. ИЛ, 1959.

34. Проблемы полета с большими скоростями. ИЛ, 1960.

35. Ферри А. Аэродинамика сверхзвуковых течений. Гостехиздат, 1953.

36. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. ИЛ, 1962.

37. Хилтон У. Ф. Аэродинамика больших скоростей. ИЛ, 1955.

38. Schlichting G. Boundary layer theory, 1960.

39. Чжен П. Отрывные течения. «Мир», 1972.

40. Линь Цзя-Цзяо. Теория газодинамической устойчивости. ИЛ, 1958.

41. Вопросы ракетной техники. «Мир».

42. Ракетная техника и космонавтика (AJAA).

43. Jet Propulsion (ARS Journal).

44. Journal of the Aeronautical Sciences (Journal of the Aerospace Sciences).

45. Journal of the Royal Aeronautical Society.

46. National Advisory Committee for Aeronautics (NACA).

47. Механика. Сборник сокращенных переводов и рефератов иностранной периодической литературы. ИЛ.

48. Theory of Conical Wings, NASA Tech. Notes, 1685, 1948.

49. Lift and Center of Pressure of Wing — Body — Tail Combinations at Subsonic. Transonic and Supersonic Speeds, NACA. Tech. Repts, 1307, 1957.

50. Modern Plastics, V. 36, N 8.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
Глава IX. **Конус в сверхзвуковом потоке** 6
§ 9.1. Система уравнений осесимметричного обтекания заостренного конуса 6
§ 9.2. Обтекание конуса при постоянных теплоемкостях 9
§ 9.3. Влияние равновесной диссоциации и ионизации газа на обтекание конуса 19
§ 9.4. Затупленный конус 24
Форма затупленных носков 24
Особенности сверхзвукового обтекания 26
Обтекание конуса, затупленного по сфере 29
Глава X. **Заостренное тело вращения в сверхзвуковом потоке** 52
§ 10.1. Применение метода характеристик 52
§ 10.2. Линеаризация уравнений обтекания тонких тел вращения 64
§ 10.3. Расчет осесимметричного обтекания 70
§ 10.4. Неосесимметричное обтекание 82
§ 10.5. Расчет аэродинамических коэффициентов 87
Глава XI. **Аэродинамическая интерференция** . . . .
§ 11.1. Природа аэродинамической интерференции 99
Интерференция между корпусом и установленным на [illegible] крылом 99
Интерференция между крылом и оперением 102
§ 11.2. Подъемная сила комбинации «корпус — плоское крыло» 103
Понятие о коэффициентах интерференции . . . .
Определение потенциала скоростей 105
Скорость и давление на корпусе при наличии крыла . . . 107
Скорость и давление на крыле при наличии корпуса . . . 110
Определение коэффициентов интерференции . . . . 1[illegible]
Центр давления . . . .
Изменение коэффициентов интерференции под воздействием некоторых факторов [13] . . . .
Подъемная сила комбинации «корпус — крыло» 122
§ 11.3. Влияние угла крена на интерференцию между корпусом и плоским крылом 123
Общее соотношение для коэффициента давления 123
Давление на корпусе 125
Давление на крыле 127
Подъемная сила и центр давления 128
Общие соотношения для сил и моментов плоской комбинации при крене 131
§ 11.4. Крестообразная комбинация 133
Давление и подъемная сила . . . . 13[illegible]
Коэффициенты интерференции и центра давления 137
Общие соотношения для сил и моментов 139
Влияние сжимаемости . . . . 14[illegible]
§ 11.5. Интерференция между крылом и оперением 147
Общие определения . . . . 1[illegible]
Дозвуковые скорости 149
Сверхзвуковые скорости 150
Коэффициент интерференции 155
Влияние угла атаки и скачков уплотнения на эффективность оперения 162

Влияние торможения потока 164
Аэродинамические характеристики 165
Момент крена оперения, расположенного за крылом . . . 166
§ 11.6. Органы управления 167
Основные типы органов управления 167
Понятие об управляемости 171
Аэродинамический расчет рулей 172
§ 11.7. Аэродинамическое сопротивление 182
Сопротивление при отсутствии подъемной силы ($c_y=0$) 182
Индуктивное сопротивление 187
Глава XII. **Трение** 190
§ 12.1. Уравнение пограничного слоя 190
§ 12.2. Обобщенное уравнение пограничного слоя 196
Обобщенное уравнение пограничного слоя в дифференциальной форме 196
Интегральное соотношение пограничного слоя 198
Условные толщины пограничного слоя 201
§ 12.3. Ламинарный пограничный слой на плоской пластинке . . 202
§ 12.4. Турбулентный пограничный слой на плоской пластинке . . 211
Применение логарифмического закона распределения скорости 211
Степенной закон распределения скорости 219
§ 12.5. Температура и энтальпия в пограничном слое при наличии теплопередачи 223
Распределение температуры и энтальпии 223
Определяющая температура 228
§ 12.6. Применение определяющих параметров для расчета пограничного слоя на плоской пластинке при высоких скоростях обтекания 231
Ламинарный пограничный слой 231
Турбулентный пограничный слой 233
Трение на конусе при сверхзвуковых скоростях обтекания 235
12.7. Влияние продольного градиента давления на трение . . . 240
8. Смешанный пограничный слой. Критическое число Рейнольдса 251
ва XIII. **Теплопередача** 262
§ 13.1. Аэродинамический нагрев 262
Уравнение теплового баланса 262
Подвод тепла от разогретого газа 263
Солнечная и земная радиации 271
Лучистый тепловой поток с поверхности стенки 273
§ 13.2. Связь между трением и теплопередачей 273
§ 13.3. Теплопередача в ламинарном пограничном слое на криволинейной поверхности 280
Произвольная форма поверхности 280
Полусфера . . . . 2[illegible]
Заступленный конус 293
Плоский торец 296
§ 13.4. Диффузионная теплопередача 297
§ 13.5. Температура стенки 304
Равновесная радиационная температура 304
Равновесная температура при наличии дополнительных источников подвода и отвода тепла 308
XIV. **Тепловая защита летательных аппаратов** 311
§ 14.1. Способы тепловой защиты 311
§ 14.2. Определение теплоты абляции 316
Сублимация, полное испарение или коксование (пиролиз) 316
Одновременное плавление и сублимация (испарение) . . . 319
Плавление 322
§ 14.3. Унос массы и эффективность теплозащитного покрытия 323

Глава XV. Аэродинамика разреженной среды 325
§ 15.1. Пределы применимости теории движения сплошной среды 325
Длина пути свободного пробега молекул 325
Режимы течения газа 326
§ 15.2. Давление и трение в свободномолекулярном потоке . . . 330
Схема взаимодействия молекул со стенкой 330
Перенос массы 331
Давление 337
Напряжение трения 340
Перенос кинетической энергии 341
§ 15.3. Аккомодация 343
Обмен количеством движения 343
Обмен энергией 345
§ 15.4. Аэродинамические силы 347
Общее выражение для силы сопротивления 347
Конус 350
Цилиндр 353
Пластинка 355
§ 15.5. Теплопередача 358
Температура отраженных молекул 358
Расчет теплопередачи и температуры стенки 361
Литература 364

Николай Федорович Краснов

АЭРОДИНАМИКА

ч. II

МЕТОДЫ
АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА

Редактор Н. И. Хрусталева
Художник В. З. Казакевич
Худож. редактор Н. К. Гуторов
Техн. редактор А. К. Нестерова
Корректор Г. И. Кострикова

Т-20610 Сдано в набор 18/VI—76 г. Подп. к печати 1/XI—76 г.
Формат $60\times90^1/_{16}$ Бум. тип. № 2. Объем 23 печ. л. Усл. п. л. 23 Уч.-изд л. 23,21
Изд. № Стд—272 Тираж 7000 экз. Цена 1 р. 04 к.
БЗ—23—13 от 26/III—76 г.
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14, Издательство «Высшая школа»

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Хохловский пер., 7.
Зак. 967.

2

Н. Ф. КРАСНОВ

АЭРОДИНАМИКА